

14. Übung Algebra II

1. Aufgabe Moduln

(4 Punkte)

Zeige folgende Aussage: Ist S als R -Modul frei von endlichem Rang und M ein R -Modul so gibt es eine Isomorphie von S -Moduln

$$S \otimes_R M \cong \operatorname{Hom}_R(S, M).$$

2. Aufgabe Moduln

(4 Punkte)

Seien E/K und L/K Körpererweiterungen und L/K endlich separabel. Ferner sei $L/K \cong K[t]/f(t)K[t]$ und $(f \in K[t])$. Zeige, dass

$$L \otimes_K E \cong \prod E_i$$

mit $E_i \cong E[t]/f_i[t]E[t]$ gilt wenn $f = \prod f_i$ Zerlegung von f in $E[t]$ in irreduzible Faktoren ist. Folgere daraus dass für eine endliche Erweiterung K von $\mathbb{Q}$ dann $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{s_1} \times \mathbb{R}^{2s_2}$ ist wobei s_1 die Anzahl der reellen und $2s_2$ die Anzahl der komplexen Nullstellen des Minimalpolynomes eines primitiven Elementes von $K/\mathbb{Q}$ ist.

3. Aufgabe Lineare Disjunktheit

(4 Punkte)

Sei E/K eine Körpererweiterung mit Zwischenkörpern F und L . Beweise oder widerlege durch ein Gegenbeispiel folgende Aussage: F/K und L/K sind genau dann linear disjunkt wenn $F \otimes_K L$ ein Körper ist.

4. Aufgabe Flache Moduln

(4 Punkte)

Sei M ein flacher R -Modul und $a \in R$ kein Nullteiler. Zeige, dass wenn $ax = 0$ für ein geeignetes $x \in M$ gilt dann $x = 0$ ist.