

11. Übung Algebra II

1. Aufgabe Affine Untergruppen

(5 Punkte)

Eine Permutation $\sigma \in S(\mathbb{F}_p)$ heisst **affin**, wenn es Elemente $a \in \mathbb{F}_p^\times$ und $b \in \mathbb{F}_p$ gibt mit

$$\sigma x = ax + b \quad \text{für alle } x \in \mathbb{F}_p.$$

Eine Untergruppe G von $S(\mathbb{F}_p)$ heisst eine **affine Untergruppe** von $S(\mathbb{F}_p)$, wenn jedes $\sigma \in G$ affin ist. Zeige, dass jede affine Untergruppe von $S(\mathbb{F}_p)$ auflösbar ist.

2. Aufgabe Auflösbarkeit von Galoisgruppen

(3 Punkte)

Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ ein Körper und $f \in K[t]$ irreduzibel vom Grad p mit $p > 2$ Primzahl. Zeige: Wenn die Galoisgruppe von f auflösbar ist hat f entweder genau eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ oder alle Nullstellen in $\mathbb{R}$.

3. Aufgabe Transzendenzgrad

(2 Punkte)

Sei E/K eine Körpererweiterung und F ein Zwischenkörper. Für Transzendenzbasen B von F/K und B' von E/F gilt $B \cap B' = \emptyset$ und $B \cup B'$ ist eine Transzendenzbasis von E/K . Ferner gilt $\text{trdeg}(E/K) = \text{trdeg}(E/F) + \text{trdeg}(F/K)$.

4. Aufgabe Praktische Aufgabe

(6 Punkte)

Schreibe in KASH3 einen Algorithmus, der für ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{F}_2[t]$ vom Grad $n \leq 5$ entscheidet, ob die Galoisgruppe von f in der A_n liegt oder nicht. Betrachte dazu die Erweiterung E/K mit $E := \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n]$ und $K := \mathbb{F}_2[s_1, \dots, s_n]$. Aus $(S_n : A_n) = 2$ folgt $\mathcal{F}_{E/K}(A_n) = K(h)$ mit $m_{h,K} = t^2 + g_1(s_1, \dots, s_n)t + g_0(s_1, \dots, s_n)$ wobei $g_1, g_2 \in K[s_1, \dots, s_n]$ gilt. Versuche mit Hilfe von $m_{h,K}$ festzustellen, ob die Galoisgruppe von f in der A_n liegt oder nicht.