

10. Übung Algebra II

1. Aufgabe Galoisgruppe eines Polynomes

(4 Punkte)

Zeige folgende Aussagen:

- (a) Sei K Körper und p Primzahl. Ferner sei $f \in K[t]$ irreduzibel mit Grad p . Enthält $G(f, K)$ ein Element der Ordnung p und eine Transposition, so gilt $G(f, K) = S_p$. Hier bezeichnet S_p die symmetrische Gruppe.
- (b) Sei $f \in \mathbb{Q}[t]$ ein irreduzibles Polynom mit Grad $f = p$ und p Primzahl. Hat dann f nur 2 nicht-reelle Wurzeln in $\mathbb{C}$, so gilt $G(f, \mathbb{Q}) = S_p$.

2. Aufgabe Auflösbarkeit durch Radikale

(3 Punkte)

Zeige, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$ das Polynom

$$f(t) = t^5 - kt + 1 \in \mathbb{Q}(t)$$

nicht auflösbar ist.

3. Aufgabe Kummertheorie

(4 Punkte)

Es gelten die Bezeichnungen von Abschnitt 2.8 Kummertheorie im Skript. Zeige folgende Aussagen:

- (a) Bildet die Menge $\{\wp(b) \cdot \wp(A_K) \mid b \in B\}$ mit $B \subseteq \wp^{-1}(\Delta)$ ein Erzeugendensystem von $\Delta/\wp(A_K)$ dann gilt $K(\wp^{-1}(\Delta)) = K(B)$.
- (b) Zeige, dass $K(\wp^{-1}(\Delta_1))K(\wp^{-1}(\Delta_2))/K$ zu $\Delta_1\Delta_2$ und $K(\wp^{-1}(\Delta_1)) \cap K(\wp^{-1}(\Delta_2))/K$ zu $\Delta_1 \cap \Delta_2$ gehören.

4. Aufgabe Paarungen

(5 Punkte)

Seien C und D abelsche Gruppen. Eine Paarung von C und D in die additive Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist eine in beiden Argumenten homomorphe Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C \times D \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}. \quad (1)$$

Eine Paarung definiert (und wird definiert durch) Homomorphismen

$$\iota_1 : C \rightarrow \text{Hom}(D, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \quad \text{bzw.} \quad \iota_2 : D \rightarrow \text{Hom}(C, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \quad (2)$$

und heißt nicht ausgeartet, wenn ι_1 und ι_2 injektiv sind. Zeige folgende Aussage: Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wie in (1) eine nicht ausgeartete Paarung. Dann besitzen C und D den Exponenten n und es gilt $\#C = \#D$. Ist zusätzlich $\#C < \infty$, so sind die Monomorphismen ι_1 und ι_2 wie in (2) Isomorphismen und es gibt eine (nicht kanonische) Isomorphie $C \cong D$.