Skript zur Algebra I + II

Prof. Dr. F. Heß
Technische Universität Berlin

Inhaltsverzeichnis

Vereinbarungen

Folgende allgemeine Festlegungen sollen gelten: Ein Ring R ist (wenn nicht anders vermerkt) kommutativ und hat ein Einselement 1_R oder kurz 1. Jeder Homomorphismus $\phi : R \to S$ der Ringe R und S erfüllt $\phi(1_R) = 1_S$. Jeder Teilring eines Rings R enthält 1_R. Der Nullring ist $R = \{0\}$.

Kapitel 1

Gruppen

Noch einzugeben.

Kapitel 2

Ringe I

In diesem Kapitel wird die Ringtheorie behandelt. Für die grundlegenden Definitionen und Aussagen siehe Skript von Pohst.

2.1 Grundlagen

Noch einzugeben.

2.2 Einheiten, Nullteiler, nilpotente Elemente

2.1 Definition. Sei R ein Ring.

1. Sind $a, b \in R$ mit $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $ab = 0$, so heißen a (linker) und b (rechter) Nullteiler von R.

2. R heißt nullteilerfrei, wenn es keine Nullteiler von R gibt.

3. Ist $a \in R$ und $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ mit $a^n = 0$, so heißt a nilpotent.

4. Sei R Ring mit 1. Ein Element $a \in R$ heißt Einheit (invertierbar) in R, wenn es $b \in R$ mit $ab = ba = 1$ gibt, und b heißt Inverses von a.

5. Die Menge der Einheiten von R wird mit $U(R)$ oder $R^\times$ bezeichnet („U“ für „units“).

Das Element b aus 4. ist nach den Überlegungen zu Inversen in Halbgruppen eindeutig bestimmt. Schreibweise: $a^{-1} = b$.

2.2 Beispiel. $R = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Es ist leichter, im direkten Produkt zu rechnen: $(2, 0)$ ist nilpotent, denn $(2, 0)^2 = (0, 0)$. $(1, 0)$ ist nicht nilpotent, aber

ein Nullteiler, denn $(1,0)(0,1) = (0,0)$. $(1,2)$ ist eine Einheit (sogar Idempotent), denn $(1,2)(1,2) = 1$. Ebenso ist $(3,2)$ eine Einheit.
Sei $\phi : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ der Isomorphismus aus dem chinesischen Restsatz. Was sind die Urbilder der obigen Elemente in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$? Orthogonale Idempotente in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sind $(1,0)$ und $(0,1)$, und in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ sind es $e_1 = -3$ und $e_2 = 4$. Damit $\phi(e_1) = (1,0)$ und $\phi(e_2) = (0,1)$. Weiter $\phi^{-1}((2,0)) = 2e_1 + 0e_2 = 6$, $6^2 = 36 = 0 \bmod 12$, $\phi^{-1}((1,2)) = e_1 + 2e_2 = 5$, $5^2 = 25 = 1 \bmod 12$.

2.3 Beispiel. $R = \mathbb{Z}$. Es gibt keine nilpotenten Elemente außer 0. Es gibt keine Nullteiler. Die Einheiten sind $1, -1$.

2.4 Beispiel. $R = K^{n\times n}$, $n\times n$ Matrizen über K für $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{R}$ etc. Dies ist mit Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation ein Ring. Einselement ist die Einheitsmatrix. Obere Dreiecksmatrizen $A \in K^{n\times n}$ mit 0 auf der Diagonalen sind nilpotent (das charakteristische Polynom einer solchen Matrix A ist x^n, und nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $A^n = 0$). Matrizen $A \in K^{n\times n}$ mit $\det(A) \neq 0$ sind Einheiten (invertierbar). Matrizen $A \in K^{n\times n}$ mit $\det(A) \neq 0$ sind Nullteiler (wähle $v \in K^n$, $v \neq 0$ mit $Av = 0$ und setze $B = (v,\dots,v) \in K^{n\times n}$. Dann gilt $AB = 0$).

2.5 Beispiel. Orthogonale Idempotente ($n \geq 2$) sind Nullteiler.

Wenn R ein Ring ist und wir von Einheiten oder $R^\times$ sprechen, so nehmen wir an, daß R ein Einselement besitzt.

2.6 Satz. *Sei R ein Ring.*

1. *$(R^\times, \cdot)$ ist Gruppe und wird Einheitengruppe von R genannt.*

2. *Ist I Ideal von R und $I \cap R^\times \neq \emptyset$, so folgt $I = R$.*

3. *Sei $a \in R$. Die Abbildungen $R \to R$, $x \mapsto ax$ und $R \to R$, $x \mapsto xa$ sind genau dann injektiv, wenn a kein Nullteiler ist.*

4. *Einheiten sind keine Nullteiler. Sind $a, b \in R$ keine Nullteiler, so ist auch ab kein Nullteiler.*

5. *Nilpotente Elemente ungleich Null sind Nullteiler. Für R kommutativ heißt $\mathrm{Rad}(R) = \{x \in R \,|\, x \text{ ist nilpotent}\}$ das (Nil-)Radikal von R und ist ein Ideal von R.*

6. *Es sei R isomorph zu einem direkten Produkt von Ringen R_i, also $R \cong \prod_{i\in I} R_i$. Dann gilt $R^\times \cong \prod_{i\in I} R_i^\times$. Für I endlich gilt $\mathrm{Rad}(R) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Rad}(R_i)$.*

Beweis. Zu 1. Für $R = 0$ ist $R^\times = \{0\}$ einelementige Gruppe. Ansonsten gilt $0 \notin R^\times$, und für $a, b \in R^\times$ ist $ab \in R^\times$, denn $(b^{-1}a^{-1})(ab) = (ab)(b^{-1}a^{-1}) = 1$. Daher ist $R^\times$ eine Halbgruppe mit Einselemente und mit Inversen, also eine Gruppe.

Zu 2. Sei $a \in I \cap R^\times$. Dann gilt $a^{-1}a = 1 \in I$, also $r = r \cdot 1 \in I$ für alle $r \in R$, daher $I = R$.

Zu 3. Sind die Abbildungen injektiv, so gilt $ax = 0 \Rightarrow x = 0$ und $xa = 0 \Rightarrow x = 0$ für beliebiges $x \in R$, also ist a kein Nullteiler. Ist umgekehrt $a \in R$ kein Nullteiler, so gilt $ax = ay \Rightarrow a(x - y) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$, für beliebige $x, y \in R$. Analog für $xa = ya$. Also sind die Abbildungen injektiv.

Zu 4. Sei $a \in R^\times$. Für $b \in R$ folgt aus $ab = 0$, daß $a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 0$ ist. Also ist a kein linker Nullteiler. Analog für $ba = 0$ und a ist auch kein rechter Nullteiler. Sind $a, b \in R$ beide keine Nullteiler, so sind die Abbildungen aus 1. und ihre Hintereinanderausführungen $x \mapsto (ab)x$, $x \mapsto x(ab)$ injektiv. Folglich ist ab kein Nullteiler.

Zu 5. Sei $x \in \mathrm{Rad}(R)$, $x \neq 0$. Sei $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ minimal mit $x^n = 0$. Es gilt $n \geq 2$. Dann folgt $x^{n-1}x = xx^{n-1} = 0$, also ist x linker und rechter Nullteiler. Für die Idealeigenschaft siehe Aufgabenblatt.

Zu 6. Sei $\phi : R \to \prod R_i$ der Isomorphismus. Elemente in $\prod R_i$ sind genau dann Einheiten, wenn in jeder Koordinate eine Einheit steht. Daher $\phi(R^\times) = (\prod R_i)^\times = \prod R_i^\times$. Weiter gilt $\mathrm{Rad}(\prod R_i) \subseteq \prod \mathrm{Rad}(R_i)$ durch koordinatenweise Betrachtung. Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \prod \mathrm{Rad}(R_i)$ mit $n = \#I$, und seien $n_i \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ mit $x_i^{n_i} = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$. Setze $m = \prod n_i$. Dann gilt $x^m = 0$, also $x \in \mathrm{Rad}(\prod R_i)$ und damit $\mathrm{Rad}(\prod R_i) = \prod \mathrm{Rad}(R_i)$. Es folgt $\phi(\mathrm{Rad}(R)) = \mathrm{Rad}(\prod R_i) = \prod \mathrm{Rad}(R_i)$. □

2.7 Beispiel. Man kann sich die Aussagen des Satzes ganz gut an $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ klarmachen. Die Menge der Nullteiler ist im allgemeinen kein Ideal von R (siehe Zerlegung der Eins in orthogonale Idempotente).

2.8 Satz. *Seien R, S Ringe mit Eins und $\phi : R \to S$ ein Homomorphismus mit $\phi(1) = 1$. Für $x \in R^\times$ gilt dann $\phi(x) \in S^\times$ und $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$.*

Beweis. Es gilt $1 = \phi(1) = \phi(xx^{-1}) = \phi(x)\phi(x^{-1})$ und analog $1 = \phi(x^{-1})\phi(x)$. Daher ist $\phi(x^{-1})$ Inverses von $\phi(x)$, also $\phi(x)^{-1} = \phi(x^{-1})$ per Definition. □

2.9 Beispiel. Die Aussage gilt nicht, wenn $\phi(1) \neq 1$ ist. Man betrachte zum Beispiel den Endomorphismus $R \times R \to R \times R$, $(x, y) \mapsto (x, 0)$.

2.3 Schiefkörper, Körper, einfache Ringe

2.10 Definition. Ein Ring mit $1 \neq 0$ heißt Schiefkörper, wenn $R^\times = R\backslash\{0\}$ gilt. Ist R kommutativ, so heißt R Körper.

Sei R Körper, S Ring. Ist R Unterring von S, dann heißt R Teilkörper von S. Ist dazu S ein Körper, so heißt S Ober- oder Erweiterungskörper von R. Es gelten analoge Bezeichnungen für Schiefkörper.

Homomorphismen von Schiefkörpern und Körpern sind Homomorphismen der zugrundeliegenden Ringe.

2.11 Beispiel. Sei

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \mid u, v \in \mathbb{C} \right\},$$

wobei $\bar{u}, \bar{v}$ die konjugiertkomplexen Zahlen von u, v bezeichnen. Nachrechnen zeigt, daß K unter Addition, Negierung und Multiplikation abgeschlossen ist. Außerdem enthält K die Einheitsmatrix. Daher ist K ein Ring mit Eins. Darüberhinaus gilt

$$\det \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} = |u|^2 + |v|^2,$$

damit ist jede von Null verschiedene Matrix invertierbar, und die Inversen haben die Form

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}^{-1} = \left(|u|^2 + |v|^2\right)^{-1} \begin{pmatrix} \bar{u} & -v \\ \bar{v} & u \end{pmatrix},$$

liegen also wieder in K. Damit ist K also ein Schiefkörper. Da K die Erzeuger der Gruppe Q_8 enthält, diese waren

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

ist K nicht kommutativ und heißt Quaternionenschiefkörper.

2.12 Beispiel. Sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ Faktorring. Für $a \in \mathbb{Z}$ mit $a \not\equiv 0 \bmod p$ gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit $1 = \lambda a + \mu p$, also $1 \equiv \lambda a \bmod p$. Also ist $\lambda + p\mathbb{Z}$ das Inverse von $a + p\mathbb{Z}$ in $\mathbb{F}_p$ und $\mathbb{F}_p$ ist ein Körper mit p Elementen.

2.13 Beispiel. Ist $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ keine Primzahl, so ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ auch kein Körper. Für $n = 0$ ist dies wegen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ klar. Für $n \neq 0$ enthält $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Nullteiler. Sei $n = n_1 n_2$ mit $n_i \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$. Dann folgt $(n_1 + n\mathbb{Z})(n_2 + n\mathbb{Z}) = n + n\mathbb{Z} = 0 + n\mathbb{Z}$, aber $n_i + n\mathbb{Z} \neq 0 + n\mathbb{Z}$, also sind die $n_i + n\mathbb{Z}$ Nullteiler in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2.14 Definition. Sei R ein Ring. Besitzt R nur $\{0\}$ und R als Ideale, so heißt R einfach.

2.15 Satz. *Sei R ein Ring.*

1. *Ist R einfach und $\phi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, so ist ϕ entweder konstant gleich 0 oder injektiv.*

2. *Schiefkörper sind einfache Ringe.*

3. *Sind R, S Schiefkörper und $\phi : R \to S$ ein nicht konstanter Homomorphismus, so gilt $\phi(1) = 1$ und $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$ für alle $x \in R$.*

4. *Teilschiefkörper und Erweiterungsschiefkörper besitzen das gleiche Einselement.*

5. *Ist $R \neq 0$, kommutativ und einfach und besitzt R ein Einselement, so ist R ein Körper.*

6. *Ist $R \neq 0$, endlich und nullteilerfrei, so ist R ein Körper.*

Beweis. Zu 1. Klar, da $\ker(\phi) = \{0\}$ oder $\ker(\phi) = R$ gelten muß.

Zu 2. Für jedes Ideal $I \neq 0$ gilt $I \cap R^\times \neq \emptyset$, also $I = R$.

Zu 3. Nach 1. ist ϕ injektiv und liefert daher einen Gruppenmonomorphismus $R^\times \to S^\times$. Daher $\phi(1) = 1$ und dann $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$ wie bei Ringen.

Zu 4. Folgt aus 3. für den Inklusionsmonomorphismus.

Zu 5. Sei $x \in R$, $x \neq 0$. Dann ist Rx ein Ideal von R, da R kommutativ ist, und es gilt $Rx \neq \{0\}$, da R ein Einselement besitzt und somit $x \in Rx$ gilt. Es folgt $Rx = R$, da R einfach ist. Daher gilt $1 \in Rx$, es gibt also $y \in R$ mit $1 = yx$, also $x \in R^\times$. Es folgt, daß $R\backslash\{0\} = R^\times$ gilt.

Zu 6. Die Menge $R\backslash\{0\}$ ist eine Halbgruppe, da R nullteilerfrei ist. Sei $a \in R\backslash\{0\}$. Die Abbildung $x \mapsto ax$ ist injektiv. Da R endlich ist, ist sie auch surjektiv. Für jedes $b \in R\backslash\{0\}$ gibt es also $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $ax = b$. Eine Halbgruppe, in der diese Bedingung erfüllt ist, ist eine Gruppe (siehe Satz über Gruppen am Anfang des Semesters). Damit ist R Schiefkörper. Der Rest des Beweises ist ziemlich schwer und lang (siehe Meyberg 2). □

2.16 Bemerkung. Aussage 5 kann ebenfalls dazu verwendet werden, zu zeigen, daß $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für eine Primzahl p ein Körper ist.

2.17 Bemerkung. Ist $R \neq 0$ und einfach, so folgt nicht, daß R Schiefkörper ist. Als Beispiel betrachtet man $R = K^{n\times n}$ für einen Körper K. Ist $M \in R$ und $M \neq 0$, so ist es nicht schwer zu sehen, daß es $A_i, B_i \in R$ mit $\sum_i A_i M B_i = 1$ gibt. Folglich enthält jedes Ideal ungleich 0 eine Einheit und ist gleich R. Daher ist R einfach. Für $n \geq 2$ enthält R aber auch nicht invertierbare Matrizen und ist daher kein Schiefkörper (Details siehe Meyberg 1, Seite 120).

2.4 Charakteristik und Primkörper

Ist R ein Ring mit 1, so gibt es genau einen Homomorphismus $\phi : \mathbb{Z} \to R$ mit $\phi(1) = 1_R$. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist nämlich $\phi(n) = \phi(n \cdot 1) = n \cdot 1_R$, wobei $n \cdot 1 = 1 + \cdots + 1$

und $n \cdot 1_R = 1_R + \cdots + 1_R$ mit jeweils n Einsen. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $c \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, so daß $\ker(\phi) = c\mathbb{Z}$, und wir erhalten eine Einbettung von $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$ in R.

2.18 Definition. Wir definieren die Charakteristik von R als $\mathrm{char}(R) = c$.

2.19 Satz. *Sei R ein Ring mit* 1.

1. $\mathrm{char}(R)$ *ist der kleinste Exponent von* $(R, +)$ *in* $\mathbb{Z}^{\geq 0}$.

2. *Für R nullteilerfrei und $R \neq 0$ ist* $\mathrm{char}(R) = 0$ *oder* $\mathrm{char}(R)$ *eine Primzahl.*

Beweis. Zu 1. Mit $n = \mathrm{char}(R)$ gilt $n \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} 1 = 0$. Für $x \in R$ ergibt sich $n \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x = (\sum_{i=1}^{n} 1)x = 0x = 0$. Also hat jedes x eine Ordnung kleiner gleich n und 1 hat Ordnung genau n.

Zu 2. Sei $n = \mathrm{char}(R)$. Für $n \neq 0$ gilt zunächst $n \geq 2$ wegen $R \neq 0$. Weiter wird $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ injektiv nach R durch ϕ eingebettet. Da R nullteilerfrei ist, gilt dies auch für $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Also muß n eine Primzahl sein. □

2.20 Definition. Sei R ein Ring mit 1. Wir definieren den Primring von R als $\cap\{U \mid U$ Unterring von R mit $1 \in U\}$. Sei R ein Schiefkörper. Wir definieren den Primkörper von R als $\cap\{U \mid U$ Unterschiefkörper von R $\}$.

2.21 Satz. *Sei R Ring mit Eins und $\phi : \mathbb{Z} \to R$ wie oben.*

1. *$\phi(\mathbb{Z})$ ist gleich dem Primring von R.*

2. *Ist R nullteilerfrei und $R \neq 0$, so ist der Primring isomorph zu $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für p eine Primzahl.*

3. *Für einen Schiefkörper R ist der Primkörper isomorph zu $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für p eine Primzahl.*

Beweis. Zu 1. Für einen Unterring U von R mit $1 \in U$ folgt $\phi(\mathbb{Z}) \subseteq U$. Da $\phi(\mathbb{Z})$ ein Unterring mit $1 \in \phi(\mathbb{Z})$ ist, folgt die Behauptung.

Zu 2. Folgt aus 1., $\phi(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\mathrm{char}(R)\mathbb{Z}$ und weil $\mathrm{char}(R) = 0$ oder eine Primzahl ist.

Zu 3. Der Primkörper enthält den Primring. Ist $\mathrm{char}(R)$ eine Primzahl, so ist der Primring bereits Körper und die Behauptung folgt. Ist $\mathrm{char}(R) = 0$ und ist U ein Teilschiefkörper mit $\phi(\mathbb{Z}) \subseteq U$, so enthält U einen zu $\mathbb{Q}$ isomorphen Teilkörper bestehend aus den Elementen $\{\phi(x)/\phi(y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0\}$, woraus sich der Rest der Behauptung ergibt. □

2.22 Satz. *Sei R ein kommutativer Ring der Charakteristik p, wobei p eine Primzahl ist. Dann gilt $(x + y)^p = x^p + y^p$ für alle $x, y \in R$. Ferner definiert $x \mapsto x^p$ einen Endomorphismus von R, welcher Frobeniusendomorphismus (zur Potenz p) genannt wird.*

Beweis. Die erste Aussage folgt durch Anwendung des binomischen Satzes und weil die binomischen Koeffizienten außer dem ersten und dem letzten alle durch p teilbar und daher hier Null sind. Die Teilbarkeit ergibt sich aus der Proposition zum ersten Satz von Sylow.

Wegen $(xy)^p = x^p y^p$ handelt es sich bei $x \mapsto x^p$ tatsächlich um einen Endomorphismus. □

Iterieren liefert Frobeniusendomorphismen $x \mapsto x^{p^k}$ zu Potenzen p^k. Wir sprechen auch von Frobeniusautomorphismen, wenn die Frobeniusendomorphismen injektiv und surjektiv sind.

2.5 Noethersche Ringe

2.23 Definition. Ein Ring R, in dem jedes Ideal durch endlich viele Elemente erzeugt werden kann, heißt noethersch.

2.24 Satz. *Sei R ein Ring. Dann sind äquivalent:*

1. *R ist noethersch.*
2. *Jede aufsteigende Kette von Idealen $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ von R wird stationär, es gibt also $n \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ mit $I_m = I_n$ für alle $m \in \mathbb{Z}^{\geq n}$.*
3. *In jeder nichtleeren Menge M von Idealen gibt es ein maximales Element, es gibt also $I \in M$, so daß für alle $J \in M$ mit $I \subseteq J$ bereits $I = J$ folgt.*

Beweis. Siehe Skript von Pohst. □

2.25 Beispiel. Der Ring $\mathbb{Z}$ ist noethersch, da jedes Ideal sogar von nur einem Element erzeugt werden kann. Einfache Ringe mit 1 sind noethersch.

2.26 Beispiel. Sei $I = \mathbb{Z}$ und $R = \prod_{i \in I} \mathbb{Z}$. Dann ist R nicht noethersch. Die Mengen $I_i = \{f \in R \mid f(j) = 0 \text{ für } j \notin \{1, \ldots, i\}\}$ bilden eine echt aufsteigende Kette von Idealen von R, die nicht stationär wird.

2.27 Satz. *Faktorringe noetherscher Ringe sind noethersch. Epimorphe Bilder noetherscher Ringe sind noethersch.*

Beweis. Siehe Meyberg 1 oder Skript von Pohst. □

2.28 Bemerkung. Unterringe noetherscher Ringe sind nicht unbedingt noethersch. Als Beispiel (Begriffe werden später eingeführt) kann man einen Polynomring R in unendlich vielen Variablen und dessen Quotientenkörper K betrachten. Dann ist K als Körper noethersch, aber R ist nicht noethersch.

2.6 Maximale Ideale

2.29 Definition. Sei R ein Ring. Ein Ideal $\mathfrak{m}$ von R heißt maximales Ideal von R, wenn $\mathfrak{m} \neq R$ ist und für alle Ideale I von R mit $\mathfrak{m} \subseteq I \subseteq R$ bereits $I = \mathfrak{m}$ oder $I = R$ gilt.

2.30 Satz. *Sei R ein Ring und $\mathfrak{m}$ ein Ideal von R.*

1. *Ist $\mathfrak{m}$ maximales Ideal und I ein beliebiges Ideal von R mit $I \not\subseteq \mathfrak{m}$, so gilt $I + \mathfrak{m} = R$.*

2. *$\mathfrak{m}$ ist genau dann maximales Ideal von R, wenn $R/\mathfrak{m}$ einfach ist.*

3. *Ist R kommutativ mit Einselement, so ist $\mathfrak{m}$ genau dann maximal, wenn $R/\mathfrak{m}$ ein Körper ist.*

Beweis. Leicht. □

2.31 Beispiel. Die maximalen Ideale von $\mathbb{Z}$ sind genau die Ideale $p\mathbb{Z}$, wo p eine Primzahl ist.

2.32 Definition. Sei M eine Menge und $\leq$ eine Relation auf M. Dann heißt $\leq$ eine Halbordnung auf M, wenn die Eigenschaften

$$x \leq x, \quad (x \leq y \text{ und } y \leq x) \Rightarrow x = y, \quad (x \leq y \text{ und } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$$

für alle $x, y, z \in M$ gelten. Gilt dazu $x \leq y$ oder $y \leq x$ für alle $x, y \in M$, so heißt $\leq$ eine Ordnung auf M.

Sei $\leq$ eine Halbordnung auf M. Für jede Teilmenge X von M schränkt sich $\leq$ zu einer Halbordnung auf X ein. Eine Kette von M ist eine Teilmenge X von M, auf der $\leq$ eine Ordnung definiert.

Sei $\leq$ eine Halbordnung auf M und $X \subseteq M$. Ein Element $m \in M$ mit $m \leq x \Rightarrow x = m$ für alle $x \in M$ heißt maximales Element von M. Ein Element $s \in M$ mit $x \leq s$ für alle $x \in X$ heißt obere Schranke von X in M. Die Menge M heißt induktiv geordnet, wenn jede nicht leere Kette X von M eine obere Schranke in M besitzt.

2.33 Axiom (Lemma von Zorn). *Sei M eine bezüglich $\leq$ induktiv geordnete, nicht leere Menge. Dann gibt es ein maximales Element m von M.*

Beweis. Das Lemma von Zorn ist äquivalent zum Auswahlaxiom, welches von den üblichen Axiomen der Mengenlehre unabhängig ist. Es handelt sich hierbei also eher um eine Annahme, die man treffen oder auch nicht treffen kann. Für gewöhnlich ist es praktisch, das Auswahlaxiom anzunehmen. □

2.34 Satz. *Sei R ein Ring mit Einselement und I ein Ideal von R mit $I \neq R$. Dann gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von R mit $I \subseteq \mathfrak{m}$.*

Beweis. Wir definieren $M = \{J \mid J \text{ Ideal von } R \text{ mit } J \neq R \text{ und } I \subseteq J\}$. Die Inklusionsrelation $\subseteq$ liefert eine Halbordnung auf M, wie man unmittelbar sieht.

Wir behaupten, daß M sogar induktiv geordnet ist. Sei dazu $X \subseteq M$ eine nicht leere Kette. Wir müssen zeigen, daß X eine obere Schranke in M besitzt, daß es also ein Ideal $\mathfrak{m}_X \in M$ mit $J \subseteq \mathfrak{m}_X$ für alle $J \in X$ gibt. Definiere $\mathfrak{m}_X := \cup_{J \in X} J$. Ähnlich wie bei aufsteigenden Vereinigungen von Gruppen oder Ringen sieht man leicht, daß es sich hierbei um ein Ideal von R handelt. Es bleibt $\mathfrak{m}_X \neq R$ zu zeigen, um $\mathfrak{m}_X \in M$ zu erhalten. Nun gilt aber $1 \notin J$ für alle $J \in X$, folglich $1 \notin \mathfrak{m}_X$, also $\mathfrak{m}_X \neq R$.

Wegen $I \in M$ ist M nicht leer. Nun wenden wir das Zornsche Lemma an und erhalten die Existenz eines Ideals $\mathfrak{m} \in M$, welches bezüglich $\subseteq$ in M maximal ist. Es gilt also $\mathfrak{m} \neq R$ und $\mathfrak{m} \subsetneq J \Rightarrow J = R$ für jedes Ideal von R, und somit ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von R. □

Die Aussage des Satzes gilt entsprechend für Links- und Rechtsideale. Für einen noetherschen Ring braucht man das Lemma von Zorn für die Existenz maximaler Ideale gar nicht anzuwenden. Ausgehend von $I = I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ kommt man nach endlich vielen Schritten bei einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ an.

2.35 Satz. *Seien R, S Ringe und sei $\phi : R \to S$ Epimorphismus. Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von S, so ist $\phi^{-1}(\mathfrak{m})$ ein maximales Ideal von R.*

Beweis. Wir bekommen durch ϕ einen Isomorphismus $R/\phi^{-1}(\mathfrak{m}) \to S/\mathfrak{m}$. Da $R/\phi^{-1}(\mathfrak{m})$ mit $S/\mathfrak{m}$ einfach ist, muß $\phi^{-1}(\mathfrak{m})$ maximal sein. □

2.36 Beispiel. Die Aussage gilt im allgemeinen nicht, wenn ϕ nur Homomorphimus ist. Betrachte $R = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Q}$ und ϕ der Inklusionshomomorphismus. Wähle $\mathfrak{m} = \{0\}$. Dann ist $\mathfrak{m}$ maximales Ideal von $\mathbb{Q}$, aber $\phi^{-1}(\mathfrak{m}) = \{0\}$ ist kein maximales Ideal von $\mathbb{Z}$.

2.7 Integritätsringe und Primideale

2.37 Definition. Sei R ein kommutativer Ring.

Ein Ideal $\mathfrak{p}$ von R heißt Primideal, wenn $\mathfrak{p} \neq R$ ist und für alle $a, b \in R$ aus $ab \in \mathfrak{p}$ bereits $a \in \mathfrak{p}$ oder $b \in \mathfrak{p}$ folgt.

Gilt $R \neq 0$ und ist R nullteilerfrei, so heißt R Integritätsring.

2.38 Satz. *Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{p}$ ein Ideal von R mit $\mathfrak{p} \neq R$. Dann sind äquivalent:*

1. *$\mathfrak{p}$ ist Primideal,*
2. *Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Ideale von R, so folgt aus $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{p}$ bereits $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$.*
3. *$R \backslash \mathfrak{p}$ mit der Multiplikation aus R ist eine Halbgruppe,*
4. *$R/\mathfrak{p}$ ist Integritätsring,*
5. *$\mathfrak{p}$ ist Kern eines Homomorphismus $\phi : R \to S$, wobei S ein Integritätsring ist.*

Beweis. $1 \Rightarrow 2$. Ist Aussage 2 falsch, so gibt es Elemente $a \in \mathfrak{a}\backslash\mathfrak{p}$ und $b \in \mathfrak{b}\backslash\mathfrak{p}$ mit $ab \in \mathfrak{p}$, was im Widerspruch zur Voraussetzung 1 steht.

$2 \Rightarrow 1$. Seien $a, b \in R$ mit $ab \in \mathfrak{p}$. Für $\mathfrak{a} = (a)$, $\mathfrak{b} = (b)$ gilt $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{p}$, wegen $\mathfrak{a} = Ra + \mathbb{Z}a$, $\mathfrak{b} = Ra + \mathbb{Z}b$ und folglich $\mathfrak{ab} = Rab + \mathbb{Z}ab = (ab)$. Also ergibt sich $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, und daraus $a \in \mathfrak{p}$ oder $b \in \mathfrak{p}$.

$1 \Rightarrow 3$. Seien $a, b \in R\backslash\mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ nach Annahme Primideal ist, muß $ab \notin \mathfrak{p}$ gelten, denn sonst wäre $a \in \mathfrak{p}$ oder $b \in \mathfrak{p}$.

$3 \Rightarrow 4$. $R/\mathfrak{p}$ ist genau dann nullteilerfrei, wenn Bedingung 3 gilt.

$4 \Rightarrow 5$. Wähle $S = R/\mathfrak{p}$ und den Restklassenepimorphismus. Nach Voraussetzung $\mathfrak{p} \neq R$ ist $S \neq 0$ und daher ein Integritätsring.

$5 \Rightarrow 1$. Seien $a, b \in R$ und $ab \in \mathfrak{p} = \ker(\phi)$. Dann gilt $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = 0$. Da S nullteilerfrei ist, folgt $\phi(a) = 0$ oder $\phi(b) = 0$, also $a \in \mathfrak{p}$ oder $b \in \mathfrak{p}$. Wegen $\mathfrak{p} \neq R$ nach Voraussetzung ist $\mathfrak{p}$ Primideal. □

2.39 Beispiel. Die Primideale von $\mathbb{Z}$ sind genau die Ideale $p\mathbb{Z}$, wo p eine Primzahl ist.

2.40 Beispiel. Sei R kommutativ mit $R \neq 0$. Das Ideal $\{0\}$ ist genau dann Primideal, wenn R nullteilerfrei ist. Der Nullring $R = 0$ besitzt kein Primideal.

2.41 Satz. *Sei R kommutativ mit 1.*

1. *Jedes maximale Ideal von R ist ein Primideal von R.*

2. *Zu jedem Ideal I von R mit $I \neq R$ gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}$ von R mit $I \subseteq \mathfrak{p}$.*

Beweis. Zu 1. Sei $\mathfrak{m}$ maximales Ideal von R. Dann gilt $1 \neq 0$ und $R/\mathfrak{m}$ ist ein Körper. Da Körper auch Integritätsringe sind, ist $\mathfrak{m}$ ein Primideal.

Zu 2. Wegen $I \neq R$ gilt $1 \neq 0$. Wähle $\mathfrak{p}$ als ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ mit $I \subseteq \mathfrak{m}$, welches nach Satz 2.34 existiert. □

2.42 Satz. *Seien R, S kommutative Ringe und sei $\phi : R \to S$ ein Homomorphismus mit $(\phi(R)) = S$. Ist dann $\mathfrak{p}$ ein Primideal von S, so ist $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ ein Primideal von R.*

Beweis. Wir bekommen durch ϕ einen Monomorphismus $R/\phi^{-1}(\mathfrak{p}) \to S/\mathfrak{p}$. Der Ring $R/\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ ist mit $S/\mathfrak{p}$ nullteilerfrei. Ferner gilt $(\phi(\phi^{-1}(\mathfrak{p}))) = \mathfrak{p}$ und daher nach Annahme $\phi^{-1}(\mathfrak{p}) \neq R$. □

Die Bedingung $(\phi(R)) = S$ ist beispielsweise erfüllt, wenn R und S kommutative Ringe mit Einselement sind und $\phi(1) = 1$ gilt.

2.43 Beispiel. Die Aussage gilt nicht, wenn die Voraussetzung $(\phi(R)) = S$ nicht gemacht wird. Zum Beispiel sei $R = \mathfrak{p}$ Primideal von S und ϕ die Inklusionsabbildung. Dann ist $R = \phi^{-1}(\pi)$ kein Primideal. Speziell kann $\mathfrak{p}$ selbst auch ein Einselement besitzen: Man wähle zum Beispiel $R = \mathbb{Q}$, $S = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ und ϕ die Einbettung von $\mathbb{Q}$ in die erste Koordinate von $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Das Ideal $\mathbb{Q} \times \{0\}$ ist ein Primideal (sogar maximales Ideal) von $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, aber $\phi^{-1}(\mathbb{Q} \times \{0\}) = \mathbb{Q}$ ist kein Primideal von $\mathbb{Q}$.

Homomorphe Bilder von Primidealen sind im allgemeinen keine Primideale mehr.

2.8 Teilbarkeit in Ringen

Die gewohnte Teilbarkeitslehre von $\mathbb{Z}$ kann verallgemeinert werden. Man setzt üblicherweise voraus, daß die zu betrachtenden Ringe kommutativ mit $1 \neq 0$ sind und keine Nullteiler besitzen.

2.44 Definition. Sei R ein Integritätsring mit 1 und $a, b \in R$.

Das Element a heißt Teiler von b, wenn es $c \in R$ mit $b = ca$ gibt. Entsprechend sagt man, daß a das Element b teilt, oder daß b ein Vielfaches von a ist, in Zeichen $a \mid b$.

Das Element a heißt assoziiert zu b, wenn $c \in R$ mit $b = ca$ eine Einheit von R ist, wenn also äquivalenterweise $a \mid b$ und $b \mid a$ gilt.

Ein Element $c \in R$ heißt größter gemeinsamer Teiler von a und b, wenn für alle $d \in R$ aus $d \mid a$ und $d \mid b$ bereits $d \mid c$ folgt. Wir schreiben $c = \gcd(a, b)$, obwohl c nur bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig bestimmt ist. Die Elemente a, b heißen teilerfremd, wenn $\gcd(a, b)$ eine Einheit von R ist.

Ein Element $c \in R$ heißt kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b, wenn für alle $d \in R$ aus $a \mid d$ und $b \mid d$ bereits $c \mid d$ folgt. Wir schreiben $d = \operatorname{lcm}(a, b)$, obwohl c nur bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig bestimmt ist.

Ein Element $p \in R \backslash R^\times$ mit $p \neq 0$ heißt Primelement von R, wenn aus $p \mid (ab)$ für alle $a, b \in R$ bereits $p \mid a$ oder $p \mid b$ folgt.

Ein Element $q \in R \backslash R^\times$ mit $q \neq 0$ heißt irreduzibel, wenn aus $q = ab$ für alle $a, b \in R$ bereits $a \in R^\times$ oder $b \in R^\times$ folgt.

2.45 Beispiel. Die Definition stimmt mit den bekannten Definitionen für $\mathbb{Z}$ überein. Primelemente und irreduzible Elemente in $\mathbb{Z}$ stimmen überein.

2.46 Beispiel. Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ als Teilring von $\mathbb{R}$. Wegen $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1$ ist $\varepsilon = 1 + \sqrt{2}$ eine Einheit in R. Da ε^k für $k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{R}$ definiert, gilt $\# R^\times = \infty$.

Man kann zeigen, daß in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ die Menge der Primelemente mit der Menge der irreduziblen Elemente übereinstimmt.

2.47 Beispiel. Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ als Teilring von $\mathbb{C}$. Man kann zeigen, daß hier $R^\times = \{-1, 1\}$ gilt und beispielsweise $21 = 3 \cdot 7 = (4+\sqrt{-5})(4-\sqrt{-5}) = (1+2\sqrt{-5})(1-2\sqrt{-5})$ eine Zerlegung von 21 in irreduzible, aber nicht prime Elemente ist.

2.48 Lemma. *Sei R ein Integritätsring mit 1.*

1. $1 \mid a$, $a \mid 0$ *und* $a \mid a$ *für alle* $a \in R$.
2. $a \mid 1$ *genau dann, wenn* $a \in R^\times$.
3. $a \mid b$ *für alle* $a \in R^\times$ *und* $b \in R$.
4. *Für* $a \mid b$ *gilt auch* $ax \mid bx$ *für alle* $x \in R$.
5. *Für* $a \mid x_i$ *gilt* $a \mid \sum_i r_i x_i$ *für alle* $r_i, x_i \in R$.
6. *Aus* $a \mid b$ *und* $b \mid c$ *folgt* $a \mid c$ *für alle* $a, b, c \in R$.
7. $a \mid b$ *genau dann, wenn* $Ra \supseteq Rb$ *für alle* $a, b \in R$.

Beweis. Einfach und wird ausgelassen. $\square$

2.49 Satz. *Sei R Integritätsring mit 1 und $a \in R \backslash R^\times$, $a \neq 0$. Dann gilt:*

1. *Das Element a ist genau dann Primelement von R, wenn Ra Primideal von R ist.*

2. *Das Element a ist genau dann irreduzibel, wenn Ra maximal in der Menge der von R verschiedenen Hauptideale ist.*

3. *Jedes Primelement ist irreduzibel.*

4. *Je zwei irreduzible Elemente sind entweder assoziiert oder teilerfremd.*

Beweis. Zu 1. Ergibt sich aus $Ra \cdot Rb = Rab$ und Lemma 2.48, Punkt 7.

Zu 2. Die Äquivalenz der negierten Aussagen ergibt sich wie bei 1.

Zu 3. Sei $p \in R$ Primelement und $p = ab$ mit $a, b \in R$. Wegen $p \mid ab$ folgt $p \mid a$ oder $p \mid b$. Gilt beispielsweise $a = cp$ mit $c \in R$, so folgt $p = ab = cpb$, und daraus $1 = cb$ durch Kürzen von p ($p \neq 0$ und R nullteilerfrei), also $b \in R^\times$. Analog für $b = cp$, und p ist also irreduzibel.

Zu 4. Seien $a, b \in R$ irreduzibel und sei $c = \gcd(a, b)$. Dann gibt es $e, d \in R$ mit $a = dc$ und $b = ec$. Da a irreduzibel ist, folgt $c \in R^\times$ oder $d \in R^\times$. Im ersten Fall sind a, b teilerfremd. Im zweiten Fall gilt $b = ed^{-1}a$ und wegen $a \notin R^\times$ ergibt sich $ed^{-1} \in R^\times$, da b irreduzibel ist. Folglich sind a und b assoziiert. □

2.50 Definition. Ein Integritätsring R mit 1 heißt Hauptidealring, wenn jedes Ideal von R Hauptideal ist.

2.51 Beispiel. Der Ring $\mathbb{Z}$ ist Hauptidealring. Körper sind Hauptidealringe.

2.52 Satz. *Sei R ein Hauptidealring. Dann gilt:*

1. *R ist noethersch.*

2. *Sind $a_i \in R$ und $c \in R$ mit $Rc = \sum_i Ra_i$, so gilt $c = \gcd(a_1, \ldots, a_n)$.*

3. *Sind $a_i \in R$ und $c \in R$ mit $Rc = \cap_i Ra_i$, so gilt $c = \operatorname{lcm}(a_1, \ldots, a_n)$.*

4. *Sind $a_i \in R$, so gibt es $\lambda_i \in R$ mit $\gcd(a_1, \ldots, a_n) = \sum \lambda_i a_i$.*

5. *Ein Element $a \in R$ ist genau dann irreduzibel, wenn a ein Primelemement von R ist.*

6. *Jedes $a \in R$, $a \neq 0$ läßt sich als Produkt von Primelementen schreiben.*

Beweis. Zu 1. Klar, da jedes Ideal nur einen Erzeuger benötigt.

Zu 2. Wegen $a_i \in Rc$ gilt $c \mid a_i$ für alle i. Sei $d \in R$ mit $d \mid a_i$ für alle i. Dann folgt $Rd \supseteq \sum_i Ra_i = Rc$, also $d \mid c$.

Zu 3. Es gilt $c \in Ra_i$, also $a_i \,|\, c$ für alle i. Sei $d \in R$ mit $a_i \,|\, d$ für alle i. Dann gilt $Rd \subseteq \cap_i Ra_i = Rc$, also $c \,|\, d$.

Zu 4. Folgt aus 2, da $c \in \sum_i Ra_i$.

Zu 5. Sei $a \in R \backslash R^\times$, $a \neq 0$ irreduzibel. Dann ist $Ra \neq R$ und maximal in der Menge der Hauptideale. Da jedes Ideal Hauptideal ist, ist Ra also maximales Ideal von R, und somit Primideal.

Zu 6. Sei $a \in R$, $a \neq 0$. Ist $a \in R^\times$, so wählen wir als Faktorisierung in Primelemente das leere Produkt. Ist andernfalls a nicht irreduzibel, so gibt es $a_{1,1}, a_{1,2} \in R \backslash R^\times$ mit $a = a_{1,1}a_{1,2}$, also $Ra \subseteq Ra_{1,1}$ und $Ra \subseteq Ra_{1,2}$. Wiederholen wir eine solche Zerlegung induktiv mit $a_{1,1}$ und $a_{1,2}$, so bekommen wir aufsteigende Folgen von Hauptidealen $Ra \subseteq Ra_{1,i_1} \subseteq \cdots \subseteq Ra_{j,i_j} \subseteq \ldots$. Da R noethersch ist, werden diese stationär und die zugehörigen Idealerzeuger somit irreduzibel. Da irreduzible Elemente auch Primelemente sind, folgt die Aussage. □

Aussage 4 des Satzes nennt man auch Satz von Bézout.

2.53 Definition. Ein Integritätsring R mit 1 heißt faktorieller Ring (oder ZPE Ring), wenn sich jedes $a \in R$, $a \neq 0$ bis auf Einheiten eindeutig als Produkt von irreduziblen Elementen schreiben läßt.

2.54 Beispiel. Der Ring $\mathbb{Z}$ ist ein faktorieller Ring. Es gilt zum Beispiel $-6 = 2 \cdot (-3) = (-1) \cdot 2 \cdot 3$ mit den irreduziblen Elementen $2, -3, 3$ und der Einheit -1.

2.55 Satz. *Sei R ein Integritätsring mit 1. Dann sind äquivalent:*

1. *R ist faktorieller Ring.*
2. *Jedes $a \in R$, $a \neq 0$ ist Produkt irreduzibler Elemente, und jedes irreduzible Element ist Primelement.*
3. *Jedes $a \in R$, $a \neq 0$ ist Produkt von Primelementen.*

Beweis. $1 \Rightarrow 2$. Sei q irreduzibel und $a, b \in R$ mit $q \,|\, (ab)$, also $ab = cq$ für ein $c \in R$. Das Element q kommt daher wegen der Eindeutigkeit in der Faktorisierung von ab in irreduzible Elemente vor. Diese setzt sich wegen der Eindeutigkeit aus der Faktorisierung von a und von b in irreduzible Elemente zusammen. Also kommt q in einer dieser Faktorisierungen vor, daher $q \,|\, a$ oder $q \,|\, b$.

$2 \Rightarrow 3$. Klar.

$3 \Rightarrow 2$. Ist q irreduzibel, so besteht die Faktorisierung von q in Primelemente aus nur einem Element, nämlich q selbst.

$2 \Rightarrow 1$. Seien $\varepsilon q_1 \cdots q_r = \varepsilon' q_1' \cdots q_s'$ zwei Faktorisierungen in Primelemente q_i, q_j' und Einheiten $\varepsilon, \varepsilon'$ mit $r \leq s$. Für $r = 0$ muß auch $s = 0$ gelten, da Primelemente keine Einheiten sind. Für $r \geq 1$ gilt $q_s' \,|\, q_i$ für ein i. Da q_i irreduzibel ist, ist q_s'

assoziiert zu q_i. Vertauschen von q_i und q_r und Kürzen von q'_s liefert $\varepsilon q_1 \dots q_{r-1} = \varepsilon'' q'_1 \cdots q'_{s-1}$ mit $\varepsilon'' \in R^\times$. Per Induktion folgt die Eindeutigkeitsaussage. $\square$

Sei $P \subseteq R$ ein Vetretersystem der Äquivalenzklassen der Primelemente von R unter Assoziation. Für $a \in R$, $a \neq 0$ und $p \in R$ bezeichnen wir mit $v_p(a)$ die Vielfachheit, mit der p in der Faktorisierung von a in Primelemente aus P vorkommt. Es gilt also

$$a = \varepsilon \prod_{p \in P} p^{v_p(a)},$$

wobei fast alle $v_p(a)$ gleich Null sind.

2.56 Korollar. *Sei R ein Integritätsring mit 1 und $a_1, \dots, a_n \in R$.*

1. *Es gilt* $\gcd(a_1, \dots, a_n) = \prod_{p \in P} p^{\min\{v_p(a_i) \,|\, 1 \leq i \leq n\}}$.
2. *Es gilt* $\operatorname{lcm}(a_1, \dots, a_n) = \prod_{p \in P} p^{\max\{v_p(a_i) \,|\, 1 \leq i \leq n\}}$.
3. *Für $a, b \in R$, $a, b \neq 0$ ist ab assoziiert zu* $\gcd(a, b)\operatorname{lcm}(a, b)$.

Beweis. Klar. $\square$

2.57 Definition. Ein Integritätsring R heißt euklidischer Ring, wenn es eine Abbildung $d : R\backslash\{0\} \to \mathbb{Z}^{\geq 0}$ mit der folgenden Eigenschaft gibt: Zu $a, b \in R$, $b \neq 0$ gibt es $h, r \in R$ mit $a = hb + r$ und $r = 0$ oder $d(r) < d(b)$.

Die in der Definition verlangte Abbildung d heißt Gradfunktion. Die Zerlegung $a = hb + r$ mit $r = 0$ oder $d(r) < d(b)$ heißt Division mit Rest r.

2.58 Satz. *Jeder euklidische Ring ist ein Hauptidealring.*

Beweis. Sei I ein Ideal von R und $a \in I$, $a \neq 0$ ein Element mit $d(a) = \min\{d(b) \,|\, b \in I\backslash\{0\}\}$. Sei $b \in I$. Division mit Rest liefert $b = ha + r$, also $r = b - ha \in I$. Nach Wahl von a ist $d(r) < d(a)$ nicht möglich, also gilt $r = 0$. Es folgt $I = Ra$.

Für $I = R$ folgt speziell $R = Rc$ mit einem $c \in R$. Es gibt $e \in R$ mit $c = ec$, und zu jedem $x \in R$ gibt es $y \in R$ mit $x = yc$. Nun ist $xe = (yc)e = y(ce) = yc = x$, also ist e Einselement.

Damit ist R ein Integritätsring mit 1, in dem jedes Ideal Haupideal ist. $\square$

2.59 Beispiel. Der Ring $\mathbb{Z}$ wird mit $x \mapsto |x|$ als Gradfunktion zum euklidischen Ring.

In euklidischen Ringen können größte gemeinsame Teiler mit dem euklidischen Algorithmus berechnet werden. Genauer liefert der euklidische Algorithmus angewendet auf $a, b \in R$ Elemente $\lambda, \mu \in R$ mit $\gcd(a, b) = \lambda a + \mu b$.

2.9 Lokale Ringe und Lokalisierung

2.60 Definition. Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Wenn R genau ein maximales Ideal besitzt, dann heißt R lokaler Ring.

2.61 Satz. *Ein kommutativer Ring R mit Einselement ist genau dann lokal, wenn $R \backslash R^\times$ ein Ideal von R ist.*

Für einen lokalen Ring R ist $R \backslash R^\times$ das maximale Ideal von R.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Bezeichne $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von R und sei $x \in R \backslash R^\times$. Dann gilt $R \neq Rx$, da x keine Einheit ist. Da es ein maximales Ideal von R gibt, welches Rx enthält, folgt $Rx \subseteq \mathfrak{m}$, also $x \in \mathfrak{m}$ und $R \backslash R^\times \subseteq \mathfrak{m}$. Da $\mathfrak{m}$ keine Einheiten enthalten kann, gilt sogar $R \backslash R^\times = \mathfrak{m}$.

„$\Leftarrow$“: Ist $\mathfrak{m} = R \backslash R^\times$ ein Ideal, so ist es aus dem eben genannten Grund maximal und enthält auch jedes weitere Ideal $\neq R$ von R. Daher besitzt R nur dieses eine maximale Ideal $\mathfrak{m}$. □

Sei $R \neq 0$ kommutativ und U eine nicht-leere, multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R. Wir wollen eine „Bruchrechnung“ mit Elementen aus R im Zähler und Elementen aus U im Nenner definieren. Dazu führen wir auf der Menge $R \times U$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ ein. Für $(r_1, u_1), (r_2, u_2) \in R \times U$ gelte $(r_1, u_1) \sim (r_2, u_2)$ genau dann, wenn es ein $t \in U$ mit $t(r_1u_2 - r_2u_1) = 0$ gibt.

2.62 Lemma. *Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Reflexivität und Symmetrie sind unmittelbar einsichtig. Für die Transitivität muß etwas gerechnet werden. Es gelte $(r_1, u_1) \sim (r_2, u_2)$ und $(r_2, u_2) \sim (r_3, u_3)$. Wir können also schreiben

$$t(r_1u_2 - r_2u_1) = 0,$$
$$s(r_2u_3 - r_3u_2) = 0$$

mit $t, s \in U$. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit su_3 und die zweite mit tu_1 und erhalten

$$st(r_1u_2u_3 - r_2u_1u_3) = 0$$
$$st(r_2u_1u_3 - r_3u_1u_2) = 0.$$

Addition dieser Gleichungen und Ausklammern von u_2 liefert

$$stu_2(r_1u_3 - r_3u_1) = 0$$

mit $stu_2 \in U$. □

Die Verwendung von t in der Definition von $\sim$ ist deswegen erforderlich, da wir aus $u_2(r_1u_3 - r_3u_1) = 0$ zum Schluß nicht ohne weiteres auf $r_1u_3 - r_3u_1 = 0$ schließen können. Enthält U keine Nullteiler von R, so wäre dies möglich.

Um die Äquivalenzklassen $R \times U/\sim = \{\, [(u,r)] \mid (u,r) \in R \times U \,\}$ zu einem Ring zu machen, definieren wir Addition und Multiplikation vertreterweise wie in der Bruchrechnung.

$$
\begin{aligned}
[(r_1,u_1)] + [(r_2,u_2)] &:= [(r_1u_2 + r_2u_1, u_1u_2)] \\
[(r_1,u_1)] \cdot [(r_2,u_2)] &:= [(r_1r_2, u_1u_2)],
\end{aligned}
$$

für alle $(r_1,u_1),(r_2,u_2) \in R \times U$.

2.63 Definition. Wir bezeichen $R[U^{-1}] := (R \times U/\sim, +, \cdot)$ als die Lokalisierung von R bezüglich U.

2.64 Satz. *Sei R ein kommutativer Ring und U eine nicht-leere, multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R. Dann ist $R[U^{-1}]$ ein kommutativer Ring mit Einselement.*

Beweis. Zur Wohldefiniertheit der oben definierten Operationen. Sei $(r_1', u_1') \in R \times U$ mit $[(r_1,u_1)] = [(r_1',u_1')]$, also $tr_1u_1' = tr_1'u_1$ für ein $t \in U$. Es genügt zu zeigen, daß $[(r_1'u_2 + r_2u_1', u_1'u_2)] = [(r_1u_2 + r_2u_1, u_1u_2)]$ und $[(r_1'r_2, u_1'u_2)] = [[(r_1r_2, u_1u_2)]$ gilt. Dann sind die Definitionen unabhängig von der Wahl der Vertreter auf der linken Seite, per Symmetrie dann auch auf der rechten Seite, und zusammen dann auf der linken und rechten Seite simultan. Für die Addition ergibt sich

$$
\begin{aligned}
t(r_1u_2 + r_2u_1)(u_1'u_2) &= tr_1u_2u_1'u_2 + tr_2u_1u_1'u_2 \\
&= tr_1'u_2u_1u_2 + tr_2u_1u_1'u_2 \\
&= t(r_1'u_2 + r_2u_1')(u_1u_2)
\end{aligned}
$$

und für die Multiplikation ergibt sich

$$
tr_1'r_2u_1u_2 = tr_1r_2u_1'u_2.
$$

Dies sind genau die Bedingungen für die Klassengleichheit und somit ist die Wohldefiniertheit bewiesen.

Die Assoziativität von $+$ und $\cdot$ läßt sich direkt für die Vertreter (r,u) verifizieren. Die Distributivität von $+$ und $\cdot$ folgt ähnlich wie die Wohldefiniertheit.

Es gilt offenbar $[(r_1u, u_1u)] = [(r_1,u_1)]$ für alle $(r_1,u_1) \in R \times U$ und $u \in U$. Das Nullelement von $R[U^{-1}]$ ist $[(0,u)]$ für beliebiges $u \in U$, denn $[(0,u)] + [(r_1,u_1)] = [(r_1u, u_1u)] = [(r_1,u_1)]$. Das Einselement von $R[U^{-1}]$ ist $[(u,u)]$ für beliebiges $u \in U$, denn $[(u,u)] \cdot [(r_1,u_1)] = [(r_1u, u_1u)] = [(r_1,u_1)]$. $\square$

2.65 Definition. Wir verwenden die Bruchschreibweise r/u für $[(r,u)]$. Wir definieren eine äußere Verknüpfung $R \times R[U^{-1}] \to R[U^{-1}]$ durch $r \cdot (r_1/u_1) := (rr_1)/u_1$.

2.66 Satz. *Die Abbildung* $\iota_U : R \to R[U^{-1}]$, $r \mapsto r \cdot 1_{R[U^{-1}]}$ *ist ein Homomorphismus mit den folgenden Eigenschaften.*

1. $\ker(\iota_U) = \{r \in R \,|\, ur = 0 \text{ für ein } u \in U\}$.
2. $\iota_U(U) \subseteq R[U^{-1}]^\times$.
3. $\iota_U(R)R[U^{-1}] = R[U^{-1}]$.
4. *Besitzt* R *das Einselement* 1, *so gilt* $\iota_U(1) = 1_{R[U^{-1}]}$.

Beweis. Zu 1. In $R[U^{-1}]$ gilt $(ru')/u' = 0$ für $u' \in U$ per Definition genau dann, wenn es $u \in U$ mit $ur = 0$ gibt.

Zu 2. Die Elemente u_1/u_2 für $u_1, u_2 \in U$ sind offenbar Einheiten in $R[U^{-1}]$.

Zu 3. Für jedes $u', u'' \in U$ gilt $r/u = ((ru')/u')/((uu'')/u'')$.

Zu 4. Es gilt $\iota_U(1) = (1u')/u' = u'/u' = 1_{R[U^{-1}]}$ für jedes $u' \in R$. □

Aus Aussage 1 oder 2 folgt, daß $R[U^{-1}] = \{0\}$ für $0 \in U$ gilt. In einem Integritätsring R gilt $\ker(\iota_U) = 0$ falls $0 \notin U$, und $\iota_U : R \to R[U^{-1}]$ ist ein Monomorphismus.

2.67 Satz (Universelle Eigenschaft)**.** *Sei* R *kommutativer Ring und* S *kommutativer Ring mit* 1. *Sei* U *eine nicht-leere, multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von* R. *Dann sind äquivalent.*

1. *Es gibt einen Homomorphismus* $\iota : R \to S$ *mit* $\iota(U) \subseteq S^\times$, *so daß es für jeden weiteren kommutativen Ring* T *mit* 1 *und jeden Homomorphismus* $\phi : R \to T$ *mit* $\phi(U) \subseteq T^\times$ *genau einen Homomorphismus* $\psi : S \to T$ *mit* $\psi \circ \iota = \phi$ *gibt.*
2. $S \cong R[U^{-1}]$.

Beweis. „2 $\Rightarrow$ 1“: Es genügt, die Aussage 1 für $\iota_U : R \to R[U^{-1}]$ zu zeigen. Zunächst gilt wie erforderlich $\iota_U(U) \subseteq R[U^{-1}]^\times$. Sei $\phi : R \to T$ mit $\phi(U) \subseteq T^\times$. Wir definieren $\psi : R[U^{-1}] \to T$ durch $r/u \mapsto \phi(r)\phi(u)^{-1}$. Aufgrund der Homomorphieeigenschaft von ϕ ist ψ zunächst wohldefiniert: Für $r/u = r'/u'$ gibt es $t \in U$ mit $tru' = tr'u$. Daraus folgt $\phi(t)\phi(r)\phi(u') = \phi(t)\phi(r')\phi(u)$ und wegen $\phi(t) \in S^\times$ bereits $\phi(r)\phi(u') = \phi(r')\phi(u)$. Da $\phi(u), \phi(u') \in S^\times$ ergibt sich $\phi(r)\phi(u)^{-1} = \phi(r')\phi(u')^{-1}$. Multiplikativität und Additivität folgen direkt aus den Rechenregeln in $R[U^{-1}]$. Wegen $\psi(\iota_U(r)) = \psi((ru)/u) = \phi(ru)\phi(u)^{-1} = \phi(r)$ für $u \in U$ ist ψ ein Homomorphismus mit $\psi \circ \iota_U = \phi$.

Sei ψ' ein anderer Homomorphismus mit $\psi' \circ \iota_U = \phi$, und sei $r/u \in R[U^{-1}]$ beliebig. Dann gilt $r/u = \iota_U(r)\iota_U(u)^{-1}$, und damit $\psi'(r/u) = \psi'(\iota_U(r))\psi'(\iota_U(u))^{-1} = \phi(r)\phi(u)^{-1}$. Daher gilt $\psi' = \psi$ und ψ ist eindeutig bestimmt.

„$1 \Rightarrow 2$“: Nach „$2 \Rightarrow 1$“ erfüllt $\iota_U : R \to R[U^{-1}]$ ebenfalls die Bedingung 1. Damit erhalten wir zu $\phi = \iota_U$ einen Homomorphismus $\psi_1 : S \to R[U^{-1}]$ mit $\psi_1 \circ \iota = \iota_U$. Analog erhalten wir zu $\phi = \iota$ einen Homomorphismus $\psi_2 : R[U^{-1}] \to S$ mit $\psi_2 \circ \iota_U = \iota$. Es ergibt sich $(\psi_1 \circ \psi_2) \circ \iota_U = \iota_U$ und $(\psi_2 \circ \psi_1) \circ \iota = \iota$. Die Eindeutigkeitsforderung in Bedingung 1 liefert nun $\psi_1 \circ \psi_2 = \mathrm{id}$ und $\psi_2 \circ \psi_1 = \mathrm{id}$. □

Wir bemerken, daß der Homomorphismus $\psi : S \to T$ die Gleichung $\psi(1_S) = 1_T$ erfüllt.

Man kann die Bedingung 1 also als alternative Definition der Lokalisierung nehmen. Dann heißt S zusammen mit R, U und ι Lokalisierung von R bezüglich U. Aus der universellen Eigenschaft folgt wie im Beweis leicht, daß S bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Für die Existenz ist aber noch das Konstruktionsverfahren anzugeben.

2.68 Satz. *Sei R kommutativer Ring.*

1. *Ist $U \subseteq R^\times$ eine nicht-leere, multiplikativ abgeschlossene Teilmenge, so gilt $R[U^{-1}] \cong R$.*

2. *Sind $U \subseteq V \subseteq R$ nicht-leere, multiplikativ abgeschlossene Teilmengen, so gilt $R[V^{-1}] \cong R[U^{-1}][\iota_U(V)^{-1}]$.*

3. *Ist $U \subseteq R$ eine nicht-leere, multiplikativ abgeschlossene Teilmenge, so gilt $R[U^{-1}] \cong \iota_U(R)[\iota_U(U)^{-1}]$.*

Beweis. Aufgabe. □

Ist R ein kommutativer Ring mit Eins und ist $1 \notin U$, aber $1 \in V$, so gilt wegen $\iota_U(1) = 1$ nach Aussage 1 trotzdem $R[U^{-1}] = R[V^{-1}]$. Daher setzt man im Fall, daß R ein Einselement hat, üblicherweise $1 \in U$ voraus.

Man wendet Lokalisierung an, wenn man einen Ring „vereinfachen“ möchte. Die guten Eigenschaften von R übertragen sich auf $R[U^{-1}]$, und weitere können hinzukommen.

Wir vergleichen die Idealtheorie in R und $R[U^{-1}]$ für einen kommutativen Ring R und eine nicht-leere, multiplikativ abgeschlossene Teilmenge U von R. Die Idealtheorie in $R[U^{-1}]$ stellt sich dabei als Vereinfachung der Idealtheorie in

R heraus. Seien $\mathcal{I}(R)$ und $\mathcal{I}(R[U^{-1}])$ die Mengen der Ideale von R beziehungsweise $R[U^{-1}]$. Wir betrachten die üblichen Abbildungen

$$\begin{aligned}
&i : \mathcal{I}(R) \to \mathcal{I}(R[U^{-1}]),\ I \mapsto \iota_U(I)R[U^{-1}],\\
&j : \mathcal{I}(R[U^{-1}]) \to \mathcal{I}(R),\ J \mapsto \iota_U^{-1}(J).
\end{aligned}$$

Sei I ein Ideal von R und $\pi_I : R \to R/I$ der kanonische Epimorphismus. Sei $\bar{I} = \{r \in R \mid \exists\, u \in U \text{ mit } ur \in I\}$. Man prüft leicht nach, daß $\bar{I}$ ein Ideal von R mit $\bar{I} \supseteq I$ ist und daß $\bar{\bar{I}} = \bar{I}$ gilt. Wir nennen $\bar{I}$ den Abschluß von I bezüglich U. Gilt $\bar{I} = I$, so nennen wir I bezüglich U abgeschlossen. Sei $\mathcal{I}_U$ die Menge der abgeschlossenen Ideale von R.

2.69 Satz. *Mit den eingeführten Bezeichnungen gelten*

1. *$i(j(J)) = J$ und $j(i(I)) = \bar{I}$ für alle $J \in \mathcal{I}(R[U^{-1}])$ und alle $I \in \mathcal{I}(R)$.*

2. *Es gilt $\operatorname{im}(j) = \mathcal{I}_U$, so daß i und j zueinander inverse Bijektionen der Mengen $\mathcal{I}_U$ und $\mathcal{I}(R[U^{-1}])$ liefern.*

3. *Für $I \in \mathcal{I}(R)$ gilt $(R/I)[\pi_I(U)^{-1}] \cong R[U^{-1}]/i(I)$.*

4. *j erhält Inklusionen, Summen, Schnitte, Produkte und Radikale etc. Dasselbe gilt für i eingeschränkt auf $\mathcal{I}_U$.*

5. *Sei $I \in \mathcal{I}(R)$ ein Primideal (maximales Ideal). Dann ist $i(I)$ ein Primideal (maximales Ideal) für $I \cap U = \emptyset$ und $i(I) = R$ andernfalls. Sei $J \in \mathcal{I}(R[U^{-1}])$ ein Primideal. Dann ist $j(J)$ ein Primideal.*

Beweis. Zu 1. Für $J \in \mathcal{I}(R[U^{-1}])$ gilt allgemein $i(j(J)) = \iota_U(\iota_U^{-1}(J))R[U^{-1}] \subseteq J$. Für $r/u \in J$ ist aber auch $(ru')/u' \in J$ nach Muliplikation mit $(uu')/u' \in R[U^{-1}]^\times$ für beliebiges $u' \in U$, und damit $r \in \iota_U^{-1}((ru')/u')$. Daher $(ru')/u' \in \iota_U(\iota_U^{-1}(J))$ und $(ru')/(uu') = r/u \in \iota_U(\iota_U^{-1}(J))R[U^{-1}]$ nach Division mit $(uu')/u'$ wegen $(uu')/u' \in R[U^{-1}]^\times$. Wir haben damit $i(j(J)) = \iota_U(\iota_U^{-1}(J))R[U^{-1}] = J$ gezeigt.

Für $I \in \mathcal{I}(R)$ gilt $j(i(I)) = \iota_U^{-1}(\iota_U(I)R[U^{-1}]) = \{r \in R \mid \exists u \in U \text{ mit } ur \in I\} = \bar{I}$. Zum Beweis der zweiten Gleichung beachten wir zuerst $\iota_U(I)R[U^{-1}] = \{x/u'' \mid x \in I, u'' \in U\}$, wie man leicht sieht. Weiter gilt $r \in \iota_U^{-1}(\iota_U(I)R[U^{-1}])$ für $r \in R$ genau dann, wenn $\iota_U(r) = (ru')/u' \in \iota_U(I)R[U^{-1}] = \{x/u'' \mid x \in I, u'' \in U\}$ für ein beliebiges $u' \in U$ ist, wenn also $(ru')/u' = x/u''$ für ein $x \in I$ und $u', u'' \in U$ gilt. Dies ist aber äquivalent dazu, daß es $u \in U$ mit $ur \in I$ gibt.

Zu 2. Für $J \in \mathcal{I}(R[U^{-1}])$ gilt nach Aussage 1 nun $\overline{j(J)} = j(i(j(J))) = j(J)$, also $\operatorname{im}(j) = \mathcal{I}_U$. Daher sind i und j nach Aussage 1 zueinander inverse Bijektionen der Mengen $\mathcal{I}_U$ und $\mathcal{I}(R[U^{-1}])$.

Zu 3. Wir betrachten $S = (R/I)[\pi_I(U)^{-1}]$ und $\phi = \iota_{\pi_I(U)} \circ \pi_I : R \to S$. Wegen $\phi(U) \subseteq S^\times$ gibt es $\psi : R[U^{-1}] \to S$ nach Satz 2.67 mit $\psi(r/u) = (r+I)/(u+I)$. Dies zeigt, daß ψ surjektiv ist. Sei nun $r/u \in R[U^{-1}]$ mit $\psi(r/u) = 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn es $u' \in U$ mit $(u'+I)(r+I) = 0+I$ beziehungsweise mit $u'r \in I$ gibt. Also gilt $r \in \bar{I}$ und $r/u \in i(\bar{I}) = i(I)$ nach Aussage 1. Dies zeigt $\ker(\psi) = i(I)$.

Zu 4. Die Aussagen für j gelten allgemein, wenn ι_U nur irgendein Homomorphismus von Ringen ist. Wegen der Bijektivität von i und j auf $\mathcal{I}_U$ und $\mathcal{I}(R[U^{-1}])$ folgen die Aussagen hier auch analog für i. Zusatz zum Radikal: Es gilt zunächst $j(\mathrm{Rad}(J)) = \mathrm{Rad}(j(J))$ für alle $J \in \mathcal{I}(R[U^{-1}])$. Mit $I = j(J)$, $J = i(I)$ und durch Anwenden von i ergibt sich $\mathrm{Rad}(i(I)) = i(\mathrm{Rad}(I))$ für alle $I \in \mathcal{I}(R)$.

Zu 5. Muß noch ein wenig angepasst werden (Wegen Satz 2.66, Aussage 3 und Satz 2.42 ist $I = j(i(I))$ ein Primideal von R, wenn $i(I)$ ein Primideal von $R[U^{-1}]$ ist. Für I ein Primideal von R gilt $0 \notin \pi_I(U)$, da es sonst $u \in U$ mit $u \in I$ geben und dann $I = \bar{I} = R$ folgen würde. Nun ist $(R/I)[\pi_I(U)^{-1}]$ mit R/I wegen $0 \notin \pi_I(U)$ ein Integritätsring. Nach Aussage 3 ist also auch $R[U^{-1}]/i(I)$ ein Integritätsring und damit $i(I)$ ein Primideal.

Ist I maximal, so sind R/I und $(R/I)[\pi_I(U)^{-1}]$ nach Aussage 2 einfach. Wegen Aussage 3 ist $R[U^{-1}]/i(I)$ einfach und daher $i(I)$ maximal.) $\square$

Für $U \cap I = \emptyset$ ist I bezüglich U genau dann abgeschlossen, wenn $\pi_I(U)$ eine Menge von Nichtnullteilern in R/I ist. Bei der Berechnung von $\bar{I} = j(i(I))$ muß man also (zumindest im nullteilerfreien Fall) aus den Elementen von I alle Elemente von U herausdividieren, um das abgeschlossene Ideal zu erhalten.

Wenn die Definitionen etwas modifiziert werden, kann Aussage 3 auch in der hübschen Form $(R/I)[U^{-1}] \cong R[U^{-1}]/I[U^{-1}]$ geschrieben werden. Lokalisierung und Faktorisierung kommutieren also. Besitzt R ein Einselement und ist I maximal, so gilt $\pi_I(U) \subseteq (R/I)^\times$ und es ergibt sich $R/I \cong R[U^{-1}]/i(I)$.

Setzen wir $I = \overline{\{0\}} = \ker(\iota_U)$, so gilt $i(I) = \{0\}$. Dann ist $\iota_{\pi_I(U)} : R/I \to (R/I)[\pi_I(U)^{-1}]$ injektiv und es gilt $(R/I)[\pi_I(U)^{-1}] \cong R[U^{-1}]$. Wir können ι_U daher entsprechend in einen Epimorphimus und einen Monomorphismus faktorisieren.

2.70 Satz. *Sei R kommutativer Ring und U eine nicht-leere, multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R mit $0 \notin U$. Dann übertragen sich die Eigenschaften Ring mit Einselement, Integritätsring, einfach, noethersch, faktoriell, Hauptidealring und euklidisch auf $R[U^{-1}]$. Die Nullteiler von $R[U^{-1}]$ sind Bilder der Nullteiler von R.*

Beweis. Aufgabe, nachrechnen und die Abbildungen i und j verwenden. Die euklidische Gradfunktion δ_U auf $R[U^{-1}]$ wird $\delta_U(r/u) = \min\{\delta(x) \mid x \in \overline{(r)}\}$ (?). $\square$

2.71 Beispiel. Sei $R = \mathbb{Z}$, $R[U^{-1}] = \mathbb{Z}[1/2]$ und $I = n\mathbb{Z}[1/2]$ mit $n \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$. Wir zerlegen $n = 2^v n_1$ mit n_1 ungerade. Dann gilt $I = n_1\mathbb{Z}[1/2]$, da $1/2$ eine Einheit in $\mathbb{Z}[1/2]$ ist. Unter Verwendung von j für die Ideale von $\mathbb{Z}[1/2]$ und $\mathbb{Z}$ wie oben sieht man ebenfalls $j(n\mathbb{Z}[1/2]) = n_1\mathbb{Z}$ nach Aussage 1. Nach Aussage 2 und Aussage 3 ergibt sich dann beispielsweise $\mathbb{Z}[1/2]/n\mathbb{Z}[1/2] \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}$.

Zusammenfassend schließlich ein paar typische Situationen.

2.72 Definition. Sei R ein Integritätsring mit 1. Für ein Primideal $\mathfrak{p}$ ist $U = R\backslash\mathfrak{p}$ nicht-leer und multiplikativ abgeschlossen. Der Ring $R[U^{-1}]$ wird Lokalisierung von R an $\mathfrak{p}$ genannt und mit $R_\mathfrak{p}$ bezeichnet.

2.73 Satz. *Sei R ein Integritätsring mit 1.*

1. *Für das Primideal $\mathfrak{p}$ von R ist $R_\mathfrak{p}$ lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$.*

2. *Für das Nullprimideal $\mathfrak{p} = \{0\}$ von R ist $R_\mathfrak{p}$ ein Körper.*

Beweis. Zu 1. Sei $x/y \in R_\mathfrak{p}\backslash\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. Dann gilt $x \in R\backslash\mathfrak{p}$ und somit $y/x \in R_\mathfrak{p}$ nach Definition von $R_\mathfrak{p}$. Folglich $x/y \in R_\mathfrak{p}^\times$, so daß nach Satz 2.61 der Ring $R_\mathfrak{p}$ lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ ist.

Zu 2. Der Ring $R_\mathfrak{p}$ ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\{0\}$. Also gilt $R_\mathfrak{p}^\times = R_\mathfrak{p}\backslash\{0\}$ und $R_\mathfrak{p}$ ist damit nach Satz 2.61 ein Körper. □

Allgemein ist das Ideal $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ nur ein Primideal in $R_\mathfrak{p}$.

2.74 Definition. Sei R ein Integritätsring mit 1. Der Körper $R_{\{0\}}$ wird Quotientenkörper von R genannt und mit $\mathrm{Quot}(R)$ bezeichnet.

2.75 Beispiel. Sei $R = \mathbb{Z}$. Der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}$ ist $\mathbb{Q}$. Für eine Primzahl p und das Primideal $\mathfrak{p} = p\mathbb{Z}$ gilt $R_\mathfrak{p} = \{x/y \,|\, x, y \in \mathbb{Z} \text{ und } p \nmid y\}$. Das maximale Ideal ist $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} = \{x/y \,|\, x, y \in \mathbb{Z} \text{ und } p \nmid y, p \,|\, x\}$.

Ein weiteres Beispiel ist $\mathbb{Z}[1/3] = \{x/3^i \,|\, i \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, x \in \mathbb{Z}\}$ oder $\mathbb{Z}[1/2, 1/3] = \{x/(2^i 3^j) \,|\, i, j \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, x \in \mathbb{Z}\}$. In beiden Ringen ist 3 eine Einheit mit unendlicher Ordnung. In $\mathbb{Z}[1/2, 1/3]$ sind die Einheiten 2 und 3 sogar unabhängig, das heißt $2^i 3^j = 1$ geht nur für $i = 0$ und $j = 0$.

2.76 Beispiel. Sei $R = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $U = \langle(1, 0)\rangle$. Um $R[U^{-1}]$ zu bestimmen, berechnen wir zuerst das Bild von R in $R[U^{-1}]$ unter ι_U. Es gilt $\ker(\iota_U) = \{r \in R \,|\, ur = 0 \text{ für ein } u \in U\} = \{0\} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Also ist $\iota_U(R) \cong R/\ker(\iota_U) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Da $\iota_U(U) \subseteq \iota_U(R)^\times$ gilt hier bereits $R[U^{-1}] = \iota_U(R)$. Für $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $U = \langle 3, 0\rangle$ ergäbe sich beispielsweise $R[U^{-1}] \cong \mathbb{Z}[1/3]$.

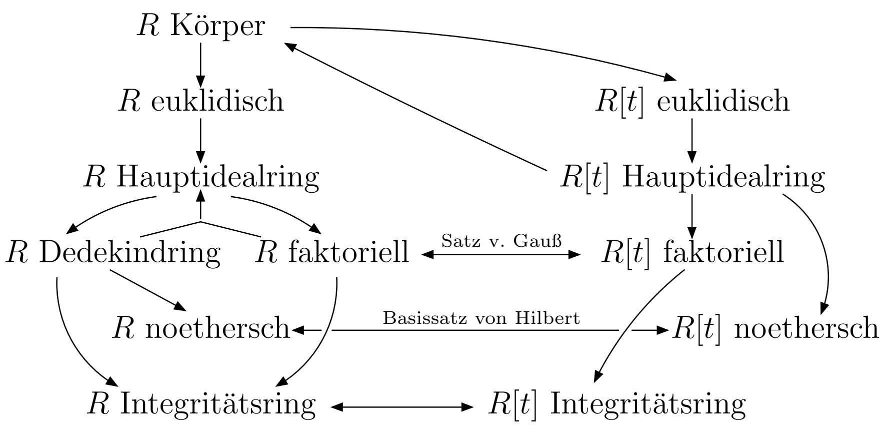
2.77 Beispiel. Enthält U ein nilpotentes Element, so gilt $R[U^{-1}] = 0$.

2.78 Bemerkung. Die meisten Aussagen dieses Abschnitts können für nicht kommutative Ringe R geeignet verallgemeinert werden, wenn man U stets aus dem Zentrum von R wählt, wenn also die Elemente aus U mit allen Elementen von R kommutieren.

Kapitel 3

Polynomringe

Wir betrachten in diesem Kapitel kommutative Ringe R mit Einselement und die zugehörigen Polynomringe $R[t]$. Eine Übersicht über die (behandelten bzw. zu behandelnden) Ringeigenschaften und Beziehungen wird in der folgenden Abbildung gegeben.



Generalvoraussetzung für dieses Kapitel ist, daß Ringe Einselemente besitzen und daß Homomorphismen Einselemente auf Einselemente abbilden.

3.1 Univariate Polynomringe

3.1 Definition. Seien R, S kommutative Ringe und $\phi : R \to S$ ein Homomorphismus. Wir definieren eine äußere Verknüpfung $\cdot : R \times S \to S$ durch $r \cdot x = \phi(r)x$ und nennen S mit dieser äußeren Verknüpfung die durch ϕ definierte R-Algebra. Als Schreibweise verwenden wir wie üblich $rx = r \cdot x$.

Sind S und T R-Algebren, so verstehen wir unter einem R-Algebra Homomorphismus einen Ringhomomorphismus $f : S \to T$ mit $f(rx) = rf(x)$ für alle $r \in R$ und $x \in S$. Analog werden R-Algebra Mono-, Epi-, Iso-, Endo- und Automorphismen definiert.

Die Homomorphieeigenschaft von ϕ impliziert die üblichen bzw. erwarteten Assoziativitäts- und Distributivitätseigenschaften von $\cdot$, die zur Grundlage einer allgemeineren Definition von R-Algebra gemacht werden können. Enthält S jedoch ein Einselement 1 (was wir hier in der Generalvoraussetzung annehmen), so wird jede R-Algebra durch einen solchen Homomorphismus $\phi : R \to S$ definiert, indem man nämlich $\phi(r) = r \cdot 1$ wählt.

Bei den lokalen Ringen haben wir $R[U^{-1}]$ in ähnlicher Weise als R-Algebra aufgefaßt.

Nun zur Definition des (univariaten) Polynomrings. Sei R ein kommutativer Ring. Wir setzen

$$R[t] = \{f \mid f : \mathbb{Z}^{\geq 0} \to R \text{ mit } f(i) = 0 \text{ für fast alle } i \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\}.$$

Für $f, g \in R[t]$ definieren wir $f + g \in R[t]$ durch

$$(f + g)(i) = f(i) + g(i)$$

und $f \cdot g \in R[t]$ durch

$$(f \cdot g)(i) = \sum_{\nu+\mu=i} f(\nu)g(\mu),$$

wobei ν, μ über alle Zahlen in $\mathbb{Z}^{\geq 0}$ laufen. Man sieht leicht, daß $R[t]$ mit den inneren Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein Ring ist. Das Nullelement von $R[t]$ wird durch die Funktion gegeben, welche jedes i auf 0 abbildet. Das Einselement von $R[t]$ wird durch die Funktion gegeben, welche $i = 0$ auf das Einselement 1 von R und $i \neq 0$ auf 0 abbildet. Mit t bezeichnen wir die Funktion, die $i = 1$ auf 1 und $i \neq 1$ auf 0 abbildet.

Wir erhalten auch einen Monomorphismus $\phi : R \to R[t]$, $r \mapsto h_r$ mit $h_r(i) = r\,\delta_{0,i}$ (Kronecker-Delta). Damit kann R als Teilring von $R[t]$ aufgefaßt werden und $R[t]$ wird zu einer R-Algebra. Es gilt $\phi(1) = 1$.

3.2 Definition. Sei R kommutativer Ring. Die eben definierte R-Algebra $R[t]$ zusammen mit dem Element t heißt Polynomring in der Variablen t über R. Die Elemente von $R[t]$ heißen Polynome in der Variablen t über R.

Zur Veranschaulichung ist es besser, die Elemente von $R[t]$ mittels t auszudrücken. Man sieht aufgrund der Definitionen sofort, daß für $f \in R[t]$ folgendes gilt: $f = \sum_{i=0}^n a_i t^i = \sum_{i=0}^n \phi(a_i)t^i$ mit $a_i = f(i) \in R$ und $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, so daß $f(j) = 0$ für alle $j > n$. Zwischen a_i und t^i steht hier die äußere Multiplikation. Die obigen Verknüpfungen sind gerade so gemacht, daß sich die erwarteten Rechenregeln für Polynome ergeben.

Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn alle vor den t^i auftretenden Koeffzienten gleich sind. Speziell soll hier hervorgehoben werden, daß Polynome nicht als Funktionen aufgefaßt werden, wie vielleicht aus der Analysis gewohnt. Ist k der endliche Körper mit zwei Elementen, so liefern $t \mapsto 1$ und $t \mapsto t^2 + t + 1$ die gleichen Funktionen $k \to k$, die Polynome 1 und $t^2 + t + 1$ sind aber verschiedene Elemente von $k[t]$.

Wir definieren noch ein paar grundlegene Begriffe im Zusammenhang mit Polynomringen und Polynomen. Die Polynome t^i heißen Monome. Die Polynome at^i heißen Terme. Sei $f \in R[t]$ mit $f = \sum_{i=0}^n a_i t^i$. Die a_i heißen die Koeffizienten von f. Der Grad von f ist $\deg(f) = \max\{i \,|\, 0 \leq i \leq n \text{ und } a_i \neq 0\}$. Es gilt insbesondere $\deg(0) = -\infty$ für $0 \in R[t]$. Für $\deg(f) \geq 0$ heißt $a_{\deg(f)}$ Leitkoeffizient von f. Der Term $a_{\deg(f)}t^{\deg(f)}$ heißt führender Term von f. Der Koeffizient a_0 heißt Absolutkoeffizient. Das Polynom f heißt normiert, wenn der Leitkoeffizient gleich 1 ist. Gilt $\deg(f) \leq 0$, so heißt das Polynom konstant. Gilt $\deg(f) = 1$, so heißt das Polynom linear.

Sind $f, g \in R[t]$ so gilt $\deg(f + g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$ und $\deg(fg) \leq \deg(f) + \deg(g)$ unter Nachverfolgen der führenden Terme und unter Verwendung von „sinnvollen“ Rechenregeln für $-\infty$. Die zweite Ungleichung wird hier zur Gleichung, wenn R nullteilerfrei ist.

3.3 Satz. *Sei R ein kommutativer Ring. Der Polynomring $R[t]$ ist genau dann nullteilerfrei, wenn R nullteilerfrei ist. In diesem Fall gilt $R[t]^\times = R^\times$.*

Beweis. Ist $R[t]$ nullteilerfrei, so ist auch R als Teilring nullteilerfrei. Sind umgekehrt $f, g \in R[t] \backslash \{0\}$ mit $\deg(f) \geq 1$, so gilt $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g) \geq 1$, also $fg \neq 0$, also ist $R[t]$ mit R nullteilerfrei.

Gilt $fg = 1$, so folgt $\deg(f) + \deg(g) = 0$. Wegen $\deg(f) \geq 0$ und $\deg(g) \geq 0$ gilt $\deg(f) = \deg(g) = 0$, also $f, g \in R$. □

Als Zusatz zur Aussage des Satzes bemerken wir, daß ein Polynom $f \neq 0$, dessen Leitkoeffizient kein Nullteiler ist, ebenfalls kein Nullteiler in $R[t]$ ist, denn es gilt $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ für alle $g \in R[t]$.

In $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[t]$ gilt $(2t + 1)^2 = 1$, also $2t + 1 \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[t]^\times$ als Gegenbeispiel zur Aussage 2, falls R nicht nullteilerfrei ist.

Sei $\phi : R \to S$ ein Homomorphismus. Dies macht S wie oben zu einer R-Algebra, indem wir die Multiplikation von $r \in R$ mit $x \in S$ durch $rx = \phi(r)x$ definieren. Wir erhalten dann einen R-Algebra Homomorphismus $\phi_x : R[t] \to$

S durch die Zuordnung $\phi_x(f) = f(x) = \sum_i a_i x^i$, wo $f = \sum_i a_i t^i \in R[t]$ mit $a_i \in R$ ist. Dieser R-Algebra Homomorphismus wird als Einsetzhomomorphismus bezeichnet.

3.4 Satz (Universelle Eigenschaft). *Sei R ein kommutativer Ring und S eine kommutative R-Algebra mit der folgenden universellen Eigenschaft:*

S besitze ein Element $x \in S$, so daß für jede kommutative R-Algebra T und jedes Element $y \in T$ genau ein R-Algebra Homomorphismus $\psi : S \to T$ mit $\psi(x) = y$ existiert.

Dann gilt $S \cong R[t]$ als R-Algebren.

Beweis. Seien S_1, S_2 zwei kommutative R-Algebren, die jeweils die universelle Eigenschaft mit $x_1 \in S_1$ und $x_2 \in S_2$ erfüllen. Dann gibt es R-Algebra Homomorphismen $\psi_1 : S_1 \to S_2$ mit $\psi_1(x_1) = x_2$ und $\psi_2 : S_2 \to S_1$ mit $f(x_2) = x_1$. Folglich gilt $\psi_2 \circ \psi_1 : S_1 \to S_2$ mit $\psi_2(\psi_1(x_1)) = x_1$ und $\psi_1 \circ \psi_2 : S_2 \to S_2$ mit $\psi_1(\psi_2(x_2)) = x_2$. Da auch die Identitäten auf S_1 und S_2 diese Eigenschaften haben, folgt aus der Eindeutigkeitsaussage der universellen Eigenschaft, daß $\psi_2 \circ \psi_1 = \mathrm{id}$ und $\psi_1 \circ \psi_2 = \mathrm{id}$, also $S_1 \cong S_2$ als R-Algebren gilt.

Die R-Algebra $R[t]$ zusammen mit $t \in R[t]$ erfüllt die universelle Eigenschaft: Der Einsetzhomomorphismus $\phi_y : R[t] \to T$, $f \mapsto f(y)$ liefert gerade den gesuchten R-Algebra Homomorphismus $\psi : R[t] \to T$. Aufgrund der R-Algebra Homomorphieeigenschaft ist auch klar, daß ψ durch die Vorgabe von $t \mapsto y$ eindeutig bestimmt wird.

Erfüllt S die universelle Bedingung, so folgt also $S \cong R[t]$ als R-Algebren. □

Man kann die universelle Eigenschaft also als alternative Definition des Polynomrings nehmen. Dann heißt die kommutative R-Algebra S zusammen mit dem Element $x \in S$ Polynomring in der Variablen x über R. Aus der universellen Eigenschaft folgt wie im Beweis, daß S bis auf R-Algebra Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Für die Existenz ist aber noch das Konstruktionsverfahren anzugeben.

3.5 Satz (Polynomdivision). *Sei R ein kommutativer Ring. Seien $f, g \in R[t]$ und g habe invertierbaren Leitkoeffizienten. Dann gibt es eindeutig bestimmte $q, r \in R[t]$ mit $f = qg + r$ und* $\deg(r) < \deg(g)$.

Beweis. Beweis induktiv über $\deg(f)$. Für $\deg(f) < \deg(g)$ wähle $q = 0$ und $r = f$. Es gelte jetzt $\deg(f) \geq \deg(g)$. Wähle $c \in R$ mit $\deg(f - ct^{\deg(f)-\deg(g)}g) < \deg(f)$. Dies ist möglich, da der Leitkoeffizient von g invertierbar ist. Induktiv gibt es $q', r \in R[t]$ mit $f - ct^{\deg(f)-\deg(g)}g = q'g + r$ und $\deg(r) < \deg(g)$. Setze $q = q' + ct^{\deg(f)-\deg(g)}$. Dann gilt $f = qg + r$, wie erforderlich.

Zur Eindeutigkeit bildet man die Differenz von $f = q_1 g + r_1$ und $f = q_2 g + r_2$ und erhält $(q_1 - q_2)g = r_1 - r_2$. Da g einen invertierbaren Leitkoeffizienten hat, muß $q_1 - q_2 = 0$ gelten, weil die linke Seite sonst einen Grad $\geq \deg(g) > \deg(r_1 - r_2)$ hätte. Dann folgt aber $r_1 - r_2 = 0$ und die Eindeutigkeit ist bewiesen. □

Bei der Polynomdivision haben wir die Kommutativität von R gar nicht ausgenutzt. Man kann in der Tat Polynomringe und Polynomdivision geeignet für nicht kommutative Ringe definieren. Man muß dann beispielsweise zwischen Links- und Rechtsdivision unterscheiden. In der Vorlesung gehen wir hier aber nicht näher darauf ein.

3.2 Polynomringe über Körpern

3.6 Satz. *Sei R ein Ring. Dann sind äquivalent:*

(i) R ist ein Körper,

(ii) $R[t]$ ist ein euklidischer Ring,

(iii) $R[t]$ ist ein Hauptidealring.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: $R[t]$ ist offenbar ein Integritätsring. Darüberhinaus ist Proposition 3.5 für alle $g \neq 0$ anwendbar, und deg erfüllt die Bedingungen einer euklidischen Gradfunktion. $(ii) \Rightarrow (iii)$: Wurde bereits bewiesen. $(iii) \Rightarrow (i)$: Wir betrachten den Einsetzhomomorphismus $\phi_0 : R[t] \to R$, der durch $t \mapsto 0$ definiert wird. Als Teilring von $R[t]$ ist R selbst Integritätsring. Daher ist $\ker(\phi)$ ein Primideal und als solches im Hauptidealring $R[t]$ maximal. Da ϕ surjektiv ist, ist folglich $R \cong R[t]/\ker(\phi)$ ein Körper. □

Aufgrund von Satz 3.6 sehen wir, daß $\mathbb{Z}[t]$ kein Hauptidealring ist. Ein (maximales) Ideal, welches kein Hauptideal ist, wird zum Beispiel durch $2\mathbb{Z}[t] + t\mathbb{Z}[t]$ gegeben. Die Ergebnisse des Abschnitts 3.5 zeigen, daß $\mathbb{Z}[t]$ immerhin ein faktorieller Ring ist, und daß $2, t$ Primelemente in $\mathbb{Z}[t]$ sind.

3.7 Korollar. *Sei K ein Körper. Jedes $f \in K[t] \setminus \{0\}$ besitzt eine eindeutige Faktorisierung $f = c \prod p^{n_p}$ mit $c \in K^\times$, normierten irreduziblen $p \in K[t]$ und $n_p \geq 0$.*

3.8 Korollar. *Sei K ein Körper und $f \in K[t]$ irreduzibel. Dann ist $K[t]/fK[t]$ ein Körper, welcher K als Teilkörper enthält.*

Beweis. Für die letzte Aussage beachten wir $K \cap fK[t] = \{0\}$. Indem wir K dann mit den Klassen $\{x + fK[t] \mid x \in K\}$ identifizieren, wird K ein Teilkörper von $K[t]/fK[t]$. □

Mit dem letzten Korollar kann man sich aus gegebenen Körpern neue konstruieren. Diese Methode wird sehr oft verwendet.

3.3 Nullstellen von Polynomen

3.9 Definition. Sei R kommutativer Ring und S eine kommutative R-Algebra. Sei $f \in R[t]$. Ein Element $b \in S$ heißt Nullstelle (oder Wurzel) von f in S wenn $f(b) = 0$ gilt.

3.10 Satz. *Sei R ein kommutativer Ring und $f \in R[t]$ vom Grad $n \geq 0$. Für jede Nullstelle $b \in R$ wird f von $t - b$ geteilt.*

Ist R ein Integritätsring, so besitzt f höchstens n Nullstellen in R.

Beweis. Division mit Rest durch $g = t - b$ liefert $q \in R[t]$ und $r \in R$ mit $f = q(t - b) + r$. Daraus folgt $f(b) = r = 0$, folglich ist f durch $t - b$ teilbar. Ist nun R Integritätsring und $a \neq b$ eine weitere Nullstelle von f in R, so gilt $f(a) = q(a)(a-b)$ und folglich $q(a) = 0$, da R Integritätsring ist. Wegen $\deg(q) = \deg(f) - 1$ erhält man induktiv, daß es höchstens n Nullstellen von f in R geben kann. □

Die zweite Aussage in Satz 3.10 wird falsch, wenn R kein Integritätsring ist. Als Gegenbeispiel betrachte man $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Für das Polynom $f = (t-(1,1))(t-(2,2))$ gilt nämlich auch $f = (t - (1,2))(t - (2,1))$, so daß f vier verschiedene Nullstellen in R hat und darüberhinaus sich nicht eindeutig faktorisieren läßt.

3.11 Satz. *Jede endliche Untergruppe U der multiplikativen Gruppe $K^\times$ eines Körpers K ist zyklisch.*

Beweis. Sei $n = \#U$ und m der Exponent von U. Dann gilt $m \leq n$ und jedes der n Elemente von U ist Nullstelle des Polynoms $t^m - 1$ in K. Da $t^m - 1$ nach Satz 3.10 maximal m Nullstellen haben kann, folgt $n = m$. Eine abelsche Gruppe der Ordnung n und des Exponenten n ist jedoch zyklisch. □

Ist R ein Integritätsring, $f \in R[t]$ mit $\deg(f) \geq 0$ und $b \in R$, so gibt es nach wiederholter Anwendung von Satz 3.10 ein eindeutig bestimmtes $m \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ und $g \in R[t]$ mit $f = (t - b)^m g$ und $g(b) \neq 0$.

3.12 Definition. Die Zahl m heißt die Vielfachheit von b in f. Für $m > 1$ nennen wir b eine mehrfache Nullstelle.

Die Vielfachheit einer Nullstelle kann wie folgt bestimmt werden.

3.13 Definition. Die Ableitung des Polynoms $f \in R[t]$ mit $f = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ ist definiert als $f' = \sum_{i=1}^{n} i a_i t^{i-1}$.

Die Ableitung erfüllt die (üblichen) Rechenregeln $(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $(af)' = af'$ für $f, g \in R[t]$ und $a \in R$.

3.14 Satz. *Sei R ein Integritätsring und $f \in R[t]$ mit $\deg(f) \geq 0$. Das Element $b \in R$ ist mehrfache Nullstelle von f genau dann, wenn $f(b) = 0$ und $f'(b) = 0$.*

Beweis. Wir schreiben f wie oben $f = (t-b)^m g$. Durch Ableiten erhalten wir $f' = (x-b)^m g' + m(x-b)^{m-1} g$. Ist $m > 1$ so gilt offenbar $f(b) = 0$ und $f'(b) = 0$. Ist umgekehrt $m = 1$ so gilt $f' = (x-b)g' + g$ und folglich $f'(b) = g(b) \neq 0$. Für $f'(b) = 0$ muß daher $m > 1$ gelten. $\square$

3.15 Korollar. *Sei F ein Körper, K ein Teilkörper und $f \in K[t]$ irreduzibel.*

(*i*) *Gilt* $\mathrm{char}(K) = 0$, *so hat f nur einfache Nullstellen in F.*

(*ii*) *Gilt* $\mathrm{char}(K) = p > 0$ *und hat f mehrfache Nullstellen in F, so ist f von der Form $f = g(t^p)$ mit $g \in K[t]$.*

Beweis. (*i*): Wegen $\mathrm{char}(K) = 0$ gilt $f' \neq 0$. Daher folgt aus $\deg(f') < \deg(f)$, daß $\gcd\{f, f'\} = 1$ und somit $1 = \lambda f + \mu f'$ mit geeigneten $\lambda, \mu \in K[t]$ ist. Dies gilt dann auch in $F[t]$, und f und f' haben folglich keine gemeinsamen Nullstellen in F. Wegen Satz 3.14 besitzt f also keine mehrfachen Nullstellen in F. (*ii*): Es muß $f' = 0$ gelten, da sonst wie eben $\gcd\{f, f'\} = 1$ wäre und es keine mehrfachen Nullstellen in F geben könnte. Wegen $f' = 0$ können die Monome in f nur durch p teilbare Exponenten haben. Also ist f von der Gestalt $f = g(t^p)$. $\square$

Ist R ein Integritätsring mit $\mathrm{char}(R) = p$ und hat das Polynom $f = t^p - c$ eine Nullstelle $b \in R$, so gilt $f = t^p - b^p = (t-b)^p$. Also hat f genau eine Nullstelle, und die mit Vielfachheit p.

3.4 Basissatz von Hilbert

3.16 Satz. *Sei R ein kommutativer Ring. Der Polynomring $R[t]$ ist genau dann noethersch, wenn R noethersch ist.*

Beweis. Sei $R[t]$ noethersch und I ein Ideal von R. Das von I in $R[t]$ erzeugte Ideal J ist nach Voraussetzung endlich erzeugt, $J = \sum_{i=1}^{n} R[t] f_i$ mit geeigneten $f_i \in R[t]$. Dann gilt auch $I = \sum_{i=1}^{n} R f_i(0)$ und I ist ebenfalls endlich erzeugt.

Sei nun R noethersch und J ein Ideal von $R[t]$. Wir weisen die Existenz einer endlichen Menge $M \subseteq J$ mit der folgenden Eigenschaft nach: Für jedes $f \in J$ mit $f \neq 0$ gibt es $e \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R$ und $f_1, \ldots, f_n \in M$ mit

$$\deg\Big(f - t^e \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\Big) < \deg(f). \tag{3.17}$$

Wenn wir dies iteriert $\deg(f) + 1$ mal anwenden, reduzieren wir f modulo dem Ideal $R[t]M$ zu Null. Daraus folgt $f \in R[t]M$, also $J = R[t]M$ und J ist endlich erzeugt.

Sei $J_i = \{f \in J \mid \deg(f) \leq i\}$ und $I_i = \{a_i \mid \sum_{j=0}^{i} a_j t^j \in J_i\}$ für $i \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$. Da J_i additiv und unter Multiplikation mit Elementen aus R abgeschlossen ist, handelt es sich bei I_i um ein Ideal von R. Wegen $tJ_i \subseteq J_{i+1}$ gilt $I_i \subseteq I_{i+1}$. Da R noethersch ist, gibt es $m \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ mit $I_i = I_m$ für alle $i \geq m$ und die $I_0, \ldots, I_m$ sind jeweils endlich erzeugt. Für $0 \leq i \leq m$ gibt es daher endliche Mengen $M_i \subseteq J_i$ derart, daß die Leitkoeffizienten der Polynome eines jeden M_i die zugehörigen Leitkoeffizientenideale I_i erzeugen. Wir setzen $M = \cup_{i=0}^{m} M_i$. Aufgrund der Konstruktion von M und wegen $I_i = I_m$ für $i \geq m$ sieht man direkt, daß jeder füherende Term eines $f \in J$ als führender Term eines Polynoms der Form $t^e \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i$ mit $e \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, $\lambda_i \in R$ und $f_i \in M$ auftritt, daß also (3.17) gilt. □

Der Basissatz von Hilbert liefert eine reine Existenzaussage für endliche Erzeugendensysteme von Idealen, jedoch kein sinnvolles Verfahren, wie diese zu konstruieren sind. Als Hilbert diesen Satz Ende des 19. Jahrhunderts bewies, sorgte dieser auch aufgrund seiner nicht konstruktiven Natur für erhebliches Aufsehen. Die Invariantentheorie war zu dieser Zeit ein großes und wichtiges Forschungsgebiet in der Mathematik und man schlug sich darin mit der expliziten Berechnung von Erzeugern gewisser Ideale herum. Von Gordan, einem Hauptvertreter der Invariantentheorie, stammt die Aussage, es handele sich beim Basissatz von Hilbert nicht um Mathematik, sondern um Theologie. In der Folge wurde die Axiomatisierung der Algebra vorangetrieben und man gewöhnte sich an formale, nicht konstruktive Beweise.

3.5 Satz von Gauß

Sei R ein faktorieller Ring. Wir wollen im folgenden das Faktorisierungsverhalten von Polynomen aus $R[t]$ über dem Quotientenkörper $K = \mathrm{Quot}(R)$ von R und über R selbst untersuchen. Als Hilfsmittel verwenden wir dazu Bewertungen.

Wir beginnen zuerst mit einer allgemeinen Aussage.

3.18 Proposition. *Sei $\phi : R \to S$ ein Homomorphismus der kommutativen Ringe R und S. Dann läßt sich ϕ zu einem Homomorphimus $\psi : R[t] \to S[t]$ fortsetzen, welcher durch koeffizientenweise Anwendung von ϕ definiert ist. Ist ϕ surjektiv, so ist auch ψ surjektiv. Ferner gilt* $\ker(\psi) = \ker(\phi)R[t]$.

Beweis. Kann man direkt nachrechnen. Eine andere Argumentation ist die folgende. Wir verknüpfen ϕ mit dem Einbettungshomomorphismus $S \to S[t]$ und erhalten so $S[t]$ als R-Algebra. Der Einsetzhomomorphismus $\phi_t : R[t] \to S[t]$ wendet dann ϕ koeffizientenweise auf die Elemente von $R[t]$ an. Wir setzen also $\psi = \phi_t$. Die Aussagen über die Surjektivität und den Kern sind dann klar. $\square$

3.19 Proposition. *Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Durch koeffizientenweise Reduktion erhält man einen Epimorphismus $\phi : R[t] \to (R/\mathfrak{a})[t]$. Folglich gilt $R[t]/\mathfrak{a}R[t] \cong (R/\mathfrak{a})[t]$ und $\mathfrak{a}R[t]$ ist genau dann ein Primideal in $R[t]$, wenn $\mathfrak{a}$ ein Primideal in R ist.*

Beweis. Folgt aus Proposition 3.18, angewendet auf den Reduktionshomomorphismus $R \to R/\mathfrak{a}$, und dem Homomorphiesatz. Ferner gilt, daß $\mathfrak{a}R[t]$ genau dann Primideal ist, wenn $R[t]/\mathfrak{a}R[t]$ ein Integritätsring ist, und daß $\mathfrak{a}$ genau dann Primideal ist, wenn $R/\mathfrak{a}$ und damit $(R/\mathfrak{a})[t]$ ein Integritätsring ist. Die bereits bewiesene Isomorphie liefert daher die zu beweisende Äquivalenz. $\square$

Wir kommen nun zu den Bewertungen. Sei P ein Repräsentantensystem der Primelemente von R. Jedes $x \in R\backslash\{0\}$ besitzt eine eindeutige Faktorisierung $x = \varepsilon \prod_{p \in P} p^{n_p}$, wobei $\varepsilon \in R^\times$ sowie $n_p \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ mit $n_p = 0$ für fast alle $p \in P$. Wir setzen $v_p(x) = n_P$ und $v_P(0) = \infty$ und erhalten damit für jedes $p \in P$ eine Abbildung $v_p : R \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Für $x, y \in R$ gilt dann offenbar $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$ und $v_p(x+y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$ unter Beachtung „sinnvoller“ Rechenregeln mit ∞. Dies motiviert die folgende, allgemeine Definition.

3.20 Definition. Sei R ein Integritätsring. Unter einer (nicht-archimedischen, exponentiellen) Bewertung auf R verstehen wir eine Abbildung $v : R \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit den folgenden Eigenschaften für alle $x, y \in R$.

(*i*) $v(x) = \infty$ genau dann, wenn $x = 0$,

(*ii*) $v(xy) = v(x) + v(y)$,

(*iii*) $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.

Ein weiteres Beispiel einer Bewertung wird durch die negierte Gradfunktion $-\deg$ auf $R[t]$ gegeben.

Normalerweise betrachtet man solche Bewertungen für den Fall, daß R ein Körper ist. Daher ist das folgende Lemma nützlich.

3.21 Lemma. *Eine Bewertung auf dem Integritätsring R läßt sich auf eindeutige Weise auf $K = \operatorname{Quot}(R)$ fortsetzen.*

Beweis. Man definiert $v(x/y) = v(x) - v(y)$. Die Bedingungen (i)-(iii) ergeben sich durch direktes Nachrechnen. Die Eindeutigkeit ergibt sich auch Bedingung (ii): Für $v(x/y)$ muß gelten: $v(x/y) + v(y) = v(x)$, wodurch $v(x/y)$ eindeutig festgelegt wird. □

Ist R ein faktorieller Ring, so erhalten wir nun durch die Fortsetzung der v_p auf K für jedes $x \in K^\times$ eine eindeutige Faktorisierung $x = \varepsilon \prod_{p \in P} p^{v_p(x)}$ mit geeignetem $\varepsilon \in R^\times$. Für nicht faktorielle Ringe kann man sich die Bewertungen v als Exponenten in verallgemeinerten Faktorisierungen vorstellen.

3.22 Definition. Sei v eine Bewertung auf einem Körper K.

(i) Die Menge $R_v = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$ heißt Bewertungsring von v.

(ii) Die Menge $\mathfrak{p}_v = \{x \in K \mid v(x) > 0\}$ heißt Bewertungsideal von v.

3.23 Lemma. *Der Bewertungsring R_v ist ein Ring und das Bewertungsideal $\mathfrak{p}_v$ ist ein Primideal in R_v.*

Beweis. Die Aussagen ergeben sich unmittelbar aus (i)-(iii). □

Man kann darüberhinaus zeigen, daß $\mathfrak{p}_v$ das einzige Primideal von R_v und somit maximal ist. Außerdem sind genau die Elemente in $R_v \backslash \mathfrak{p}_v$ Einheiten in R_v, kurz R_v ist ein lokaler Ring. Wir benötigen diese Aussagen für das folgende aber nicht.

3.24 Satz. *Eine Bewertung v des Integritätsrings R läßt sich zu einer Bewertung w auf $R[t]$ durch $w(f) = \min_i v(a_i)$ für $f = \sum_i a_i t^i \in R[t]$ fortsetzen.*

Beweis. Die Bedingungen (i) und (iii) aus Definition 3.20 ergeben sich direkt aus der Definition von w: Es gilt $w(f) = \infty$ genau dann, wenn alle $v(a_i) = \infty$, also $f = 0$. Für $g = \sum_i b_i t^i$ sehen wir weiterhin $w(f + g) = \min_i v(a_i + b_i) \geq \min_i \min\{v(a_i), v(b_i)\} = \min\{\min_i v(a_i), \min_i v(b_i)\} = \min\{w(f), w(g)\}$. Bedingung (ii) ist der Inhalt des nachfolgenden Lemmas von Gauß. □

3.25 Lemma (Gauß)**.** *Für alle $f, g \in R[t]$ gilt $w(fg) = w(f) + w(g)$.*

Beweis. Die Aussage gilt im Falle $f = 0$ oder $g = 0$. Wir nehmen daher $f \neq 0$ und $g \neq 0$ an. Wir setzen v auf $K = \operatorname{Quot}(R)$ fort und betrachten die Situation in $K[t]$. Allgemein gilt $w(ch) = v(c) + w(h)$ für $c \in K$ und $h \in K[t]$. Wir verwenden dies für die folgende Normierung. Seien r, s diejenigen Indizes, für die $w(f) = v(a_r)$

und $w(g) = v(b_s)$ gilt, wobei $g = \sum_i b_i t^i$. Wir setzen $\tilde{f} = f/a_r$ und $\tilde{g} = g/b_s$. Die Ungleichung $v(a_i/a_r) = v(a_i) - v(a_r) \geq 0$ ist scharf. Daher gilt $w(\tilde{f}) = 0$ und analog $w(\tilde{g}) = 0$. Zum Beweis des Lemmas genügt nun also $w(\tilde{f}\tilde{g}) = 0$ zu zeigen, da hieraus $w(fg) = w(a_r\tilde{f}b_s\tilde{g}) = v(a_rb_s) + w(\tilde{f}\tilde{g}) = v(a_rb_s) + w(\tilde{f}) + w(\tilde{g}) = v(a_r) + v(b_s) + w(\tilde{f}) + w(\tilde{g}) = w(a_r\tilde{f}) + w(b_s\tilde{g}) = w(f) + w(g)$ folgt.

Offenbar gilt $\tilde{f}, \tilde{g} \in R_v[t]$. Sei $\phi : R_v[t] \to (R_v/\mathfrak{p}_v)[t]$ wie in Proposition 3.19 der Homomorphismus, der die Koeffizienten reduziert. Für $h \in R_v[t]$ gilt $w(h) = 0$ genau dann, wenn $\phi(h) \neq 0$. Wir haben also $\phi(\tilde{f}) \neq 0$ und $\phi(\tilde{g}) \neq 0$. Da $(R_v/\mathfrak{p}_v)[t]$ mit $R_v/\mathfrak{p}_v$ ein Integritätsring ist, ergibt sich $\phi(\tilde{f}\tilde{g}) = \phi(\tilde{f})\phi(\tilde{g}) \neq 0$ und daraus $w(\tilde{f}\tilde{g}) = 0$. □

3.26 Satz. *Sei V eine Menge von Bewertungen des Körpers K und $R = \cap_{v\in V} R_v$. Sei $f \in R[t]$ normiert. Sind $g, h \in K[t]$ normiert mit $f = gh$, so gilt $g, h \in R[t]$.*

Beweis. Wir setzen $v \in V$ wie in Satz 3.24 zur Bewertung w auf $K[t]$ fort. Dann gilt $w(f) = 0$, $w(g), w(h) \leq 0$ und $w(f) = w(g)+w(h)$. Es folgt $w(g) = w(h) = 0$, also $g, h \in R_v[t]$. Da dies für jedes $v \in V$ gilt, ergibt sich $g, h \in R[t]$. □

Satz 3.26 ist ein Beispiel für das Lokal-Global Prinzip. Der Ring R wird global durch alle $v \in V$ definiert. Wir beweisen die Aussage lokal, daß heißt bezüglich R_v für jedes $v \in V$ einzeln, und können dann durch Kombination der lokalen Aussagen die globale Aussage für R erhalten.

Nach diesen allgemeinen Überlegungen kehren wir nun zu dem Fall zurück, daß R faktoriell ist.

3.27 Korollar. *Sei R faktoriell, $K = \mathrm{Quot}(R)$ und $f \in R[t]$ normiert. Sind $g, h \in K[t]$ normiert mit $f = gh$, so gilt $g, h \in R[t]$.*

Beweis. Sei $V = \{v_p \,|\, p \in P\}$ die Menge der auf K fortgesetzten Bewertungen v_p. Für $x \in K$ gilt dann $x \in R$ genau dann, wenn $v_p(x) \geq 0$ für alle $p \in P$. Dies heißt $R = \cap_{v\in V} R_v$. Die Aussage folgt nun mit Satz 3.26. □

Das Faktorisierungsverhalten normierter Polynome in $R[t]$ entspricht also dem in $K[t]$. Wir wenden uns jetzt auch nicht normierten Polynomen zu. Wir bezeichnen mit w_p die Fortsetzungen von v_p auf $K[t]$ wie oben.

3.28 Definition. Der Inhalt $I(f)$ eines Polynoms $f \in K[t]\backslash\{0\}$ ist definiert als $I(f) = \prod_{p\in P} p^{w_p(f)}$. Das Polynom f heißt primitiv, wenn $I(f) = 1$ ist.

Der Inhalt von f ist offenbar gleich dem größten gemeinsamen Teiler der Koeffizienten von f. Ferner gilt $f \in R[t]$ genau dann, wenn $I(f) \in R$. Aus Lemma 3.25 folgt $I(fg) = I(f)I(g)$. Ähnlich wie im Beweis von Satz 3.24 können wir jedes

Polynom $f \in R[t]\backslash\{0\}$ primitiv machen, indem wir seinen Inhalt $I(f)$ herausdividieren: Das Polynom $\tilde{f} = f/I(f)$ liegt in $R[t]$ und ist primitiv. Wir bemerken, daß $I(f)$ und $\tilde{f}$, aber nicht jedoch die Eigenschaft, primitiv zu sein, von der Wahl von P abhängen.

3.29 Satz (Gauß)**.** *Sei R kommutativ. Dann ist $R[t]$ genau dann faktoriell, wenn R faktoriell ist. In diesem Fall bestehen die Primelemente von $R[t]$ genau aus den Primelementen von R und den primitiven Polynomen in $R[t]$, welche in $K[t]$ für $K = \mathrm{Quot}(R)$ irreduzibel sind.*

Beweis. Ist $R[t]$ faktoriell, so muß auch R faktoriell sein, denn da $R[t]$ nullteilerfrei ist, enthält jede Faktorisierung von Elementen aus R in Primelemente aus $R[t]$ nur solche Faktoren, welche aus R stammen. Diese Faktoren sind auch Primelemente von R.

Sei nun umgekehrt R faktoriell. Die Primelemente von R bleiben prim in $R[t]$. Ist nämlich p ein solches, so ist R/pR und damit auch $R[t]/pR[t] \cong (R/p)[t]$ unter Verwendung von Proposition 3.19 ein Integritätsring.

Sei nun $q \in R[t]$ primitiv und irreduzibel in $K[t]$. Wir wollen zeigen, daß q Primelement ist. Seien $f, g \in R[t]$, so daß $q \mid fg$ gilt. Da q Primelement in $K[t]$ ist, gibt es $h \in K[t]$, so daß etwa $f = qh$ gilt. Mit Lemma 3.25 sehen wir $I(q)I(h) = I(f) \in R$. Wegen $I(q) = 1$ folgt also $I(h) \in R$ und somit $h \in R[t]$. Daher gilt $q \mid f$ in $R[t]$.

Sei $f \in R[t]\backslash\{0\}$. Gilt $\deg(f) = 0$, so faktorisiert f bereits in R in Primelemente, und dies ist auch eine Faktorisierung in $R[t]$ in Primelemente. Gelte nun $\deg(f) \geq 1$. Wir wollen zeigen, daß f in die bereits diskutierten Primelemente von $R[t]$ faktorisiert. Wir schreiben zunächst $f = a\tilde{f}$ mit $a = I(f)$ und $\tilde{f} \in R[t]$. Das Element a faktorisiert in R, und dies liefert auch eine Faktorisierung in Primelemente in $R[t]$. Sei $\tilde{f} = c\prod_i \tilde{f}_i$ eine Faktorisierung in irreduzible Polynome in $K[t]$. Wir können durch geeignete Skalierung mit dem Inhalt annehmen, daß die $\tilde{f}_i$ primitiv sind und somit auch in $R[t]$ liegen. Da $\tilde{f}$ ebenfalls primitiv ist, folgt durch Anwendung von $I(\cdot)$ und aus der Multiplikativität von $I(\cdot)$, daß $c \in R^\times$ gilt. Daher faktorisiert $\tilde{f}$ in die Primelemente $c\tilde{f}_1$ und $\tilde{f}_i$ aus $R[t]$ für $i > 1$. □

Beispiele für Primelemente in $\mathbb{Z}[t]$ sind t, $-t$, $t+3$, $2t-1$, t^2-3, $5t^2-2$, ...

3.6 Irreduzibilität von Polynomen

Es ist im allgemeinen nicht einfach, die Irreduzibilität eines Polynoms festzustellen oder seine Faktorisierung anzugeben. Es gibt keine expliziten Formeln, mit denen diese Fragen direkt beantwortet werden könnten, und man greift daher auf Algorithmen bzw. Rechenverfahren zurück. Die Entwicklung solcher Algorithmen ist ein Forschungsgebiet der Computeralgebra. Im folgenden geben wir zwei Irreduzibilitätskriterien an und beschreiben die Faktorisierungsmethode von Kronecker für Polynome über $\mathbb{Z}$.

3.30 Satz (Reduktionssatz)**.** *Sei $\phi : R \to S$ ein Homomorphismus der Integritätsringe R und S und $\psi : R[t] \to S[t]$ seine Fortsetzung wie in Proposition 3.18. Sei $f \in R[t]$ mit $\deg(\psi(f)) = \deg(f)$ und $\psi(f)$ irreduzibel in $S[t]$. Sind dann $g, h \in R[t]$ mit $f = gh$, so folgt $g \in R$ oder $h \in R$.*

Beweis. Es gilt $\deg(g) + \deg(h) = \deg(f) = \deg(\psi(f)) = \deg(\psi(g)) + \deg(\psi(h))$. Wegen $\deg(\psi(f)) \leq \deg(f)$ und $\deg(\psi(g)) \leq \deg(g)$ ergibt sich $\deg(\psi(f)) = \deg(f)$ und $\deg(\psi(g)) = \deg(g)$. Es ist daher nicht möglich, daß $\deg(g) \geq 1$ und $\deg(h) \geq 1$ gilt, weil sonst $\psi(f)$ das Produkt zweier nicht konstanter Polynome und somit nicht irreduzibel wäre. □

Als Beispiel betrachten wir das Polynom $f = t^3 + 6t^2 + 8t + 4 \in \mathbb{Z}[t]$ und den Reduktionshomomorphismus $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Es gilt $\psi(f) = t^3 - t + 1 \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[t]$. Da $\psi(f)$ keine Nullstelle in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ besitzt, ist es irreduzibel. Folglich ist auch f irreduzibel.

Dieses Beispiel könnte den Gedanken nahelegen, daß es für jedes irreduzible Polynom $f \in \mathbb{Z}[t]$ eine Primzahl p gäbe, so daß $\psi(f) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[t]$ irreduzibel wäre. Dies ist jedoch nicht richtig. Das Polynom $f = t^4 - 16t^2 + 4$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[t]$ und faktorisiert beispielsweise modulo jeder Primzahl entweder in zwei irreduzible Polynome vom Grad zwei oder vier Linearfaktoren. Der Beweis dieses Faktorisierungsverhaltens kann unter Verwendung der Galoistheorie geführt werden.

Satz 3.30 kann jedoch auch nutzbringend eingesetzt werden, wenn $\psi(f)$ nicht unbedingt als irreduzibel vorausgesetzt wird, sondern wenn nur Geeignetes über die möglichen Zerlegungen von $\psi(f)$ bekannt ist. Dieser Ansatz wird in dem folgenden Satz benutzt.

3.31 Satz (Irreduzibilitätskriterium von Eisenstein)**.** *Sei R ein faktorieller Ring und $f = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in R[t]$ ein primitives Polynom. Gibt es ein Primelement $p \in R$ mit $p \mid a_i$ für $0 \leq i \leq n-1$, $p \nmid a_n$ und $p^2 \nmid a_0$, so ist f irreduzibel in $K[t]$ mit $K = \mathrm{Quot}(R)$.*

Beweis. Wir nehmen an, daß f nicht irreduzibel ist. Wegen der Primitivität von f gibt es dann nach Satz 3.29 Polynome $g, h \in R[t]$ mit $f = gh$, $\deg(g) \geq 1$ und $\deg(h) \geq 1$. Sei $S = R/pR$ und $\psi : R[t] \to S[t]$ der koeffizientenweise Reduktionshomomorphismus. Weil p prim ist, ist S ein Integritätsring. Wegen $p \nmid a_n$ gilt nun $\deg(\psi(g)) = \deg(g)$ und $\deg(\psi(h)) = \deg(h)$ wie im Beweis von

Satz 3.30. Wegen $p \mid a_i$ gilt weiterhin $\psi(f) = \psi(a_n)t^n = \psi(g)\psi(h)$. Sei $K = \mathrm{Quot}(S)$. Da $K[t]$ faktoriell ist, sind $\psi(g)$ und $\psi(h)$ von der Form $\psi(g) = bt^r$ und $\psi(h) = ct^s$ mit $b, c \in S$. Wegen $r, s \geq 1$ ist dann $\psi(g)(0) = \psi(h)(0) = 0$, also $p \mid g(0)$ und $p \mid h(0)$. Damit ist p^2 ein Teiler von $g(0)h(0) = f(0) = a_0$, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Satz 3.31 kann zum Beispiel auf die Polynome $f = t^n - p \in \mathbb{Z}[t]$ und $g = t^{p-1} + \cdots + t + 1 \in \mathbb{Z}[t]$ angewendet werden, wo $n \geq 1$ und p eine Primzahl ist. Für g benötigt man allerdings zuerst noch einen Trick. Als Hinweis betrachte man $g = (t^p - 1)/(t - 1)$ und die durch $t \mapsto t + 1$ definierte Abbildung.

Wir beschreiben nun das Verfahren von Kronecker zur Faktorisierung von Polynomen über $\mathbb{Z}$. Nach Satz 3.29 können wir uns dabei auf primitive Polynome beschränken.

3.32 Proposition. *Sei K ein Körper. Sind $a_0, \ldots, a_n \in K$ paarweise verschieden und $b_0, \ldots, b_n \in K$, so gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom $f \in K[t]$ mit $\deg(f) \leq n$ und $f(a_i) = b_i$ für $0 \leq i \leq n$.*

Beweis. Zum Beweis der Eindeutigkeit sei $g \in K[t]$ ein weiteres Polynom mit $g(a_i) = b_i$. Wir setzen $h = f - g$. Dann gilt $\deg(h) \leq n$ und $h(a_i) = 0$ für $0 \leq i \leq n$. Nach Satz 3.10 muß dann $h = 0$ gelten. Für die Existenz verwenden wir den Chinesischen Restsatz. Die Polynome $t - a_i$ sind irreduzibel und paarweise koprim. Daher gibt es ein $g \in K[t]$ mit $g \equiv b_i \bmod (t - a_i)$ und folglich $g(a_i) = b_i$ für $0 \leq i \leq n$. Wir können das gesuchte f mit $\deg(f) \leq n$ dann als den Rest der Division von g durch $\prod_{i=0}^{n}(t - a_i)$ definieren. □

Die Berechnung des Polynoms $f \in K[t]$ kann mit dem Lagrangeschen Interpolationspolynom oder dem Newtonschen Interpolationsverfahren erfolgen.

Sei nun $f \in \mathbb{Z}[t]$ primitiv und $g, h \in \mathbb{Z}[t]$ mit $f = gh$. Dann ist $g = \pm 1$ oder $\deg(g) \geq 1$. Für paarweise verschiedene $a_i \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq i \leq \deg(g)$ gilt $f(a_i) = g(a_i)h(a_i)$, also $g(a_i) \mid f(a_i)$. Das Polynom g ist durch die Werte $g(a_i)$ eindeutig bestimmt. Sind die $f(a_i) \neq 0$, so gibt es für $g(a_i)$ nur endlich viele Möglichkeiten. Hieraus ergibt sich folgende Strategie, um alle Teiler von f vom Grad r zu bestimmen:

1. Bestimme paarweise verschiedene $a_0, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$ mit $f(a_i) \neq 0$.
2. Berechne $B = \{(b_i) \in \mathbb{Z}^{r+1} : b_i \mid f(a_i) \text{ für } 0 \leq i \leq r\}$.
3. Konstruiere $g \in \mathbb{Q}[t]$ für jedes $(b_i) \in B$ unter Benutzung von Proposition 3.32.
4. Teste $\deg(g) = r$, $g \in \mathbb{Z}[t]$ und $g \mid f$.

Es ist klar, daß dies ein endliches Verfahren zur Faktorisierung von primitiven Polynomen über $\mathbb{Z}$ liefert:

1. Ist $f \neq \pm 1$, so gibt es nichts (mehr) zu tun.
2. Bestimme einen Teiler $g \neq \pm 1$ von f kleinsten Grades.
3. Setze $f \leftarrow f/g$ und fahre mit 1. fort.

Der Teiler in Schritt 2 ist wegen der Minimalität irreduzibel. Gegebenenfalls verwendet man aus Normierungsgründen nur Teiler g mit positiven Leitkoeffizienten.

Als einfaches Beispiel betrachten wir $f = t^3 - 15t^2 + 71t - 105$ und wollen alle Linearfaktoren in f bestimmen. Da f normiert ist, müssen die Linearfaktoren ebenfalls normiert sein. Durch Auswertung bei $t = 0$ ersehen wir, daß nur $t - b$ mit $b \mid 105$ in Frage kommen kann. Wir haben $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Nachrechnen ergibt, daß $f(3) = f(5) = f(7) = 0$ ist. Also gilt $f = (t-3)(t-5)(t-7)$.

Abschließend bemerken wir, daß sich das Verfahren von Kronecker rekursiv zur Faktorisierung von Polynomen über $\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$ und den entsprechenden Quotientenkörpern verallgemeinern läßt.

Moderne Algorithmen zur Polynomfaktorisierung verwenden andere, effizientere Ansätze als das Verfahren von Kronecker.

3.7 Multivariate Polynomringe

Sei R ein kommutativer Ring. Iterieren wir die Konstruktion eines univariaten Polynomrings, so erhalten wir multivariate Polynomringe.

3.33 Definition. Sei R ein kommutativer Ring und $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$. Die R-Algebra $R[t_1] \cdots [t_n]$ zusammen mit den Elementen $t_1, \ldots, t_n$ heißt Polynomring in den n Variablen $t_1, \ldots, t_n$ über R. Wir verwenden die Schreibweise $R[t_1, \ldots, t_n]$.

Die Elemente von $R[t_1, \ldots, t_n]$ heißen Polynome in den Variablen $t_1, \ldots, t_n$ über R.

Jedes Element $f \in R[t_1, \ldots, t_n]$ läßt sich in der Form

$$f = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 0}^{m} a_{i_1, \ldots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

mit eindeutig bestimmten $a_{i_1, \ldots, i_n} \in R$ schreiben. Die Polynome $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ heißen Monome, die Polynome $a_{i_1, \ldots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ heißen Terme und die $a_{i_1, \ldots, i_n}$ heißen die Koeffizienten von f. Man kann jetzt verschiedene Gradfunktionen definieren. Zu Gewichten $w_1, \ldots, w_n$ kann man beispielsweise $\deg(x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}) = \sum_i w_i e_i$ setzen und diese Gradfunktion per Maximumsbildung auf $R[t_1, \ldots, t_n]$ fortsetzen. Man erhält den sogenannten Totalgrad für $w_i = 1$. Polynomdivision bezüglich dieser allgemeinerer Gradfunktionen ist im allgemeinen jedoch nicht mehr möglich, wenn nicht alle w_i bis auf ein w_j gleich Null sind. Ein Polynom f heißt homogen vom Grad d, wenn alle darin auftretenden Terme der gleichen Totalgrad d haben.

Die Aussagen über univariate Polynomringe übertragen sich iterativ auf multivariate Polynomringe, soweit keine speziellen Annahmen über R getroffen wurden, die sich nicht induktiv fortsetzen.

3.34 Satz. *Sei R kommutativer Ring.*

1. *$R[t_1, \dots, t_n]$ ist genau dann nullteilerfrei, wenn R nullteilerfrei ist. In diesem Fall gilt $R[t_1, \dots, t_n]^\times = R^\times$.*

2. *Sei S eine kommutative R-Algebra mit der folgenden universellen Eigenschaft:*

   S besitze Elemente $x_1, \dots, x_n \in S$, so daß für jede kommutative R-Algebra T und Elemente $y_1, \dots, y_n \in T$ genau ein R-Algebra Homomorphismus $\psi : S \to T$ mit $\psi(x_i) = y_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ existiert.

   Dann gilt $S \cong R[t_1, \dots, t_n]$ als R-Algebren.

3. *$R[t_1, \dots, t_n]$ ist genau dann noethersch, wenn R noethersch ist.*

4. *$R[t_1, \dots, t_n]$ ist genau dann faktoriell, wenn R faktoriell ist.*

Beweis. Per Induktion unter Verwendung der entsprechenden Aussagen für den univariaten Fall. □

Die Homomorphismen ψ aus Aussage 2 heißen wieder Einsetzhomomorphismen. Ist S eine R-Algebra, $f \in R[t_1, \dots, t_n]$ und sind $y_1, \dots, y_n \in S$, so schreiben wir $f(y_1, \dots, y_n)$ für das Bild von f unter dem durch $t_i \mapsto y_i$ definierten Einsetzhomomorphismus $R[t_1, \dots, t_n] \to S$. Gilt $f(y_1, \dots, y_n) = 0$, so nennen wir $(y_1, \dots, y_n)$ eine Nullstelle von f in S. Für $n > 1$ entsprechen Nullstellen von f in R keinen besonderen Faktoren von f, wie das bei $n = 1$ und Linearfaktoren der Fall ist.

Lineare Abbildungen von k-Vektorräumen können durch Angabe der Werte auf einer Basis (über k linear unabhängiges Erzeugendensystem) eindeutig definiert werden. Die Situation hier ist ganz analog: R-Algebra Homomorphismen mit Definitionsbereich $R[t_1, \dots, t_n]$ und Bildbereich eine R-Algebra können durch die Angabe der Werte auf $t_1, \dots, t_n$ eindeutig definiert werden. Der von R und den $t_1, \dots, t_n$ erzeugte Teilring von $R[t_1, \dots, t_n]$ ist bereits ganz $R[t_1, \dots, t_n]$. Die $t_1, \dots, t_n$ bilden daher ein „Erzeugendensystem von $R[t_1, \dots, t_n]$ über R“. Für ein Polynom $f = \sum_{i_1, \dots, i_n = 0}^m a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \in R[t_1, \dots, t_n]$ mit $f = 0$ folgt, daß alle $a_{i_1, \dots, i_n} = 0$ sind. In diesem Sinn sind die $t_1, \dots, t_n$ also auch „über R algebraisch unabhängig“. Dies motiviert folgende Definition.

3.35 Definition. Sei R ein kommutativer Ring und S eine kommutative R-Algebra. Die Elemente $y_1, \dots, y_n \in S$ heißen algebraisch unabhängig über R, wenn der Einsetzhomomorphimus $\psi : R[t_1, \dots, t_n] \to S$ mit $\psi(t_i) = y_i$ injektiv ist.

Für algebraisch unabhängige $y_1, \dots, y_n \in S$ und den Einsetzhomomorphismus $\psi : R[t_1, \dots, t_n] \to S$ mit $\psi(t_i) = y_i$ ist $\psi(R[t_1, \dots, t_n])$ eine zu $R[t_1, \dots, t_n]$ isomorphe R-Teilalgebra von S. Die y_i verhalten sich also über R wie Variablen. Zum Beispiel können wir $S = R[t_1, \dots, t_n]$ und $y_i = t_i^2$ wählen.

Ferner sind die $t_1, \dots, t_n$ aus $R[t_1, \dots, t_n]$ stets algebraisch unabhängig über R.

3.36 Definition. Sei R ein Integritätsring und $n \geq 1$. Der Quotientenkörper von $R[t_1, \dots, t_n]$ heißt Körper der rationalen Funktionen in $t_1, \dots, t_n$ über R und wird mit $R(t_1, \dots, t_n)$ bezeichnet.

Es gilt offenbar $R(t_1, \dots, t_n) \cong \mathrm{Quot}(R[t_1, \dots, t_i])(t_{i+1}, \dots, t_n)$ für $0 \leq i < n$. Wir fassen $R(t_1, \dots, t_n)$ wieder als R-Algebra mit den ausgezeichneten Elementen $t_1, \dots, t_n$ auf.

3.8 Monoidringe, Potenzreihen- und Laurentreihenringe

Monoidringe, Potenzreihen- und Laurentreihenringe sollen hier nur ganz knapp behandelt werden.

Sei R ein Ring und G ein Monoid. Wir setzen

$$R[G] = \{ f \mid f : G \to R \text{ und } f(g) = 0 \text{ für fast alle } g \in G \}.$$

Für $f, h \in R[G]$ definieren wir $f + h \in R[G]$ durch

$$(f + h)(g) = f(g) + h(g)$$

und $f \cdot h \in R[G]$ durch

$$(f \cdot h)(g) = \sum_{\nu\mu = g} f(\nu)h(\mu)$$

für alle $g \in G$, wobei die Summe über alle $\nu, \mu \in G$ mit $\nu\mu = g$ läuft. Die Summe erstreckt sich nur über endlich viele von Null verschiedene Summanden, so daß die Definition Sinn macht.

Man sieht leicht, daß $R[G]$ mit den inneren Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein Ring ist. Das Nullelement von $R[G]$ wird durch die Funktion gegeben, welche jedes

g auf 0 abbildet. Das Einselement von $R[G]$ wird durch die Funktion gegeben, welche $g = 1$ auf das Einselement 1 von R und $g \neq 1$ auf 0 abbildet. Für $g \in G$ bezeichnen wir mit g auch die Funktion aus $R[G]$, welche $h = g$ auf 1 und $h \neq g$ auf 0 für alle $h \in G$ abbildet.

Wir erhalten einen Monomorphismus $R \to R[G]$, $r \mapsto f_r$ mit $f_r(g) = r\,\delta_{g,1}$ (Kronecker-Delta). Damit fassen wir R als Teilring von $R[G]$ auf und $R[G]$ wird zu einer R-Algebra. Wir erhalten darüberhinaus einen Monomorphismus $G \to R[G]^\times$ und fassen G als Untergruppe von $R[G]^\times$ auf.

3.37 Definition. Sei R ein Ring. Die eben definierte R-Algebra $R[G]$ zusammen mit dem Monomorphismus $G \to R[G]^\times$ heißt Monoidring von G über R. Ist G eine Gruppe, so heißt $R[G]$ auch Gruppenring von G über R.

Zur Veranschaulichung ist es besser, die Elemente von $R[G]$ mittels der g auszudrücken. Man sieht aufgrund der Definitionen sofort, daß für $f \in R[G]$ folgendes gilt: $f = \sum_{g \in G} a_g g$, mit $a_g = f(g)$ fast alle Null. Zwischen a_g und g steht hier die äußere Multiplikation. Die obigen Verknüpfungen sind gerade so gemacht, daß sich die „erwarteten“ Rechenregeln ergeben.

3.38 Beispiel. Für einen kommutativen Ring R und den Monoid $G = (\mathbb{Z}^{\geq 0}, +)$ ergibt sich $R[G] \cong R[t]$ und $R[G^n] = R[t_1, \ldots, t_n]$. Für $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ ergibt sich $R[G] \cong R[t]/(t^n - 1)R[t]$.

Motiviert durch das Beispiel können Polynomringe in beliebig vielen Variablen wie folgt definiert werden.

3.39 Definition. Sei R ein kommutativer Ring und I eine Menge. Sei $G \leq \prod_{j \in I} (\mathbb{Z}^{\geq 0}, +)$ der Untermonoid des Produkt der Monoide $(\mathbb{Z}^{\geq 0}, +)$, welcher aus allen Elementen des Produkts besteht, deren Koordinaten fast alle Null sind. Seien $t_i \in G$ mit $t_i(j) = \delta_{i,j}$ und $T = \{t_i \,|\, i \in I\}$. Dann heißt T die durch I indizierte Variablenmenge.

Der Polynomring $R[T]$ mit der durch I indizierten Variablenmenge T über R ist die R-Algebra $R[G]$ zusammen mit den $t_i \in T$ für $i \in I$.

3.40 Bemerkung. Für unendliches I ist $R[T]$ nicht mehr noethersch, auch wenn R noethersch ist. $R[T]$ ist aber immer noch faktoriell, wenn R faktoriell ist.

Wir kommen nun zu den Potenzreihenringen. Sei R ein kommutativer Ring. Die Definition des (univariaten) Potenzreihenring $R[[t]]$ in der Variablen t über R erfolgt ganz analog zu der von $R[t]$, nur daß für die Funktionen $f : \mathbb{Z}^{\geq 0} \to R$ die Bedingung $f(i) = 0$ für fast alle $i \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ fallen gelassen wird. Es handelt sich bei den Elementen von $R[[t]]$ also um „Polynome mit unendlich vielen Koeffizienten“.

Die Operationen $+$ und $\cdot$ werden genauso definiert, wobei die Summe in der Definition von $\cdot$ stets endlich ist und daher Sinn macht.

Der (multivariate) Potenzreihenring $R[[t_1, \ldots, t_n]]$ wird dann als $R[[t_1]] \cdots [[t_n]]$ definiert. Wir fassen $R[[t_1, \ldots, t_n]]$ als R-Algebra mit den ausgezeichneten Elementen $t_1, \ldots, t_n$ auf. Wir können analog auch $R[[G]]$ für einen Monoid definieren, wenn es für jedes $g \in G$ nur endlich viele $\nu, \mu \in G$ mit $\nu\mu = g$ gibt, damit die Summe in der Definition von $\cdot$ wieder nur endlich ist.

Die Elemente von $R[[t_1, \ldots, t_n]]$ heißen Potenzreihen in $t_1, \ldots, t_n$ über R. Jedes $f \in R[[t_1, \ldots, t_n]]$ kann in der Form

$$f = \sum_{i_1, \ldots, i_n \geq 0} a_{i_1, \ldots, i_n} t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n}$$

mit $a_{i_1, \ldots, i_n} \in R$ geschrieben werden.

3.41 Lemma. *Sei R kommutativ.*

1. *Es gilt*

$$R[[t_1, \ldots, t_n]]^\times = \left\{ \sum_{i_1, \ldots, i_n \geq 0} a_{i_1, \ldots, i_n} t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n} \;\middle|\; a_{i_1, \ldots, i_n} \in R \text{ und } a_{0, \ldots, 0} \in R^\times \right\}.$$

2. *Ist R ein Körper, so ist $R[[t_1, \ldots, t_n]]$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = \sum_{i=1}^n t_i R[[t_1, \ldots, t_n]]$.*

Beweis. Zu 1. Die Inklusion „$\subseteq$“ ist unmittelbar einsichtig. Für „$\supseteq$“ sei f ein Element der rechten Seite. Ohne Einschränkung können wir nach Normierung $a_{0, \ldots, 0} = 1$ annehmen. Setze $g = 1 - f$. Dann können wir $h = \sum_{i=0}^\infty g^i \in R[[t_1, \ldots, t_n]]$ definieren und es gilt wie bei der geometrischen Reihe $h(1 - g) = hf = 1$.

Zu 2. Folgt direkt aus Aussage 1. $\square$

Wir können in den Reihen auch endliche Hauptteile erlauben: Die Laurentreihenringe $R((t_1, \ldots, t_n))$ in den Variablen $t_1, \ldots, t_n$ über R bestehen aus den Laurentreihen

$$f = \sum_{i_1, \ldots, i_n \geq m} a_{i_1, \ldots, i_n} t_1^{i_1} \cdots t_n^{i_n}$$

mit $a_{i_1, \ldots, i_n} \in R$ und $m \in \mathbb{Z}$. Addition und Multiplikation werden wie erwartet definiert und involvieren für jeden Koeffizienten des Ergebnis nur endlich viele Operationen in R. Der Laurentreihenring $R((t_1, \ldots, t_n))$ wird wieder als R-Algebra mit den ausgezeichneten Elementen $t_1, \ldots, t_n$ aufgefaßt.

Für einen Körper k kann man mit dem Lemma leicht sehen, daß $k((t))$ ebenfalls ein Körper ist und das speziell $k((t)) \cong \mathrm{Quot}(k[[t]])$ gilt.

3.9 Symmetrische Polynome

Sei R kommutativer Ring und $\mathrm{Aut}_R(R[t_1,\dots,t_n])$ die Automorphismengruppe der R-Algebra $R[t_1,\dots,t_n]$. Wir wollen einen Monomorphismus $\phi : S_n \to \mathrm{Aut}_R(R[t_1,\dots,t_n])$ und somit eine Operation von S_n auf $R[t_1,\dots,t_n]$ durch $\sigma \cdot f = \phi(\sigma)(f)$ definieren.

Sei $\sigma \in S_n$. Wir erhalten den Einsetzhomomorphismus $\phi(\sigma) : R[t_1,\dots,t_n] \to R[t_1,\dots,t_n]$, $f \mapsto f(t_{\sigma(1)},\dots t_{\sigma(t_n)})$. Offenbar gilt $\phi(\sigma) \in \mathrm{Aut}_R(R[t_1,\dots,t_n])$, da $\phi(\sigma) \in \mathrm{End}_R(R[t_1,\dots,t_n])$ und da $\phi(\sigma)$ bijektiv ist. Ferner ist leicht einsehbar, daß $\phi : S_n \to \mathrm{Aut}_R(R[t_1,\dots,t_n])$ ein Monomorphismus ist. Damit gilt $\sigma(f+g) = \sigma f + \sigma g$, $\sigma(fg) = (\sigma f)(\sigma g)$ und $\sigma(rf) = r(\sigma f)$ für alle $f, g \in R[t_1,\dots,t_n]$, $r \in R$ und $\sigma \in S_n$.

Sei $G \leq S_n$ und $R[t_1,\dots,t_n]^G = \{f \mid f \in R[t_1,\dots,t_n] \text{ und } \sigma f = f\}$. Dann ist $R[t_1,\dots,t_n]^G$ ein Teilring von $R[t_1,\dots,t_n]$, und die Elemente von $R[t_1,\dots,t_n]^G$ heißen G-invariante Polynome. Wir sind speziell an $G = S_n$ interessiert, und in diesem Fall heißen die G-invarianten Polynome auch symmetrische Polynome und $R[t_1,\dots,t_n]^G$ Ring der symmetrischen Polynome.

Sei $f \in R[t_1,\dots,t_n][t]$ mit

$$f = \prod_{i=1}^{n}(t - t_i) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i s_i t^{n-i} \tag{3.42}$$

und $s_i \in R[t_1,\dots,t_n]$. Es gilt beispielsweise $s_0 = 1$, $s_1 = \sum_{i=1}^n t_i, \dots, s_n = \prod_{i=1}^n t_i$. Um sich die allgemeine Form der s_i klarzumachen, multipliziere man f „im Kopf“ aus! Die s_i hängen im übrigen auch von n ab.

Wir können die Operation von S_n auf $R[t_1,\dots,t_n]$ auf $R[t_1,\dots,t_n][t]$ durch $\sigma t = t$ fortsetzen.

3.43 Lemma. *Die s_i sind symmetrisch und homogen vom Grad i, für $0 \leq i \leq n$.*

Beweis. Es gilt $\sigma f = \prod_{i=1}^n (t - t_{\sigma(i)}) = \prod_{i=1}^n (t - t_i) = f$. Wegen $\sigma t = t$ folgt $\sigma(s_i) = s_i$ für $0 \leq i \leq n$ nach (3.42). Die Aussage über die Homogenität folgt, wenn man f explizit ausmultipliziert und die s_i hinschreibt. $\square$

3.44 Definition. Das Polynom s_i heißt das i-te elementar-symmetrische Polynom in $t_1,\dots,t_n$, für $1 \leq i \leq n$.

3.45 Satz. *Jedes symmetrische Polynom in $t_1,\dots,t_n$ läßt sich als Polynom in $s_1,\dots,s_n$ schreiben. Die $s_1,\dots,s_n$ sind algebraisch unabhängig über R.*

Beweis. Wir schicken eine Definition und eine Bemerkung über elementar-symmetrische Polynome voraus.

Zu Beweiszwecken definieren wir das Gewicht des Monoms $t_1^{e_1}\cdots t_n^{e_n}$ als $w(t_1^{e_1}\cdots t_n^{e_n}) = \sum_{i=1}^n ie_i$ und das Gewicht von $f \in R[t_1,\ldots,t_n]$ als das Maximum der Gewichte der in f vorkommenden Monome. Dann folgt aus $w(f) \le d$ für den Totalgrad $\deg(f(s_1,\ldots,s_n)) \le d$.

Sei $(s_i)_0 = s_i(t_1,\ldots,t_{n-1},0)$. Ersetzen von t_n durch 0 und Kürzen von t in Gleichung (3.42) zeigt, daß $(s_i)_0$ für $1 \le i \le n-1$ die elementar-symmetrischen Polynome in den Variablen $t_1,\ldots,t_{n-1}$ sind.

Sei $f \in R[t_1,\ldots,t_n]^{S_n}$ mit $\deg(f) = d$. Wir zeigen, daß es $g \in R[t_1,\ldots,t_n]$ mit $w(g) \le d$ und $f = g(s_1,\ldots,s_n)$ gibt. Der Beweis erfolgt per Induktion über n. Für $n = 1$ gilt $s_1 = t_1$ und die Aussage is korrekt. Wir nehmen nun an, die Aussage sei korrekt für $n-1$ Variablen für $n \ge 2$ und führen eine weitere Induktion über d durch.

Für $d = 0$ ist f konstant und die Aussage ist korrekt. Sei nun $d > 0$. Nach der Induktionsannahme gibt es $g_1 \in R[t_1,\ldots,t_{n-1}]$ mit $w(g_1) \le d$ und $f(t_1,\ldots,t_{n-1},0) = g_1((s_1)_0,\ldots,(s_{n-1})_0)$. Wegen $\deg((s_i)_0) = \deg(s_i)$ und obiger Bemerkung gilt $\deg(g_1(s_1,\ldots,s_{n-1})) \le d$. Setze $f_1 = f - g_1(s_1,\ldots,s_{n-1})$. Dann gilt $\deg(f_1) \le d$ und f_1 ist symmetrisch. Weiter ist $f_1(t_1,\ldots,t_{n-1},0) = 0$, also gilt $t_n | f_1$ und wegen der Symmmetrie $s_n | f_1$ in $R[t_1,\ldots,t_n]$. Also gibt es $f_2 \in R[t_1,\ldots,t_n]$ mit $f_1 = s_n f_2$, f_2 symmetrisch und $\deg(f_2) \le d-n < d$. Nach der Induktionsannahme gibt es $g_2 \in R[t_1,\ldots,t_n]$ mit $w(g_2) \le d-n$ und $f_2 = g_2(s_1,\ldots,s_n)$. Mit $g = g_1 + t_n g_2 \in R[t_1,\ldots,t_n]$ folgt $f = g(s_1,\ldots,s_n)$ und $w(g) \le d$, was zu beweisen war.

Der Beweis der algebraischen Unabhängigkeit erfolgt wieder mit Induktion über n. Für $n = 1$ ist die Aussage korrekt. Sei $f \in R[t_1,\ldots,t_n]$ ein Polynom kleinsten Totalgrads mit $f(s_1,\ldots,s_n) = 0$. Schreibe $f = \sum_{i=0}^m f_i t_n^i$ mit $f_i \in R[t_1,\ldots,t_{n-1}]$. Hier gilt $f_0 \ne 0$, da sonst $f = t_n g$, $s_n g(s_1,\ldots,s_n) = 0$ und damit $g(s_1,\ldots,s_n) = 0$ gälte, im Widerspruch zur Minimalität von f. Wir erhalten $f(s_1,\ldots,s_n) = \sum_{i=0}^m f_i(s_1,\ldots,s_{n-1}) s_n^i$ und nach $t_n \mapsto 0$ ergibt sich $f_0(s_1,\ldots,s_{n-1}) = 0$, im Widerspruch zur Induktionsannahme. □

Mit Galoistheorie und Aussagen über ganze Ringerweiterungen und über transzendente Körpererweiterungen läßt sich dieser Satz relativ gesehen leichter und kürzer, aber nicht konstruktiv beweisen. Die Relevanz des angegebenen Beweises liegt daher vornehmlich darin, daß er ein Verfahren zur Berechnung der g liefert.

Das Polynom g ist im übrigen eindeutig bestimmt, was aus der algebraischen Unabhängigkeit der s_i folgt.

3.46 Korollar. *Sei $\psi : R[t_1,\ldots,t_n] \to R[t_1,\ldots,t_n]$ der durch $t_i \mapsto s_i$ definierte Einsetzhomomorphismus. Dann gilt $\mathrm{im}(\psi) = R[t_1,\ldots,t_n]^{S_n}$ und $\ker(\psi) = \{0\}$.*

Beweis. Die Inklusion $\mathrm{im}(\psi) \subseteq R[t_1, \ldots, t_n]^{S_n}$ ist klar. Der Rest ist genau die Aussage des Satzes, nur anders formuliert. □

Wir betrachten kurz zwei Anwendungen, in denen symmetrische Polynome vorkommen.

Sei $f = \prod_{i=1}^{n}(t - t_i)$. Die Diskriminante von f ist definiert als

$$D(f) = \prod_{i<j}(t_i - t_j)^2 = (-1)^{n(n-1)/2}\prod_{i\neq j}(t_i - t_j).$$

Es handelt sich hierbei um ein symmetrisches Polynom, welches folglich als Polynom g_f in den Koeffizienten von f geschrieben werden kann.

3.47 Beispiel. Für $f = t^2 + bt + c$ gilt $D(f) = b^2 - 4c$. Für $f = x^3 + at + b$ gilt $D(f) = -4a^3 - 27b^2$.

Diskriminanten kann man von jedem (normierten) Polynom über einem kommutativen Ring bilden, indem man die die Koeffizienten von f für die t_i in g_f einsetzt.

Die Diskriminante eines Polynoms ist eine Invariante, mit Hilfe derer man feststellen kann, ob f mehrfache Nullstellen über dem Grundring R oder einem Erweiterungsring S von R besitzt. Ist das Polynom f beispielsweise über $\mathbb{Z}$ gegeben, so gilt $D(f) \in \mathbb{Z}$ und die Primfaktoren p von $D(f)$ liefern genau die Charakteristiken der endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ mit $q = p^m$ (und $m \leq \deg(f)$), über denen das Polynom mehrfache Nullstellen hat. Dies findet Anwendung in der algebraischen Zahlentheorie.

Ein weiteres, einfaches Beispiel aus der algebraischen Geometrie: Wenn man die Nullstellenmenge eines Polynoms als geometrische Struktur betrachtet, dann faßt man mehrfache Nullstellen als irreguläre (singuläre) Punkte der geometrischen Struktur auf. Sei beispielsweise $f = (y - x)(y + x) = y^2 - x^2 \in R[x, y]$. Die Nullstellenmenge von f in $\mathbb{R}^2$ ist gleich der Vereinigung der Geraden mit Steigung 1 und -1 durch den Ursprung. Für die Diskriminante von f als Polynom in y gilt nach obiger Formel $D(f) = 4x^2$. Daher hat f dann und nur dann eine doppelte Nullstelle in y, wenn $x = 0$ ist. Dies ist offenbar richtig, da sich die beiden Geraden genau im Ursprung $x = 0$, $y = 0$ schneiden.

Die zweite Anwendung betrifft die Beziehung zwischen den Koeffizienten eines Polynoms und den Potenzsummen seiner Nullstellen, welche ebenfalls symmetrische Polynome sind. Die Potenzsummen von $f = \prod_{i=1}^{n}(t - t_i)$ sind definiert als

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} t_j^i.$$

Sie können wie folgt in den elementar-symmetrischen Polynomen geschrieben werden.

Sei zunächst $R = \mathbb{Z}$. Wir verwenden die Einbettungen $\mathbb{Z}[t] \to \mathbb{Q}(t) \to \mathbb{Q}((t))$.

3.48 Satz. *Für* $g = \prod_{i=1}^n (1 - t_i t)$ *und* $S_j = \sum_{i=1}^n t_i^j$ *gilt:*

1. $g = \exp\bigl(-\sum_{j=1}^\infty S_j t^j/j\bigr)$.
2. $g'/g = -\sum_{j=1}^\infty S_j t^{j-1}$.
3. $(-1)^k k\sigma_k + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \sigma_i S_{k-i} = 0$ *für* $1 \le k \le n$ *und*
   $\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_i S_{k-i} = 0$ *für* $k \ge n$.

Beweis. Zu 1. Wir rechnen mit $\log(1-t) = -\sum_{j=1}^\infty t^j/j$ und $\exp(t) = \sum_{j=0}^\infty t^j/j!$. Es gilt $\log((1-t_1)(1-t_2)) = \log(1-t_1) + \log(1-t_2)$ und $\exp(\log(1-t)) = 1 - t$. Wir erhalten $\log(g) = -\sum_{j=1}^\infty S_j t^j/j$ wegen der Regel für log und $g = \exp(-\sum_{j=1}^\infty S_j t^j/j)$ durch Anwenden von exp.

Zu 2. Ableiten beider Seiten von $\log(g) = -\sum_{j=1}^\infty S_j t^j/j$ liefert Aussage 2.

Zu 3. Wegen $g = \sum_{i=0}^n (-1)^i s_i t^i$ und $g' = \sum_{i=0}^n i(-1)^i s_i t^{i-1}$ folgt Aussage 3 durch Koeffizientenvergleich in der Gleichung $g' + g\sum_{j=1}^\infty S_j t^{j-1} = 0$, welche nach Aussage 2 gilt. □

Im Satz können wir nun R und die t_i speziell vorgeben: Aussage 1 gilt dann für jeden Integritätsring R der Charakteristik Null, da $\mathbb{Q}$ Teilkörper von $\mathrm{Quot}(R)$ ist und die Gleichung darin Sinn macht. Aussage 2 und Aussage 3 sind über $\mathbb{Z}$ definiert und gelten daher für jeden Ring und beliebige Werte von t_i.

Die Zuordnung $k[t]\backslash\{0\} \to k((t))$, $f \mapsto f'/f$ für einen beliebigen Körper k heißt im übrigen logarithmische Ableitung und erfüllt $(fg)'/(fg) = f'/f + g'/g$.

Mittels Aussage 3 kann man die Koeffizienten eines Polynoms und die Potenzsummen ineinander umrechnen, sofern die Charakteristik größer als n ist. Diese Relationen heißen Newtonsche Relationen.

Der Satz kann für Endomorphismen endlichdimensionaler Vektorräume angewendet werden. Ist f das charakteristische Polynom eines Endomorphismus ϕ, so wird f durch die Spuren der Potenzen von ϕ eindeutig bestimmt, vorausgesetzt, die Charakteristik ist groß genug. Das ist vorteilhaft, wenn die Spuren besser zugänglich sind als die Koeffizienten von f. Eine Anwendung in diese Richtung erfolgt bei den Zetafunktionen von algebraischen Kurven über endlichen Körpern bzw. den charakteristischen Polynomen der zugehörigen Frobeniusendomorphismen.

Kapitel 4

Moduln I

Ein Modul ist ein „Vektorraum" über K, wobei K nicht unbedingt ein Körper, sondern nur noch ein Ring zu sein braucht. Die Modultheorie kann als gemeinsame Verallgemeinerung der Ringtheorie und der linearen Algebra angesehen werden. Da die Theorie sehr umfangreich ist, können hier im wesentlichen nur grundlegende Definitionen und Sätze angeführt werden.

4.1 Grundlagen

Im folgenden bezeichnet R immer einen (nicht notwendigerweise kommutativen) Ring mit Eins. Ringhomomorphismen bilden Einselemente auf Einselemente ab.

4.1 Definition. Sei M eine abelsche Gruppe. Wir betrachten eine Multiplikation $\cdot : R \times M \to M$ mit

$$r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y,\ (r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x \text{ (Distributivgesetze)}$$
$$(sr) \cdot x = s \cdot (r \cdot x) \text{ (Assoziativitätsgesetz)}$$

für alle $r, s \in R$ und $x, y \in M$. Außerdem gelte $1 \cdot x = x$ für alle $x \in M$. Dann heißt M zusammen mit $\cdot$ ein R-Linksmodul.

Wie bei der Multiplikation in Ringen lassen wir $\cdot$ fort und schreiben nur rx statt $r \cdot x$.

4.2 Beispiel. Jeder Vektorraum über einem Körper K ist ein K-Linksmodul. Jeder Ring R und jedes Linksideal von R ist ein R-Linksmodul. Abelsche Gruppen M sind $\mathbb{Z}$-Linksmoduln.

Ist M ein R-Linksmodul und $r \in R$, so ist die Abbildung $x \mapsto rx$ ein Endomorphismus der abelschen Gruppe M, entsprechend erhalten wir einen Homomorphismus $\phi : R \to \mathrm{End}(M)$. Ist umgekehrt M eine abelsche Gruppe und

$\phi : R \to \mathrm{End}(M)$ ein Homomorphismus, so definieren wir $rx = \phi(r)(x)$ für alle $r \in R$ und $x \in M$ und erhalten so einen R-Linksmodul M. Dies liefert also auch eine alternative Definition von R-Linksmodul.

Bei Linksmoduln wird R von links an M multipliziert. Analog zu Definition 4.1 definiert man R-Rechtsmoduln.

Für nicht kommutative Ringe ist es im allgemeinen nicht möglich, einen R-Linksmodul M zu einem R-Rechtsmodul zu machen, indem man $xr = rx$ definiert. Wegen der Assoziativgesetze müßte sonst gelten $(r_1r_2)x = x(r_1r_2) = (xr_1)r_2 = r_2(xr_1) = r_2(r_1x) = (r_2r_1)x$ für $r_1, r_2 \in R$ und $x \in M$. Für kommutative Ringe ergibt sich jedoch kein Problem und man läßt die Unterscheidung in Links- und Rechtsmoduln üblicherweise fallen.

Ist M ein R-Linksmodul, so kann man M auf die offensichtliche Weise zu einem R^{opp}-Rechtsmodul machen, wobei der Ring R^{opp} aus R entsteht, indem man die Multiplikation in R andersherum definiert bzw. ausführt. Entsprechend sind die Begriffe Linksmodul und Rechtsmodul symmetrisch und es genügt, sich nur auf Linksmoduln zu konzentrieren. Daher soll im folgenden ein R-Modul immer einen R-Linksmodul bezeichnen.

Bei Moduln M ist es häufig praktisch, zuerst an die additive Struktur und dann an die R-lineare Struktur zu denken.

4.3 Definition. Ein Homomorphismus $f : M \to N$ der R-Moduln M und N ist ein Homomorphismus der abelschen Gruppen M und N, welcher R-linear ist, für den also $f(rx) = rf(x)$ für alle $x \in M$ und $r \in R$ gilt.

Die Menge der Homomorphismen von M nach N wird mit $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ bezeichnet. Für $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ definieren wir $f + g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ durch $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Damit wird $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ zu einer abelschen Gruppe.

Wir benötigen weitere Definitionen, die auf der Hand liegen: Ist $U \subseteq M$ eine Untergruppe des R-Moduls M und gilt $RU \subseteq U$, so heißt U ein Untermodul von M. Für zwei Untermoduln U, V von M ist die Summe abelscher Gruppen $U + V$ wieder ein Untermodul von M (also unter Multiplikation mit R abgeschlossen), ebenso $U \cap V$. Wie bei Vektorräumen definieren wir Linearkombination, Erzeugendensystem, endlich erzeugt, linear unabhängig über R, Basis, innere und äußere direkte Summe, Mono-, Epi-, Iso-, Endo- und Automorphismen. Hintereinanderausführung von Abbildungen liefert einen Homomorphismus $\mathrm{Hom}_R(M, N) \times \mathrm{Hom}_R(N, P) \to \mathrm{Hom}_R(M, P)$. Die zu einem Isomorphismus inverse Abbildung ist wieder ein Isomorphismus. Sei $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Dann sind der Kern $\ker(f)$ und das Bild $\mathrm{im}(f)$ als abelsche Gruppen wegen der R-Linearität von f Untermoduln von M bzw. N. Für einen Untermodul U von M können wir M/U als Faktorgruppe abelscher Gruppen betrachten. Wegen $RU \subseteq U$ können wir auf den Klassen vertreterweise eine Multiplikation mit R definieren, dies macht M/U zu einem R-Modul, dem Faktormodul von M nach U. Der kanonische Epimorphismus abelscher Gruppen $\pi : M \to M/U$ ist dann (per Definition) R-linear, also $\pi \in \mathrm{Hom}_R(M/U, N)$. Der Kokern eines $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ ist als $N/\mathrm{im}(f)$ definiert.

Es gelten wieder Homomorphie- und Isomorphiesätze:

4.4 Satz. *Seien M, N R-Moduln.*

(i) *Für $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ und U einen Untermodul von M mit $U \subseteq \ker(f)$ gibt es genau ein $g \in \mathrm{Hom}_R(M/U, N)$ mit $f = g \circ \pi$, wobei $\pi \in \mathrm{Hom}_R(M, M/U)$ der kanonische Epimorphismus ist.*

(ii) *Für $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ gilt $M/\ker(f) \cong \mathrm{im}(f)$.*

(iii) *Für Untermoduln U, V von M gilt $(U + V)/V \cong U/(U \cap V)$.*

(iv) *Für Untermoduln U, V von M mit $U \subseteq V$ gilt $(M/U)/(V/U) \cong M/V$.*

Beweis. Für die unterliegenden abelschen Gruppen wurden diese Aussagen bereits in der Gruppentheorie gezeigt.

Zu (i) und (ii). Es gibt es zu jedem $x \in M/U$ ein $y \in \pi^{-1}(\{x\})$. Ist auch $r \in R$ beliebig, so gilt $g(rx) = g(r\pi(y)) = g(\pi(ry)) = f(ry) = rf(y) = rg(\pi(y)) = rg(x)$. Daher ist g R-linear, also $g \in \mathrm{Hom}_R(M/U, N)$, und Aussage ($i$) ist bewiesen. Aussage (ii) ist dann eine direkte Folgerung aus (i).

Die Isomorphismen aus (iii) und (iv) werden jeweils durch einen kanonischen Epimorphismus abelscher Gruppen induziert. Da diese kanonischen Epimorphismen hier zusätzlich R-linear sind, sind auch die induzierten Isomorphismen R-linear. $\square$

Wir kommen jetzt zu ein paar grundlegenden Begriffen, die bei Vektorräumen nur trivial auftreten oder zusammenfallen.

4.5 Definition. Sei M ein R-Modul. Für einen Untermodul U von M heißt $\mathrm{Ann}(U) = \{r \in R \,|\, rx = 0 \text{ für alle } x \in U\}$ der Annulator von U. Ferner heißt M treu, wenn $\mathrm{Ann}(M) = \{0\}$ gilt.

Die Menge der Torsionselemente (oder Nullteiler) von M ist $\mathrm{Tor}(M) = \{x \in M \,|\, \mathrm{Ann}(Rx) \neq \{0\}\} = \{x \in M \,|\, \exists r \in R\backslash\{0\} \text{ mit } rx = 0\}$. Der Modul M heißt ein Torsionsmodul, wenn $\mathrm{Tor}(M) = M$ ist, und torsionsfrei, wenn $\mathrm{Tor}(M) = \{0\}$ gilt.

Der Annulator ist ein Untermodul des R-Moduls R, also ein Linksideal von R. Für einen torsionsfreien R-Modul ist R notwendigerweise nullteilerfrei (für

Nullteiler $a, b \in R$ und $x \in M$ ist entweder $bx = 0$ oder $a(bx) = (ab)x = 0$). Ein typisches Beispiel erhalten wir mit $M = R/I$, wobei I ein Ideal in R ist. Hier gilt $\mathrm{Ann}(M) = I$ und $\mathrm{Tor}(M) = M$.

4.6 Satz. *Sei R ein Integritätsring und M ein R-Modul. Dann ist* $\mathrm{Tor}(M)$ *ein Untermodul von M und $M/\mathrm{Tor}(M)$ ist torsionsfrei.*

Beweis. Für $x, y \in \mathrm{Tor}(M)$ gibt es $r, s \in R\backslash\{0\}$ mit $rx = sy = 0$. Dann gilt $rs \neq 0$, da R nullteilerfrei ist, und $rs(x-y) = 0$. Daher $x - y \in M$. Ferner gilt für $s \in R$ beliebig $r(sx) = 0$, also $sx \in \mathrm{Tor}(M)$. Daher ist $\mathrm{Tor}(M)$ ein Untermodul von M.

Sei $x \in M$ und $r \in R\backslash\{0\}$ mit $rx \in \mathrm{Tor}(M)$. Dann gibt es $s \in R\backslash\{0\}$ mit $s(rx) = 0$, folglich $(sr)x = 0$ und $sr \neq 0$. Es folgt $x \in \mathrm{Tor}(M)$ und $M/\mathrm{Tor}(M)$ ist daher torsionsfrei. □

4.7 Definition. Sei M ein R-Modul. Der Rang von M ist das Maximum der Kardinalitäten von über R linear unabhängigen Teilmengen von M und wird mit $\mathrm{rank}(M)$ bezeichnet.

Die Länge von M ist die Länge, also das Maximum der Anzahl der Inklusionen, von echt absteigenden Ketten $\cdots \supsetneq M_i \supsetneq M_{i+1} \supsetneq \cdots$ von Untermoduln von M mit $i \in \mathbb{Z}$ und wird mit $\mathrm{len}(M)$ bezeichnet.

Zum Beispiel hat $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ den Rang eins und unendliche Länge. Der Nullmodul $\{0\}$ hat Länge Null. Für Vektorräume stimmen Rang und Länge überein und Rang und Länge sind unterschiedliche Verallgemeinerungen des Dimensionsbegriffs von Vektorräumen auf Moduln.

4.8 Definition. Der Modul M heißt frei, wenn er eine Basis besitzt.

Der Begriff „frei" soll heißen, daß es ein Erzeugendensystem von M gibt, welches frei von nicht trivialen R-linearen Relationen ist. Die Moduln R^n sind frei, die Einheitsvektoren liefern eine Basis. Besitzt ein Modul M eine endliche Basis mit n Elementen, so gilt $M \cong R^n$, wobei der Isomorphismus durch die Abbildung gegeben ist, die den Elementen von M die Koordinaten in R bezüglich der Basiselemente zuordnet.

Nicht jeder Modul ist frei: Als Beispiel betrachte man den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Im allgemeinen können nur torsionsfreie Moduln frei sei.

Eine Basis eines R-Moduls M ist eine maximale Menge von R-linear unabhängigen Elementen aus M, durch Hinzunahme eines Elements geht die lineare Unabhängigkeit verloren. Trotzdem brauchen Basen nicht die gleiche Kardinalität zu besitzen. Es gibt beispielsweise einen (nicht-kommutativen) Ring R mit 1, für den $R^n \cong R^m$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ gilt (siehe Abschnitt 9.5 oder Meyberg 1, Seite 178).

4.9 Satz. *Sei M ein R-Modul.*

(i) *Seien $x_i \in M$ mit $i \in I$ und I eine Indexmenge. Dann ist M genau dann frei und die x_i sind eine Basis, wenn es für jeden Modul N und beliebige Elemente $y_i \in N$ genau einen Homomorphismus $f : M \to N$ mit $f(x_i) = y_i$ für alle $i \in I$ gibt.*

(ii) *Ist R kommutativ, so hat jede Basis von M die gleiche Kardinalität.*

Beweis. Zu (i). Beweis ist einfach und vom Prinzip ähnlich wie bei den Polynomringen.

Zu (ii). Sei B eine Basis von M. Für $R = \{0\}$ ist der Satz korrekt, alle Basen sind leer. Ansonsten besitzt R eine $1 \neq 0$ und somit ein ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$. Dann ist $\mathfrak{m}M$ ein Untermodul von M und $M/\mathfrak{m}M$ ein $R/\mathfrak{m}$-Modul. Weiter ist $B' = \{x + \mathfrak{m}M \mid x \in B\}$ eine Basis des $R/\mathfrak{m}$-Moduls $M/\mathfrak{m}M$, wie man leicht nachrechnet. Da $R/\mathfrak{m}$ ein Körper ist, handelt es sich bei $M/\mathfrak{m}M$ um einen $R/\mathfrak{m}$-Vektorraum. Es folgt $\#B' = \dim(M/\mathfrak{m}M)$ ist eindeutig bestimmt. □

Aus (i) folgt, daß jeder endlich erzeugte R-Modul N epimorphes Bild eines freien Moduls R^n ist.

Eine andere als die oben erwähnte Situation nicht freier Moduln tritt beispielsweise für Integritätsringe R auf, die keine Hauptidealringe sind. Ist I ein Ideal, welches nur von mindestens zwei Elementen erzeugt werden kann, so ist I als R-Modul nicht frei. Man sieht dies wie folgt: Wäre I frei, so müßte I wegen $\operatorname{rank}(I) = 1$ eine einelementige Basis besitzen. Dies aber bedeutet gerade, daß I ein Hauptideal ist.

Auch ist I dann zwar ein Untermodul von R, aber kein direkter Summand von R (wie das bei Untermoduln von Vektorräumen der Fall wäre). Dies gilt, weil aus $R \cong I \oplus N$ zunächst $N = \{0\}$ folgen würde, denn der Rang von R ist eins und der von $I \oplus N$ für $N \neq \{0\}$ größer gleich zwei, da N mit R torsionsfrei sein muß. Gilt $R \cong I$ und bezeichnet $\phi : R \to I$ den Isomorphismus, so ist $I = \phi(R) = R\phi(1)$ und I ist ein von $\phi(1)$ erzeugtes Hauptideal, im Widerspruch zur Annahme. Entsprechend ist auch nicht jeder (torsionsfreie) R-Modul von der Form R^n.

4.2 Matrizen über Ringen

Ähnlich wie in der linearen Algebra sind Matrizen auch in der Modultheorie nützliche Objekte. Wir wollen nun Matrizen über Ringen betrachten.

Wir befassen uns zunächst mit Determinanten von Matrizen über beliebigen, kommutativen Ringen. Sei $S = \mathbb{Z}[x_{1,1}, \ldots, x_{n,n}, y_{1,1}, \ldots, y_{n,n}]$, $M = (x_{i,j})_{i,j}$

und $N = (y_{i,j})_{i,j}$, so daß $M, N \in S^{n\times n}$ gilt. Dann können wir M auch als Matrix über dem Quotientenkörper $\mathrm{Quot}(S)$ von S auffassen und es ist $\det(M) = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \cdots x_{n,\sigma(n)} \in S$, wie man es aus der linearen Algebra über Körpern gewöhnt ist. Analoges gilt für N. Für Determinanten gilt wie üblich $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ und, daß det eine alternierende Multilinearform ist. Man beachte, daß dies Gleichungen im Polynomring $S = \mathbb{Z}[x_{1,1}, \ldots, x_{n,n}, y_{1,1}, \ldots, y_{n,n}]$ sind, da Determinanten hier nichts anderes als Polynome in den Koeffizienten von M und N sind. Ist $M_{i,j} \in S^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte von M entsteht, so gilt ferner $\det(M) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} x_{i,j} \det(M_{i,j})$.

Sei nun R ein beliebiger, kommutativer Ring. Da die $x_{i,j}$ und $y_{i,j}$ nirgends im Nenner auftreten, können wir sie auch durch spezielle Werte aus R ersetzen. Daher gelten die genannten Eigenschaften aufgrund der Homomorphieeigenschaft des Einsetzhomomorphismus auch für Matrizen über R.

Wir arbeiten auch häufig über Integritätsringen R. Hier kann man alles in $K = \mathrm{Quot}(R)$ einbetten und so lineare Algebra über K anwenden. Zum Beispiel sind die Spalten- und Zeilenvektoren von $M \in R^{n\times n}$ genau dann über R linear unabhängig, wenn $\det(M) \neq 0$ gilt. Man beachte, daß linear unabhängig über R und linear unabhängig über K für $K = \mathrm{Quot}(R)$ äquivalent sind (man kann Nenner rausmultiplizieren).

4.10 Satz. *Sei R ein kommutativer Ring.*

(*i*) *Sei $A \in R^{n\times n}$, $x = (x_i)^t \in R^n$ und $b = (b_i)^t \in R^n$ mit $Ax = b$. Ist B_i die Matrix, deren i-te Spalte gleich b ist und die ansonsten mit A übereinstimmt, so gilt $\det(B_i) = x_i \det(A)$.*

(*ii*) *Sei $M \in R^{n\times n}$ und $M' = ((-1)^{i+j} \det(M_{j,i}))_{i,j} \in R^{n\times n}$, wobei $M_{i,j}$ die Matrix ist, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte von M entsteht. Dann gilt $MM' = M'M = \det(M)I_n$.*

(*iii*) *Eine Matrix $M \in R^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(M)$ in R invertierbar ist.*

Beweis. (*i*): Die i-te Spalte b in B_i ist gleich der Linearkombination der Spalten von A mit den Koeffizienten x_i. Sei $A_{i,j}$ die Matrix, die an der i-ten Spalte die j-Spalte von A hat und ansonsten mit A übereinstimmt. Dann gilt $\det(A_{i,j}) = \delta_{i,j}\det(A)$ (Kronecker-Delta) und aufgrund der Linearität der Determinante in der i-ten Spalte ergibt sich $\det(B_i) = \sum_{j=1}^n x_j \det(A_{i,j}) = x_i \det(A)$.

(*ii*): Für S statt R folgt die Behauptung als Polynomidentität, indem man die Einträge von M' nach (*i*) unter Verwendung der obigen Entwicklung für Determinanten und durch Kürzen von $\det(M)$ berechnet. Für $M' = (x_{i,j})_{i,j}$ ergibt sich genauer $x_{i,j}\det(M) = \det(\hat{M}_{i,j})$, wobei $\hat{M}_{i,j}$ die Matrix ist, die aus M entsteht, wenn wir die i-te Spalte von M durch den j-ten Einheitsvektor multipliziert mit $\det(M)$ ersetzen. Dann gilt $\det(\hat{M}_{i,j}) = (-1)^{i+j}\det(M)\det(M_{j,i})$ nach der Entwicklungsformel, da die i-te Spalte in $\hat{M}_{i,j}$ Null ist außer in der j-ten Zeile, wo $\det(M)$ steht. Folglich $x_{i,j}\det(M) = (-1)^{i+j}\det(M)\det(M_{j,i})$. Da S nullteilerfrei ist und $\det(M) \neq 0$ gilt, folgt durch Kürzen $x_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(M_{j,i})$ als Polynomidentität.

Durch Spezialisierung der Variablen folgt die Behauptung dann auch für R.

(iii): Ist M invertierbar, so gilt $1 = \det(MM^{-1}) = \det(M)\det(M^{-1})$. Wegen $M^{-1} \in R^{n\times n}$ folgt auch $\det(M^{-1}) \in R$ und $\det(M)$ ist invertierbar in R.

Umgekehrt sei $M \in R^{n\times n}$ und M' wie in (ii). Ist $\det(M)$ invertierbar, so ist $M'/\det(M)$ über R definert und invers zu M. □

Satz 4.10, (i) ist als Cramersche Regel bekannt. Die Matrix M' in (ii) nennt man häufig Pseudoinverse von M.

Invertierbare Matrizen über Ringen heißen auch unimodular. Ist $T \in R^{n\times n}$, M ein R-Modul und $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in M$ mit $(a_1,\dots,a_n)T = (b_1,\dots,b_n)$, so ist jedes b_i eine Linearkombination der a_i und der von den b_i erzeugte Untermodul U_2 von M ist also ein Untermodul des von den a_i erzeugten Moduls U_1. Umgekehrt gilt für unimodulares T aber auch $(a_1,\dots,a_n) = (b_1,\dots,b_n)T^{-1}$, so daß sich jedes b_i als Linearkombination der a_i schreiben läßt und somit $U_1 = U_2$ gilt. Sind die a_i und die b_i Basen von M, so gibt es ein unimodulares $T \in R^{n\times n}$ mit $(a_1,\dots,a_n)T = (b_1,\dots,b_n)$.

4.11 Satz. *Für beliebiges T gilt mit obiger Notation* $\det(T)U_1 \subseteq U_2$ *und* $\det(T) \in \operatorname{Ann}(U_1/U_2)$.

Beweis. Mit Satz 4.10, (ii) und der Pseudoinversen T' von T gilt $TT' = \det(T)I_n$. Daraus folgt $\det(T)(a_1,\dots,a_n) = (a_1,\dots,a_n)TT' = (b_1,\dots,b_n)T' \in U_2^n$, also $\det(T)U_1 \subseteq U_2$. Die Aussage über den Annulator folgt daraus direkt. □

Typische unimodulare, elementare Transformationen sind durch folgende Operationen gegeben: Mit Einheit multiplizieren, Vertauschen, Vielfaches eines Elements zu einem anderen addieren. Über euklidischen Ringen läßt sich jede unimodulare Transformation in diese elementaren Transformationen faktorisieren, wie in Abschnitt 4.4 gezeigt wird.

4.3 Noethersche und Artinsche Moduln

In diesem Abschnitt sind aufsteigende und absteigende Ketten von Untermoduln von Interesse.

4.12 Definition. Ein Modul heißt noethersch, wenn jede aufsteigende Kette von Untermoduln $\{0\} = M_0 \cdots \subseteq M_i \subseteq M_{i+1} \subseteq \cdots$ stationär wird.

Ein Modul heißt artinsch, wenn jede absteigende Kette von Untermoduln $M = M_0 \cdots \supseteq M_i \supseteq M_{i+1} \supseteq \cdots$ stationär wird.

Zum Beispiel ist jeder Hauptidealring R als R-Modul noethersch, aber im allgemeinen nicht artinsch. Ist I ein Ideal von R, so ist R/I dann auch artinsch.

4.13 Satz. *Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Dann sind äquivalent.*

(*i*) *M ist noethersch.*

(*ii*) *Jede nichtleere Menge von Untermoduln von M besitzt ein maximales Element.*

(*iii*) *Für jede Familie von Untermoduln M_i mit $i \in I$ gibt es ein endliches $I_0 \subseteq I$ mit $\sum_{i\in I} M_i = \sum_{i\in I_0} M_i$.*

(*iv*) *Jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt.*

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Wenn (ii) nicht gilt, dann gibt es eine nicht-leere Menge X, die keinen maximalen Untermodul enthält. Zu jedem Modul aus X gibt es dann stets einen umfassenderen Modul aus X. Man kann daher (mittels Auswahlaxiom) eine aufsteigende, nicht stationäre Kette definieren.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: In der Menge aller Summen endlich vieler M_i gibt es ein maximales Element $N = \sum_{i\in I_0} M_i$, wobei $I_0 \subseteq I$ endlich ist. Wegen der Maximalität folgt $N + M_i = N$ für alle $i \in I$, also $\sum_{i\in I} M_i = N$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Bilden die M_i eine aufsteigende Kette, so gibt es ein j für welches $\sum_i M_i = M_j$. Daher ist die Kette stationär.

$(iv) \Rightarrow (iii)$: Seien a_j endlich viele Erzeuger von $\sum_{i\in I} M_i$. Für jedes j gibt es ein endliches $I_j \subseteq I$ mit $a_j \in \sum_{i\in I_j} M_i$. Dann leistet $I_0 = \cup_j I_j$ das Gewünschte.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Sei U ein Untermodul. Zu $I = U$ definiere $M_i = Ri$ für $i \in I$. Dann gilt $U = \sum_{i\in I} M_i = \sum_{i\in I_0} M_i$ für ein endliches $I_0 \subseteq I$. Also ist I_0 endliches Erzeugendensystem von U. □

Man beachte, daß in der Definition eines noetherschen Ring R Ideale, also R-Links- und Rechtmoduln betrachten werden. Mit unserer Definition braucht daher ein noetherscher Ring nicht als R-Modul noethersch zu sein.

4.14 Satz. *Sei M ein R-Modul.*

(*i*) *Ist M noethersch, so auch U und M/U für alle Untermoduln U von M.*

(*ii*) *Sind U und M/U noethersch für einen Untermodul U von M, so ist auch M noethersch.*

(*iii*) *Ist M endlich erzeugt und R als R-Modul noethersch, so ist M noethersch.*

Beweis. (*i*): Aufsteigende Ketten von Untermoduln in U sind auch aufsteigende Ketten von Untermoduln von M und werden daher stationär. Analoges gilt für aufsteigendene Ketten von Untermoduln in M/U und ihre Urbilder in M.

(*ii*): Sei U_i eine aufsteigende Kette in M und $U_i' = U \cap U_i$, $U_i'' = (U_i + U)/U$. Es gibt ein n, so daß $U_t' = U_n'$ und $U_t'' = U_n''$ für alle $t \geq n$ gilt. Wir zeigen nun $U_t = U_n$ für $t \geq n$. Sei $x \in U_t$. Wegen $U_t'' = U_n''$ gibt es $y \in U_n$ mit $x - y \in U$. Folglich $x - y \in U \cap U_t = U_t' = U_n' \subseteq U_n$. Es ergibt sich $x \in U_n$.

(*iii*): Zunächst ist R^n nach (*ii*) noethersch, indem man $R^n/R \cong R^{n-1}$ betrachtet und Induktion anwendet. Als epimorphes Bild von R^n ist dann auch M wiederum nach (*ii*) noethersch. □

Es folgen die zu den beiden vorstehenden Satzen analogen Sätze für artinsche Moduln.

4.15 Satz. *Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Dann sind äquivalent.*

(*i*) *M ist artinsch.*

(*ii*) *Jede nichtleere Menge von Untermoduln vom M besitzt ein minimales Element.*

(*iii*) *Für jede Familie von Untermoduln M_i mit $i \in I$ gibt es ein endliches $I_0 \subseteq I$ mit $\cap_{i\in I} M_i = \cap_{i \in I_0} M_i$.*

Beweis. (*i*) ⇒ (*ii*): Wenn (*ii*) nicht gilt, dann gibt es eine nicht-leere Menge X, die keinen minimalen Untermodul enthält. Zu jedem Modul aus X gibt es dann stets einen darin echt enthaltenen Modul aus X. Man kann daher (mittels Auswahlaxiom) eine absteigende, nicht stationäre Kette definieren.

(*ii*) ⇒ (*iii*): In der Menge aller Durchschnitte endlich vieler M_i gibt es ein minimales Element $N = \cap_{i\in I_0} M_i$. Wegen der Minimalität folgt $N \cap M_i = N$ für alle $i \in I$, also $\cap_{i \in I} M_i = N$.

(*iii*) ⇒ (*i*): Bilden die M_i eine absteigende Kette, so gibt es ein j für welches $\cap_i M_i = M_j$. Daher ist die Kette stationär. □

4.16 Satz. *Sei M ein R-Modul.*

(*i*) *Ist M artinsch, so auch U und M/U für alle Untermoduln U von M.*

(*ii*) *Sind U und M/U artinsch für einen Untermodul U von M, so ist auch M artinsch.*

(*iii*) *Ist M endlich erzeugt und R als R-Modul artinsch, so ist M artinsch.*

Beweis. (*i*): Absteigende Ketten von Untermoduln in U sind auch absteigende Ketten von Untermoduln von M und werden daher stationär. Analoges gilt für absteigendene Ketten von Untermoduln in M/U und ihre Urbilder in M.

(*ii*): Sei U_i eine absteigende Kette in M und $U_i' = U \cap U_i$, $U_i'' = (U_i + U)/U$. Es gibt ein n, so daß $U_t' = U_n'$ und $U_t'' = U_n''$ für alle $t \geq n$ gilt. Wir zeigen nun $U_t = U_n$ für $t \geq n$. Sei $x \in U_n$. Wegen $U_t'' = U_n''$ gibt es $y \in U_t$ mit $x - y \in U$. Folglich $x - y \in U \cap U_n = U_n' = U_t' \subseteq U_t$. Es ergibt sich $x \in U_t$.

(*iii*): Zunächst ist R^n nach (*ii*) artinscher Modul, indem man $R^n/R \cong R^{n-1}$ betrachet und Induktion anwendet. Als epimorphes Bild von R^n ist dann auch M wiederum nach (*ii*) artinsch. □

Wir nennen eine echt absteigende Kette wie in Definition 4.7 maximal oder eine Kompositionsreihe, wenn sich die Kette durch Einfügen bzw. Voranstellen oder Anhängen von weiteren Untermoduln (lokal) nicht verlängern läßt. Eine notwendige Bedingung ist also, daß M_{i+1} maximal in M_i für alle i ist. Eine endliche Kompositionsreihe (also eine Kompositionsreihe endlicher Länge) besitzt darüberhinaus notwendigerweise M und $\{0\}$ als Anfangs- und Endpunkt. Eine beliebige, echt absteigende Kette mit Anfangs- und Endpunkt M und $\{0\}$ und mit M_{i+1} maximal in M_i ist umgekehrt eine endliche Kompositionsreihe.

Der folgende Satz steht im Zusammenhang mit dem Satz von Jordan-Hölder-Schreier. Das wird in der Algebra 2 noch einmal genauer und allgemeiner aufgegriffen und bewiesen.

4.17 Satz. *Sei M ein Modul. Die Kompositionsreihen von M besitzen alle die gleichen, maximalen Längen* $\mathrm{len}(M)$.

Beweis. Lassen wir aus. □

Wir vergleichen nun die Eigenschaften noethersch und artinsch mit der Länge $\mathrm{len}(M)$.

4.18 Satz. *Sei M ein R-Modul. Dann sind äquivalent:*

(*i*) *M ist noethersch und artinsch.*

(*ii*) *M besitzt eine endliche Kompositionsreihe.*

(*iii*) $\mathrm{len}(M) < \infty$.

Beweis. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*): Zu jedem Untermodul $U \neq \{0\}$ von M sei X_U die Menge aller von U verschiedener Untermoduln von U. Da M noethersch ist und $X_U \neq \emptyset$ gilt, gibt es darin ein bezüglich Inklusion maximales Element V, so daß V also ein maximaler Untermodul von U ist.

Wir definieren mit dieser Beobachtung induktiv eine echt absteigende Kette $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \dots$. Da M artinsch ist, muß diese Kette nach endlich vielen Schritten abbrechen, es muß also $M_n = \{0\}$ für ein $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ gelten. Dies liefert eine endliche Kompositionsreihe.

(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*): Nach Satz 4.17 stimmen $\mathrm{len}(M)$ und die Länge der endlichen Kompositionsreihe überein, also gilt $\mathrm{len}(M) < \infty$.

(*iii*) $\Rightarrow$ (*i*): Ist M nicht noethersch oder nicht artinsch, so gibt es eine unendliche echt auf- oder absteigende Kette von Untermoduln von M. Daher gilt $\mathrm{len}(M) = \infty$. □

Als Folgerung aus diesem Satz bemerken wir: Sind die Längen echt absteigender, endlicher Ketten von Untermoduln in M unbeschränkt, so enthält M auch eine echt absteigende Kette von Untermoduln unendlicher Länge.

4.19 Satz. *Sei M ein R-Modul und U ein Untermodul. Dann gilt* $\mathrm{len}(M) = \mathrm{len}(U) + \mathrm{len}(M/U)$.

Beweis. Ketten von Untermoduln von U sind auch Ketten von Untermoduln von M. Urbilder von Ketten von Untermoduln von M/U unter dem kanonischen Epimorphismus sind wieder Ketten von Untermoduln von M, welche U enthalten. Gilt daher $\mathrm{len}(U) = \infty$ oder $\mathrm{len}(M/U) = \infty$, so folgt $\mathrm{len}(M) = \mathrm{len}(U) + \mathrm{len}(M/U) = \infty$.

Sei nun $\mathrm{len}(U) < \infty$ und $\mathrm{len}(M/U) < \infty$. Die von Kompositionsreihen in U und M/U herrührenden Ketten endlicher Länge in M mit den Anfangs- und Endpunkten $\{0\}$, U und U, M können aneinandergehängt werden und liefern eine Kompositionsreihe von M der Länge $\mathrm{len}(U) + \mathrm{len}(M/U)$. Nach Satz 4.17 folgt $\mathrm{len}(M) = \mathrm{len}(U) + \mathrm{len}(M/U)$. □

Aus dem Satz ergibt sich auch $\mathrm{len}(M_1 \oplus M_2) = \mathrm{len}(M_1) + \mathrm{len}(M_2)$.

4.4 Moduln und Matrizen über Hauptidealringen

In diesem Abschnitt bezeichnet R einen Hauptidealring. Wir leiten zuerst Aussagen über Matrixnormalformen her und wenden diese dann an, um Aussagen über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen zu erhalten.

4.20 Lemma. (*i*) *Seien $a_1, \dots, a_n \in R$. Dann gibt es eine unimodulare Matrix U in $R^{n\times n}$ mit $(a_1, \dots, a_n)U = (d, 0, \dots, 0)$, wobei $d = \gcd\{a_1, \dots, a_n\}$ ist.*

(*ii*) *Seien* $a_1, \ldots, a_n \in R$. *Dann gibt es eine Matrix* A *in* $R^{n\times n}$, *deren erste Zeile gleich* $(a_1, \ldots, a_n)$ *ist und für die* $\det(A) = \gcd\{a_1, \ldots, a_n\}$ *gilt.*

Beweis. (*i*): Für $i < j$ gibt es $\lambda, \mu \in R$ mit $\lambda a_i + \mu a_j = c$ und $c = \gcd\{a_i, a_j\}$. Die Matrix

$$T' = \begin{pmatrix} \lambda & -a_j/c \\ \mu & a_i/c \end{pmatrix}$$

ist in $R^{2\times 2}$, unimodular und erfüllt $(a_i, a_j)T' = (c, 0)$. Wir können T' zu einer unimodularen Matrix $T \in R^{n\times n}$ machen, indem wir T' als (erweiterten) Diagonalblock in I_n einbetten, so daß gilt:

$$\begin{aligned}(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, &a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)T \\ &= (a_1, \ldots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, 0, a_{j+1}, \ldots, a_n).\end{aligned}$$

Indem wir diese Schritte wiederholen und die so erhaltenen, unimodularen Transformationsmatrizen T aufmultiplizieren, erhalten wir schließlich ein unimodulares $U \in R^{n\times n}$ mit $(a_1, \ldots, a_n)U = (d, 0, \ldots, 0)$.

(*ii*): Sei U unimodular mit $(a_1, \ldots, a_n)U = (d, 0, \ldots, 0)$, $d = \gcd\{a_1, \ldots, a_n\}$ und $\det(U) = 1$ (andernfalls eine Spalte von U durch $\det(U)$ dividieren). Sei B die Matrix, deren erste Zeile $(d, 0, \ldots, 0)$ ist und die ansonsten mit I_n übereinstimmt. Dann gilt $\det(B) = d$ und die Matrix $A = BU^{-1}$ erfüllt die Bedingungen. □

4.21 Definition. Sei $M = (m_{i,j}) \in R^{n\times m}$ und $I_j = \{\, i \mid 1 \le i \le n$ und $m_{i,j} \ne 0\}$. Wir setzen $j_0 = \max\{\, j \mid 1 \le j \le m$ und $I_j \ne \emptyset\}$, $i_j = \min I_j$ und definieren: M ist in unterer Spalten-Dreiecksform, wenn $i_1 < \cdots < i_{j_0}$.

Sei $P \subseteq R$ ein Vertretersystem nicht-assoziierter Elemente von R und $R_b \subseteq R$ ein Vertretersystem für die Restklassen R/Rb für jedes $b \in P$. Die Matrix M in unterer Spalten-Dreiecksform heißt in unterer Spalten-Hermite-Normalform, wenn für jedes $j = 1, \ldots, j_0$ gilt: $m_{i_j,j} \in P$ und $m_{i_j,k} \in R_{m_{i_j,j}}$ für $1 \le k < j$.

Entsprechend können obere Spalten- und untere, obere Zeilen-Dreiecksformen für M definiert werden.

4.22 Satz. *Zu einer Matrix* $M \in R^{n\times m}$ *gibt es eine unimodulare Matrix* $T \in R^{m\times m}$, *so daß* MT *in unterer Spalten-Dreiecksform ist. Sind Vertretersysteme* P *und* R_b *gegeben, so kann* T *so gewählt werden, daß* MT *in unterer Spalten-Hermite-Normalform ist. In diesem Fall ist* MT *eindeutig durch* M *bestimmt.*

Beweis. Für $M = 0$ ist der Satz korrekt. Sei nun $M \ne 0$ und $(a_1, \ldots, a_m) \ne 0$ die i-te Zeile von M für $1 \le i \le n$ minimal. Nach Lemma 4.20, (*i*) gibt es ein unimodulares $U_1 \in R^{m\times m}$, so daß die i-te Zeile von MU_1 von der Form $(d, 0, \ldots, 0)$ mit $d = \gcd\{a_1, \ldots a_m\}$ ist. Alle Zeilen über der i-ten Zeile von MU_1 sind Null.

Sei M' die Matrix, die aus M durch Streichen der ersten i Zeilen von M und durch Streichen der ersten Spalte von M entsteht. Per Induktion gibt es eine unimodulare Matrix $U' \in R^{(m-1)\times(m-1)}$, so daß $M'U'$ in unterer Spalten-Dreiecksform ist. Wir definieren

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U' \end{pmatrix} \in R^{m\times m}$$

und $U = U_1U_2$. Die Matrix U ist unimodular. Dann gilt

$$MU = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d & 0 \\ * & M'U' \end{pmatrix} \in R^{n\times m}$$

(die ersten Nullzeilen können auch wegfallen) und MU ist daher in unterer Spalten-Dreiecksform.

Durch Multiplikation der Spalten mit Einheiten erreichen wir die Bedingung $m_{i_j,j} \in P$, durch Addieren von Vielfachen der j-ten Spalte zu den k-ten Spalten mit $k < j$ für $j = 1, \dots, j_0$ erreichen wir die Bedingung $m_{i_j,k} \in R_{m_{i_j,j}}$. Aufgrund der Dreieckecksform bleibt die Matrix oberhalb der i_j-ten Zeile unverändert. Diese Transformationen entsprechen ebenfalls der Multiplikation mit einer unimodularen Matrix und liefern die untere Spalten-Hermite-Normalform von M.

Die Eindeutigkeitsaussagen erhält man am leichtesten aus der Interpretation der Spalten von MU als Modulbasis: Sei V der von den Spalten von M erzeugte R-Untermodul von R^n. Aufgrund der Dreiecksform sind die Spalten ungleich Null von MU linear unabhängig und bilden daher eine Basis von V.

Wir betrachten zunächst die Eindeutigkeit der Zeilenindizes der Stufen und die Eindeutigkeit bis auf Assoziation der Elemente auf den Stufen. Sei V_i der Untermodul von V, dessen Elemente an den ersten $i-1$ Koordinaten Nulleinträge haben. Für die Menge $I = \{i_j \,|\, 1 \leq j \leq j_0\}$ der Zeilenindizes der Stufen in MU gilt dann $I = \{i \,|\, 1 \leq i \leq n \text{ und } V_i \neq V_{i+1}\}$. Also ist I unabhängig von U und eindeutig durch M bestimmt. Ferner liefert die Menge der i-ten Koordinaten der Elemente aus V_i ein Ideal von R, welches gerade durch das Element auf der Stufe in Zeile i erzeugt wird. Daher sind diese Elemente unabhängig von U und bis auf Assoziation eindeutig durch M bestimmt. Die Spalten b_j von MU für $1 \leq j \leq j_0$ sind dann ebenfalls bis auf Multiplikation mit Einheiten aus R und modulo $\sum_{\nu=j+1}^{j_0} Rb_\nu$ unabhängig von U und eindeutig durch M bestimmt. Hieraus folgt auch die Eindeutigkeit der Hermite-Normalform unter weiterer Reduktion für $j = 1, \dots, j_0$ nach links. □

4.23 Satz. *Sei M ein Untermodul von R^n. Dann ist M frei vom Rang $\leq n$.*

Beweis. Mit R^n ist auch M noethersch und daher endlich erzeugt. Durch Anwendung der Hermite-Normalform auf die durch die Erzeuger gebildete Matrix erhalten wir eine Basis von M in unterer Dreiecksform mit $\leq n$ Elementen. $\square$

Der Eindeutigkeitsbeweis in Satz 4.22 liefert ebenfalls die Existenz einer Basis bestehend aus $\leq n$ Elementen jedes Untermoduls von R^n. Wir brauchen dabei nicht zu verwenden, daß M noethersch oder endlich erzeugt ist. Dies ergibt sich als Konsequenz der Überlegung.

Eine unimodulare Matrix $M \in R^{n\times n}$ kann nach dem Satz in eine untere Dreiecksmatrix mit Einheiten bzw. Einsen auf der Diagonalen transformiert werden. Indem noch noch links reduziert (Hermite-Normalform bilden), erhält man I_n. Dies zeigt, daß sich jede unimodulare Matrix über R in ein Produkt der elementaren, unimodularen Matrizen T' bzw. T aus dem Beweis von Lemma 4.20 zerlegen läßt. Für einen euklidischen Ring R sind diese Matrizen selbst wieder Produkte der am Ende von Abschnitt 4.1 erwähnten elementaren Matrizen, da im euklidischen Algorithmus wechselseitig Vielfache von Elementen bzw. Spalten voneinander abgezogen werden.

Will man Hermite-Normalformen über einem euklidischen Ring "von Hand" ausrechnen, kann man wie folgt vorgehen. Man führt den euklidischen Algorithmus bezüglich der Elemente der ersten Zeile aus, rechnet aber mit den ganzen Spalten. Hierbei addiert man also in jedem Schritt ein Vielfaches einer Spalte zu einer anderen Spalte. Bei Bedarf multipliziert man Spalten mit Einheiten. Zum Schluß sind in der ersten Zeile alle Elemente bis auf das erste Null. Das erste ist der größte gemeinsame Teiler der Ausgangszeilenelemente und kann auch Null sein. Dann fährt man induktiv mit der zweiten Spalte ab dem zweiten Element fort. Komplexitätstechnisch gibt es wesentlich effizientere Verfahren zur Hermite-Normalformberechnung.

Typische, praktische Verwendungszwecke der Hermite-Normalform sind in etwa die Berechnung einer Basis eines durch ein Erzeugendensystem gegebenen Moduls $M \subseteq R^n$, Test auf Gleichheit, Test auf Inklusion, Summen- und Schnittberechnung zweier solcher Moduln.

Eine r-Minore der Matrix $M \in R^{n\times m}$ für $r \leq \min\{n, m\}$ ist die Determinante einer $(r \times r)$-Matrix, die durch Streichen von $n - r$ Zeilen und $m - r$ Spalten aus M entsteht. Wir definieren $d_r(M)$ als den größten gemeinsamen Teiler aller r-Minoren von M (ist bis auf Einheiten eindeutig bestimmt).

Wir nennen $M \in R^{n\times m}$ diagonal, wenn M außerhalb der Diagonalen nur Nulleinträge besitzt (M muß also nicht unbedingt quadratisch sein).

4.24 Lemma. (*i*) *Sei $M \in R^{n\times m}$ eine Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $a_1, \ldots, a_d$ für $d = \min\{n, m\}$. Dann gibt es unimodulare Matrizen*

$U \in R^{n\times n}$ und $V \in R^{m\times m}$, so daß UMV diagonal mit den Diagonaleinträgen $b_1, \ldots, b_d$ ist und $b_1 \mid \cdots \mid b_d$ gilt.

(ii) Seien $M \in R^{n\times m}$ und $U \in R^{n\times n}$, $V \in R^{m\times m}$ unimodulare Matrizen. Dann gilt $d_{r-1}(M) \mid d_r(M)$ und $d_r(M) \sim d_r(UMV)$.

Beweis. (i): Sei M' die Diagonalmatrix mit a_i, a_j auf der Diagonalen und gelte $i < j$. Die unimodularen Transformationen gehen wie folgt: Addiere die zweite Zeile von M' zur ersten. Wende T' aus Lemma 4.20, (i) von rechts auf M' an. Dies liefert

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ \mu a_j & d \end{pmatrix}$$

mit $c = \gcd\{a_i, a_j\}$ und $d = a_i a_j / c = \operatorname{lcm}\{a_i, a_j\}$. Nun ziehen wir das $\mu a_j / c$-fache der ersten Zeile von der zweiten Zeile ab und erhalten die Diagonalmatrix mit $c = \gcd\{a_i, a_j\}$, $d = \operatorname{lcm}\{a_i, a_j\}$ auf der Diagonalen und es gilt $c \mid d$. Durch sukzessives Vorgehen für $(i, j) = (1, 2), (1, 3), \ldots, (2, 3), (2, 4), \ldots, (n-1, n)$ und Aufmultiplizieren der entsprechenden unimodularen Transformationsmatrizen folgt (i).

(ii): Eine r-Minore kann nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz als Linearkombination von $(r-1)$-Minoren geschrieben werden. Daher ist das von den r-Minoren erzeugte Hauptideal I in dem von den $(r-1)$-Minoren erzeugten Hauptideal J enthalten. Wegen $I = Rd_r(M)$ und $J = Rd_{r-1}(M)$ folgt $d_{r-1}(M) \mid d_r(M)$.

Eine r-Minore von MV kann als R-Linearkombination von r-Minoren von M geschrieben werden, wegen der Linearität der Determinante in den Spalten und da jede Spalte von MV eine Linearkombination der Spalten von M ist. Daher folgt wie eben $d_r(M) \mid d_r(MV)$. Weil V unimodular ist, gilt auch $d_r(MV) \mid d_r(M)$ für MV und $M = (MV)V^{-1}$. Analog folgt die Aussage für UM und UMV. $\square$

4.25 Satz. *Sei $M \in R^{n\times m}$ und $d = \min\{n, m\}$. Dann gibt es unimodulare Matrizen $U \in R^{n\times n}$ und $V \in R^{m\times m}$, so daß UMV diagonal ist und für die Diagonalelemente $b_1 \mid \cdots \mid b_d$ gilt. Die b_i sind bis auf Einheiten eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wir wenden Lemma 4.20, (i) abwechselnd auf die erste Zeile (unimodulare Transformation von rechts) und erste Spalte (unimodulare Transformation von links) an. Die auftretenden Elemente in Position $(1, 1)$ erzeugen eine aufsteigende Kette von Idealen, welche stationär wird. Dann gilt aber, daß in der ersten Zeile und Spalte außer dem Element an Position $(1, 1)$ alle Elemente Null sind (das Element an Position $(1, 1)$ darf auch Null sein). Induktiv diagonalisieren wir dann die Matrix, die aus M durch Streichen der ersten Zeile und Spalte entsteht, durch unimodulare Transformationen von links und von rechts. Mit Lemma 4.24, (i) erreichen wir die aufsteigende Teilerbedingung.

Es gilt $d_r(UMV) \sim \prod_{i=1}^r b_i$ und somit nach Lemma 4.24, (ii) wegen $d_r(UMV) \sim d_r(M)$ auch $b_r \sim d_r(UMV)/d_{r-1}(UMV) \sim d_r(M)/d_{r-1}(M)$ für $d_{r-1}(M) \neq 0$. Gilt $d_r(M) = 0$ für r minimal, so folgt wegen der Teilerbedingung $b_i \neq 0$ für $1 \leq i \leq r-1$ und $b_i = 0$ für $r \leq i \leq d$. Folglich sind die b_r unabhängig von U, V und bis auf Assoziation eindeutig durch M bestimmt. □

4.26 Definition. Matrizen UMV in der Diagonalform von Satz 4.25 nennt man auch in Smith-Normalform oder Elementarteilerform. Die Einträge b_i nennt man Elementarteiler von M. Man kann zusätzlich fordern, daß die b_i in einem Vertretersystem P liegen.

Will man die Smith-Normalform "von Hand" ausrechnen, kann man wie im Beweis vorgehen. Man tut so, als wollte man die Spalten-Hermite-Normalform ausrechnen und transformiert die erste Zeile in die Form $(*, 0, \ldots, 0)$. Dann fährt man fort, die Zeilen-Hermite-Normalform auszurechen und transformiert die erste Spalte in die Form $(*, 0, \ldots, 0)^{tr}$. Dadurch wird im allgemeinen die erste Zeile wieder durcheinandergebracht, aber $*$ wird "kleiner", bis $*$ alle Elemente der ersten Zeile und Spalte teilt, und diese dann ohne etwas wieder durcheinanderzubringen zu Null gemacht werden können. Komplexitätstechnisch gibt es wieder wesentlich effizientere Verfahren zur Smith-Normalformberechnung.

Wir verwenden jetzt den Satz über die Smith-Normalform, um Aussagen über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen zu erhalten. Der Satz über die Smith-Normalform kann als Aussage über die Existenz und „diagonale" Lage von Erzeugendensystemen von Moduln und Untermoduln gesehen werden.

Der folgende Existenzsatz ist der erste Teil des Hauptsatzes für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen.

4.27 Satz. *Sei M ein endlich erzeugter Modul über dem Hauptidealring R. Dann gibt es $b_i \in R \backslash R^\times$ mit $b_1 \,|\, \cdots \,|\, b_r$ und*

$$M \cong R/b_1R \oplus \cdots \oplus R/b_rR.$$

Beweis. Da M endlich erzeugt ist, gibt es $n \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ und einen Epimorphismus $f : R^n \to M$. Der Untermodul $N = \ker(f)$ ist nach Satz 4.23 endlich erzeugt und besitzt eine Basis w_i mit $m \leq n$ Elementen. Wir ergänzen diese Basis um $n - m$ Nullspalten $w_{m+1}, \ldots, w_n$ zu einem Erzeugendensystem und bezeichnen die resultierende Matrix mit $A \in R^{n \times n}$. Die Einheitsvektoren e_i in R^n bilden eine Basis von M, und es gilt $(e_1, \ldots, e_n)A = (w_1, \ldots, w_n)$. Nach Satz 4.25 angewendet auf A erhalten wir eine andere Basis e'_i von R^n und ein anderes Erzeugendensystem w'_i von N, so daß $w'_i = a_i e'_i$ mit $a_i \in R$ und $a_i \,|\, a_{i+1}$ gilt. Daraus ergibt sich $M \cong R^n/N \cong R/a_1 \oplus \cdots \oplus R/a_nR$. Durch Fortlassen von Einheiten unter den a_i erhalten wir die gewünschten $b_1, \ldots, b_r \in R \backslash R^\times$. □

4.28 Korollar. *Sei M ein endlich erzeugter Modul über dem Hauptidealring R.*

(*i*) *Es gibt einen freien Modul F, so daß $M \cong \operatorname{Tor}(M) \oplus F$.*

(*ii*) *Ist M torsionsfrei, so ist M frei.*

(*iii*) *Mit den Bezeichnungen von Satz 4.27 gilt $\operatorname{Ann}(M) = Rb_r$.*

Beweis. Mit Satz 4.27 gilt $\operatorname{Tor}(M) \cong \oplus_{b_i \neq 0} R/Rb_i$ und $F = \oplus_{b_i=0} R$. Daraus folgen (i) und (ii). Aussage (iii) ist aufgrund der aufsteigenden Teilerbedingung auch klar. □

Der folgende Eindeutigkeitssatz ist der zweite Teil des Hauptsatzes für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen.

4.29 Satz. *Seien $a_i, b_j \in R \backslash R^\times$ mit $a_1 \,|\, \cdots \,|\, a_n$, $b_1 \,|\, \cdots \,|\, b_m$ und*

$$R/a_1R \oplus \cdots \oplus R/a_nR \cong R/b_1R \oplus \cdots \oplus R/b_mR.$$

Dann gilt $n = m$ und $a_i \sim b_i$ für $1 \leq i \leq n$.

Beweis. Per Induktion über n. Für $n = 0$ muß wegen $b_j \notin R^\times$ auch $m = 0$ gelten und die Behauptung des Satzes ist korrekt.

Für $n \geq 1$ gilt $Ra_n = \operatorname{Ann}(\oplus_i R/a_iR) = \operatorname{Ann}(\oplus_j R/b_jR) = Rb_m$, folglich $a_n \sim b_m$. Wir setzen $I = Ra_n = Rb_m$. Damit können wir $\oplus_i R/a_iR$ und $\oplus_j R/b_jR$ auch als (treue) R/I-Moduln betrachten und es gilt $\#\{\nu \,|\, 1 \leq \nu \leq n \text{ und } a_\nu \sim a_n\} = \operatorname{rank}(\oplus_i R/a_iR) = \operatorname{rank}(\oplus_j R/b_jR) = \#\{\mu \,|\, 1 \leq \mu \leq m \text{ und } b_\mu \sim b_m\}$. Bezeichnet d diesen Wert, so gilt nach Induktionsvoraussetzung für die R/I-Moduln $\oplus_{i=1}^{n-d} R/a_iR$ und $\oplus_{j=1}^{m-d} R/b_jR$, daß $n - d = m - d$ und $a_i + I \sim b_i + I$ in R/I für alle $1 \leq i \leq n - d$ gilt. Wegen $Ra_i \supseteq I$ und $Rb_i \supseteq I$ folgt daraus bereits $Ra_i = Rb_i$ beziehungsweise $a_i \sim b_i$ in R. Wir haben also $n = m$ und $a_i \sim b_i$ für alle $1 \leq i \leq n$, was zu zeigen war. □

Wir merken an, daß die b_i auch Null sein können. Die Anzahl der b_i mit $b_i = 0$ entspricht dem Rang von M.

Ein typischer, praktischer Verwendungszweck der Smith-Normalform ist damit, die Struktur bzw. Isomorphieklasse eines durch Erzeuger und R-Relationen gegebenen Moduls M (also eines Faktormoduls) explizit zu bestimmen. Die Elemente $b_1, \ldots b_r$ aus Satz 4.27 sind entsprechend Satz 4.29 eindeutig bestimmt und heißen Elementarteiler des Moduls M.

Der folgende Satz ist die Primelementpotenzvariante des Hauptsatzes für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen.

4.30 Satz. *Sei M ein endlich erzeugter Modul über dem Hauptidealring R. Dann gibt es Primelemente $\pi_i \in R$, Exponenten $e_i \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ und $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ mit*

$$M \cong R/\pi_1^{e_1}R \oplus \cdots \oplus R/\pi_r^{e_r}R \oplus R^n.$$

Die Isomorphieklasse von M ist durch die (π_i, e_i) und durch n bis auf die Reihenfolge oder Assoziation der π_i eindeutig bestimmt.

Beweis. Sind $a, b \in R$ teilerfremd, so gilt nach dem chinesischen Restsatz $R/Rab \cong R/Ra \oplus R/Rb$ als R-Moduln. Dies erlaubt es, die direkte Summe in Satz 4.27 weiter zu zerlegen, so daß die b_i nur noch Potenzen von Primelementen sind. Dies liefert die Existenz der π_i, e_i und von n.

Umgekehrt kann man mit dem chinesischen Restsatz $R/\pi_1^{e_1}R \oplus \cdots \oplus R/\pi_r^{e_r}R$ auch wieder zu $R/b_1R \oplus \cdots \oplus R/b_mR$ mit $b_i \in R\backslash R^\times$ und $b_i \mid b_{i+1}$ auf genau eine Weise zusammenfassen (für jedes Primelement die Potenzen aufsteigend in eine Zeile schreiben und rechtsbündig anordnen. Die b_i sind dann die Produkte der Primelementpotenzen in den Spalten). Die Eindeutigkeit der b_i nach Satz 4.29 impliziert dann die Eindeutigkeit der π_i und e_i wie behauptet. Die Zahl n ist als Rang von M eindeutig bestimmt. □

4.31 Bemerkung. Für $R = \mathbb{Z}$ liefert der Satz den Struktursatz über endlich erzeugte, abelsche Gruppen.

Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gibt es $n \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ und einen Epimorphismus $\phi : \mathbb{Z}^n \to G$. Die Bilder der Einheitsvektoren $\phi(e_i)$ sind Erzeuger von G, und die Elemente in $\ker(\phi)$ die Relationen. Ist $M \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ eine Matrix, deren Spalten Erzeuger von $\ker(\phi)$ bilden, so kann die Struktur von G wie in Satz 4.27 mittels der Smith-Normalform $M' = (b_i\delta_{i,j})_{i,j}$ von M ermittelt werden. Für $\det(M) \neq 0$ gilt $\#G = |\prod_i b_i| = |\det(M')| = |\det(M)|$. Für $\det(M) = 0$ gilt $\#G = \infty$. Der betragsmäßig größte Eintrag in M' ist gleich dem kleinsten Exponenten von G. Der Annulator von G ist gleich dem vom kleinsten Exponenten erzeugten Ideal von $\mathbb{Z}$.

Analoges gilt für einen endlich erzeugten Modul V über einem Polynomring $R = k[t]$, wobei k ein Körper ist. Die Anzahlaussagen werden hier am besten durch Dimensionsaussagen ersetzt. Jeder R-Modul ist auch ein k-Vektorraum. Speziell gilt $\dim_k(R) = \infty$ und $\dim_k(R/Rb) = \deg(b)$ für $b \in R\backslash\{0\}$ nach der Eindeutigkeit der Reste der Polynomdivision. Beschreibt $M \in R^{n\times n}$ den Kern eines Epimorphismus $R^n \to V$ wie eben, so folgt $\dim_k(V) = \sum_i \deg(b_i) = \deg(\prod_i b_i) = \deg(\det(M')) = \deg(\det(M))$ für $\det(M) \neq 0$ und $\dim_k(V) = \infty$ für $\det(M) = 0$ nach Satz 4.27 unter Verwendung der Smith-Normalform $M' = (b_i\delta_{i,j})_{i,j}$ von M. Der Annulator von V ist das vom gradgrößten Eintrag von M' erzeugte Hauptideal von R.

Wir führen diese Überlegungen weiter und betrachten damit eine Anwendung von Satz 4.27 und Satz 4.29 in der linearen Algebra. Sei V ein endlich dimensionaler k-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}_k(V)$. Wir machen V zu einem endlich erzeugten Modul über dem Hauptidealring $R = k[t]$ durch die Festlegung $tx = \phi(x)$. Nach Satz 4.27 gilt $V \cong R/Rb_1 \oplus \cdots \oplus R/Rb_r$. Seien $v_1, \ldots, v_r \in V$ die Urbilder der Einheitsbasis auf der rechten Seite. Mit $V_i = Rv_i$ gilt $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$. Eine k-Basis von V_i wird durch $v_i, tv_i, t^2v_i, \ldots, t^{n_i-1}v_i$ mit $n_i = \deg(b_i)$ gegeben. Ist $b_i = \sum_{j=0}^{n_i} b_{i,j}t^j$, so gilt $t^{n_i}v_i = -\sum_{j=0}^{n_i-1} b_{i,j}(t^jv_i)$. Die k-Basen der V_i liefern zusammen also eine k-Basis von V, so daß die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich dieser Basis in rationaler kanonischer Form ist. Wir können V entsprechend der obigen Bemerkung 4.31 auch noch in kleinere Bestandteile zerlegen, wenn wir die b_i faktorisieren.

Wir betrachten den Fall $V \cong R/R(t-a)^n$ und v Urbild der Eins auf der rechten Seite. Eine Basis von V wird wie eben betrachtet durch $v, tv, \ldots, t^{n-1}v$ gegeben. Eine andere Basis von V erhalten wir mit $v, (t-a)v, (t-a)^2v, \ldots, (t-a)^{n-1}v$, denn die t-Potenzen und die $(t-a)$-Potenzen bilden beide k-Basen von $R/R(t-a)^r$. Wegen $t(t-a)^i = (t-a)^{i+1} + a(t-a)^i$ und $t(t-a)^{r-1} = (t-a)^r + a(t-a)^{r-1} \equiv a(t-a)^{r-1} \bmod (t-a)^r$ erhalten wir für diese Basis die üblichen Jordankästchen. Eine solche Zerlegung in mehrere Jordankästchen ist somit immer möglich, wenn k algebraisch abgeschlossen ist. Wir erhalten darüberhinaus eine Zerlegung der Darstellungsmatrix M von ϕ in der Form $M = M_1 + M_2$, wobei M_1 eine Diagonalmatrix und M_2 eine strikt untere Dreiecksmatrix (also nilpotent) ist. Entsprechend zerlegt sich ϕ in $\phi = \phi_1 + \phi_2$.

Ist M die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich der Basis v_i von V, so bilden die Spalten von $tI_n - M$ eine Basis der Kerns N des Epimorphismus $R^n \to V$, welcher e_i nach v_i abbildet. Die Spalten sind nämlich einerseits im Kern N enthalten. Auf der anderen Seite gilt für den von den Spalten von $tI_n - M$ erzeugten Untermodul N' von N die Gleichung $\dim_k(R^n/N') = \deg(\deg(tI_n - M)) = n$ wie oben dargelegt. Aus Dimensionsgründen ist daher $N' \subsetneq N$ nicht möglich und es gilt $N' = N$. Mit Hilfe von $tI_n - M$ und der Smith-Normalform kann man also die rationale kanonische Form oder die Jordan-Normalform von M berechnen. In der obigen Notation ist b_r (der Erzeuger des Annulators) das Minimalpolynom und $\det(tI_n - M) = \prod_i b_i$ das charakteristische Polynom von ϕ.

Darstellungsmatrizen M_1, M_2 von ϕ bezüglich verschiedener Basen von V liefern verschiedene charakteristische Matrizen $tI_n - M_1, tI_n - M_2$ und Kerne N_1, N_2 von R^n. Es gilt aber, daß R^n/N_1 und R^n/N_2 isomorph sind. Wegen der Eindeutigkeit der Elementarteiler stimmen daher die Smith-Normalformen von $tI_n - M_1$ und $tI_n - M_2$ überein. Gleichsetzen zeigt, daß $tI_n - M_1$ und $tI_n - M_2$ als Matrizen äquivalent über R sind. Daher sind M_1 und M_2 genau dann ähnlich über k, wenn

$tI_n - M_1$ und $tI_n - M_2$ über R äquivalent sind (Satz von Frobenius).

Nach Satz 4.11 gilt $\det(tI_n - M)R^n \subseteq N$ und äquivalenterweise $\det(tI_n - M)V = \{0\}$. Das ist der Satz von Cayley-Hamilton: Wenn man ϕ bzw. M in sein charakteristisches Polynom $\det(tI_n - M)$ einsetzt, kommt Null heraus.

Kapitel 5

Algebraische Körpererweiterungen

Die zentralen Objekte dieses Kapitels sind algebraische Körpererweiterungen. Solche Erweiterungen ergeben sich bei der näheren Untersuchung algebraischer Eigenschaften von Nullstellen von Polynomen und treten heute in vielen, auch anwendungsbezogenen Bereichen der Mathematik auf.

Sei zum Beispiel $f \in \mathbb{Q}[t]$ ein irreduzibles Polynom und $a \in \mathbb{C}$ mit $f(a) = 0$. Man kann zeigen, daß alle algebraischen Ausdrücke in a der Form $g_1(a)/g_2(a)$ mit $g_1, g_2 \in \mathbb{Q}[t]$ und $g_2(a) \neq 0$ Nullstellen von Polynomen $h \in \mathbb{Q}[t]$ mit $\deg(h) \leq \deg(f)$ sind und einen Körper $\mathbb{Q}(a)$ bilden, welcher $\mathbb{Q}$ enthält. Wir werden so auf eine algebraische Körpererweiterung $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ geführt. Man kann dann beispielsweise schließen, daß für ein irreduzibles $h \in \mathbb{Q}[t]$ mit $\deg(h) > \deg(f)$ die Gleichung $h(b) = 0$ keine Lösung $b \in \mathbb{Q}(a)$ haben kann. In ähnlicher Weise läßt sich die Nichtlösbarkeit einiger klassischer Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal nach geeigneter Algebraisierung beweisen.

5.1 Endliche, algebraische und transzendente Körpererweiterungen

Im folgenden bezeichnet E einen Körper und K einen Teilkörper. Wir bemerken, daß also per Definition $K \subseteq E$ gilt und K bezüglich der Addition und Multiplikation und bezüglich der Elemente $0, 1$ von E ein Körper ist. Insbesondere haben E und K den gleichen Primkörper. Ferner kann E auch als K-Vektorraum aufgefaßt werden. Dies ermöglicht, Methoden aus der linearen Algebra anzuwenden.

5.1 Definition. Das Paar (E, K) heißt Körpererweiterung und wird als E/K geschrieben. Der Körper E heißt ein Erweiterungskörper von K. Ein Teilkörper

F von E mit $K \subseteq F$ heißt Zwischenkörper der Erweiterung E/K.

5.2 Definition. Der Grad der Körpererweiterung E/K wird als die Dimension des K-Vektorraums E definiert und mit $[E : K]$ bezeichnet. Die Körpererweiterung E/K heißt endlich, wenn $[E : K]$ endlich ist.

Für $[E : K] = 2, 3$, usw. nennt man E/K quadratisch, kubisch, usw. Es gilt $[E : K] = 1$ genau dann, wenn $E = K$. Für $[E : K] = 1$ ist $1 \in E$ linear unabhängig über K und damit eine Basis von E als K-Vektorraum. Es folgt $E = \{\lambda \cdot 1 \mid \lambda \in K\} = K$.

Als Beispiele betrachte man $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Da sich jedes Element von $\mathbb{C}$ eindeutig als $\mathbb{R}$-Linearkombination von 1 und i schreiben läßt, folgt $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$. Jeder endlich-dimensionale $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist abzählbar. Daher ergibt sich $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$.

5.3 Lemma. *Sei V ein E-Vektorraum. Dann ist V auch ein K-Vektorraum und es gilt* $\dim_K(V) = [E : K] \dim_E(V)$.

Beweis. Es ist klar, daß V ein K-Vektorraum ist. Sei $v_i \in V$ eine E-Basis von V und $e_j \in E$ eine K-Basis von E. Die Aussage des Lemmas ergibt sich, wenn wir zeigen, daß $e_j v_i$ eine K-Basis von V ist. Zum Beweis sei $v \in V$. Dann gibt es $\lambda_i \in E$ und $\mu_{i,j} \in K$ fast alle gleich Null mit $v = \sum_i \lambda_i v_i$ und $\lambda_i = \sum_j \mu_{i,j} e_j$. Zusammengenommen ergibt dies $v = \sum_{i,j} \mu_{i,j} e_j v_i$, also sind die $e_j v_i$ ein Erzeugendensystem. Seien nun die $\mu_{i,j} \in K$ fast alle gleich Null mit $\sum_{i,j} \mu_{i,j} e_j v_i = 0$. Mit $\lambda_i = \sum_j \mu_{i,j} e_j \in E$ gilt dann $\sum_i \lambda_i v_i = 0$. Es folgt $\lambda_i = 0$ für alle i und dann $\mu_{i,j} = 0$ für alle i, j wegen der Basiseigenschaft der v_i und e_j. □

5.4 Satz (Gradsatz)**.** *Ist F ein Zwischenkörper von E/K, so gilt*

$$[E : K] = [E : F][F : K].$$

Beweis. Folgt direkt aus Lemma 5.3. □

Sei E/K eine endliche Körpererweiterung und F ein Zwischenkörper von E/K. Gilt $[F : K] = [E : K]$, so folgt $F = E$. Aus $[E : F] = [E : K]$ ergibt sich $[F : K] = 1$ unter Verwendung von Satz 5.4 und damit $F = K$. Ist ferner $[E : K]$ eine Primzahl, so folgt $F = E$ oder $F = K$.

5.5 Definition. Sei R ein Teilring des Rings S und $A \subseteq S$. Dann heißt

$$R[A] = \cap\{T \mid T \text{ Teilring von } S \text{ mit } R \cup A \subseteq T\}$$

der durch Adjunktion von A an R erzeugte Teilring von S. Ist S ein Körper, so heißt

$$R(A) = \cap\{T \mid T \text{ Teilkörper von } S \text{ mit } R \cup A \subseteq T\}$$

der durch Adjunktion von A an R erzeugte Teilkörper von S.

Es ist klar, daß es sich bei $R[A]$ und $R(A)$ um einen Teilring bzw. Teilkörper von S handelt. Außerdem ist $R(A)$ der Quotientenkörper von $R[A]$. Für $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ schreiben wir auch $R[a_1, \ldots, a_n]$ und $R(a_1, \ldots, a_n)$.

Sei $\phi : R[t_1, \ldots\ t_n] \to S$ der durch $t_i \mapsto a_i$ definierte Einsetzhomomorphismus. Dann haben wir $\phi(g) = g(a_1, \ldots, a_n)$ für $g \in R[t_1, \ldots t_n]$ und es ist nicht schwer zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} R[a_1, \ldots, a_n] &= \{\, g(a_1, \ldots, a_n) \mid g \in R[t_1, \ldots, t_n] \,\} \\ &= \operatorname{im}(\phi) \ \cong\ R[t_1, \ldots, t_n]/\ker(\phi), \\ R(a_1, \ldots, a_n) &= \{\, g(a_1, \ldots, a_n)/h(a_1, \ldots, a_n) \mid g, h \in R[t_1, \ldots, t_n] \\ &\qquad\qquad\qquad \text{und } h(a_1, \ldots, a_n) \neq 0 \,\}. \end{aligned}$$

Für $A \subseteq B$ ist $R[A]$ ein Teilring von $R[B]$ und $R(A)$ ein Teilkörper von $R(B)$. Desweiteren gilt $R[A_1 \cup A_2] = R[A_1][A_2]$ und $R(A_1 \cup A_2) = R(A_1)(A_2)$.

Sei I ein Integritätsring und K ein Körper, welcher ein Teilring von I ist. Es ist klar, daß I auch als K-Vektorraum aufgefaßt werden kann.

5.6 Lemma. *Ist die Dimension von I als K-Vektorraum endlich, so ist I ein Körper.*

Beweis. Sei $a \in I$, $a \neq 0$. Die Abbildung $\phi : I \to I$, $x \mapsto ax$ ist K-linear und injektiv, weil I ein Integritätsring ist. Dann ist ϕ auch surjektiv, weil I endlich dimensionaler K-Vektorraum ist. Also gibt es $b \in I$ mit $ab = 1$. □

Aufgrund von Lemma 5.6 ist es nicht allgemeiner, Integritätsringe anstelle von Körpern als endliche Erweiterungen von Körpern zu betrachten. Ist E/K eine endliche Körpererweiterung und $A \subseteq E$, so folgt mit Hilfe von Lemma 5.6 auch $K[A] = K(A)$.

5.7 Definition. Eine Körpererweiterung E/K heißt endlich erzeugbar, falls es $a_1, \ldots, a_r \in E$ mit $E = K(a_1, \ldots, a_r)$ gibt. Eine Körpererweiterung E/K heißt einfach, wenn es ein $a \in E$ mit $E = K(a)$ gibt. Das Element a heißt dann primitives Element der Körpererweiterung E/K.

Zum Beispiel gilt $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i) = \mathbb{R}[i]$, so daß i ein primitives Element der Körpererweiterung $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ ist.

5.8 Definition. Ein Element $a \in E$ heißt algebraisch über K, wenn es ein $f \in K[t]$ ungleich Null mit $f(a) = 0$ gibt. Ein Element $a \in E$ heißt transzendent über K, wenn es nicht algebraisch über K ist.

Die über $\mathbb{Q}$ algebraischen Elemente von $\mathbb{C}$ heißen algebraische Zahlen und sind Gegenstand der algebraischen Zahlentheorie. Ohne Beweis merken wir an, daß zum Beispiel e und π transzendent über $\mathbb{Q}$ sind. Da es nur abzählbar viele algebraische Zahlen gibt, enthält $\mathbb{R}$ überabzählbar viele transzendente Zahlen.

5.9 Definition. Eine Körpererweiterung E/K heißt algebraisch, wenn jedes $a \in E$ algebraisch über K ist. Andernfalls heißt E/K transzendent.

Wir wenden uns zunächst den algebraischen oder transzendenten Elementen zu. Zur Untersuchung eines solchen Elements $a \in E$ zieht man den Einsetzhomomorphismus $\phi_a : K[t] \to E$, $t \mapsto a$ heran. Nach dem Homomorphiesatz gilt $k[a] = \mathrm{im}(\phi_a) \cong K[t]/\ker(\phi_a)$, und a ist offensichtlich genau dann algebraisch über K, wenn $\ker(\phi_a) \neq \{0\}$. Eine andere Sichtweise ist, daß $a \in E$ genau dann algebraisch ist, wenn die Potenzen $1, a, a^2, \ldots$ linear abhängig über K sind.

5.10 Satz. *Sei $a \in E$ transzendent über K. Es gilt*

(i) $K[a] \cong K[t]$,

(ii) $K(a) \cong K(t)$, *wobei* $K(t) = \mathrm{Quot}(K[t])$ *der Körper der rationalen Funktionen in t über K ist,*

(iii) $[E : K] = [K(a) : K] = \infty$.

Beweis. Wäre a algebraisch, so wäre $\ker(\phi_a) \neq 0$. Nun gilt $K[a] \cong K[t]/\ker(\phi_a) \cong K[t]$, was (i) beweist. (ii) ergibt sich aus $K(a) = \mathrm{Quot}(K[a])$. (iii) folgt, da die Potenzen $1, a, a^2, \ldots$ linear unabhängig über K sind. □

5.11 Definition. Sei $a \in E$ algebraisch über K und $f \in K[t]$ normiert mit $\ker(\phi_a) = fK[t]$. Dann heißt f das Minimalpolynom von a über K und wird mit $m_{a,K}$ bezeichnet.

5.12 Satz. *Sei $a \in E$ algebraisch über K. Das Minimalpolynom ist das eindeutig bestimmte normierte Polynom kleinsten Grades über K, welches a als Nullstelle in E hat. Es ist irreduzibel in $K[t]$. Weiter gilt*

(i) $K[a] \cong K[t]/m_{a,K}K[t]$,

(ii) $K(a) = K[a]$,

(iii) $[K(a) : K] = \deg(m_{a,K})$.

Die Potenzen $1, a, a^2, \ldots, a^{\deg(m_{a,K})-1}$ bilden eine K-Basis von $K(a)$.

Beweis. Die Isomorphie in (i) gilt nach dem Homomorphiesatz angewendet auf ϕ_a, wegen $\ker(\phi_a) = m_{a,K}K[t]$. Weiter ist $K[a]$ als Teilring des Körpers E ein Integritätsring. Daher ist $\ker(\phi_a)$ ein Primideal. Da $K[t]$ Hauptidealring ist, ist $\ker(\phi_a)$ auch maximal und $K[a] \cong K[t]/\ker(\phi_a)$ ein Körper. Es folgt $K(a) = \mathrm{Quot}(K[a]) = K[a]$, also (ii). Die angegebenen a-Potenzen bilden dann eine K-Basis von $K[a]$, weil die entsprechenden t-Potenzen in $K[t]/m_{a,K}K[t]$ eine K-Basis des Quotientenrings bilden. Daraus und aus (ii) folgt (iii) und die letzte Aussage.

Da $\ker(\phi_a) = m_{a,K}K[t]$ ein Primideal ist, ist $m_{a,K}$ irreduzibel. Weil $\ker(\phi_a)$ aus allen Polynomen über K besteht, die a als Nullstelle in E haben, und $m_{a,K}$ der normierte Erzeuger von $\ker(\phi_a)$ ist, hat $m_{a,K}$ minimalen Grad und ist eindeutig bestimmt. Ein weiteres solches normiertes Polynom g hat nämlich zunächst den gleichen Grad wie $m_{a,K}$, da sich g und $m_{a,K}$ gegenseitig teilen müssen. Die Differenz $g - m_{a,K}$ ist dann ein Element von $\ker(\phi_a)$ echt kleineren Grads als $m_{a,K}$, und muß daher gleich Null sein. Also gilt $g = m_{a,K}$. □

Das Minimalpolynom von i über $\mathbb{R}$ ist zum Beispiel $m_{i,\mathbb{R}} = t^2 + 1$. Minimalpolynome werden auch in anderen Zusammenhängen analog definiert, müssen aber nicht mehr unbedingt irreduzibel sein. Siehe beispielsweise Minimalpolynome von Endomorphismen von endlich dimensionalen Vektorräumen.

Ein zweiter, konstruktiverer Beweis für Lemma 5.6 kann wie folgt geführt werden. Sei $a \in I$, $a \neq 0$. Die Potenzen $1, a, a^2, \ldots$ sind K-linear abhängig, da I ein endlich dimensionaler K-Vektorraum ist. Sei $f \in K[t]$ ein Polynom kleinsten Grads ≥ 1 mit $f(a) = 0$. Da I ein Integritätsring ist, muß f irreduzibel sein und es gilt insbesondere $f(0) \neq 0$. Mit $c = -f(0)$ gibt es ein $g \in K[t]$, so daß $f = gt - c$ und $gt/c = f/c + 1$. Für $b = g(a)/c \in I$ ergibt sich dann $ab = g(a)a/c = f(a)/c + 1 = 1$.

5.13 Satz. *Eine einfache transzendente Erweiterung E/K ist isomorph zu $K(t)$.*

Beweis. Ist $a \in E$ ein primitives Element, so ist a transzendent über K. Andernfalls wäre $[E : K] = [K(a) : K] < \infty$ nach Satz 5.12, im Widerspruch zu $[E : K] = \infty$ nach Satz 5.10. Es gilt daher $E = K(a) \cong K(t)$ nach Satz 5.10. □

Wir betrachten jetzt algebraische und endliche Körpererweiterungen. Ist E/K eine Körpererweiterung und $a \in E$ algebraisch über K, so ist a auch algebraisch über jedem Zwischenkörper F von E/K, da $m_{a,K} \in F[t]$, $m_{a,K} \neq 0$ und $m_{a,K}(a) = 0$ gilt.

5.14 Satz. *Für eine Körpererweiterung E/K sind äquivalent:*

(i) *E/K ist endlich,*

(ii) *E/K ist algebraisch und endlich erzeugbar,* *(iii)* *E/K ist endlich erzeugbar mit algebraischen Erzeugern.*

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei E/K endlich. Jedes Element $a \in E$ ist algebraisch, weil die Potenzen $1, a, a^2, \ldots$ linear abhängig über K sind. Ist $e_1, \ldots, e_n \in E$ eine K-Basis von E, so gilt $E = K(e_1, \ldots, e_n)$. Daher ist E/K algebraisch und endlich erzeugbar.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Ist klar.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Sei nun E/K endlich erzeugbar mit den über K algebraischen Erzeugern $a_1, \ldots, a_r \in E$, also $E = K(a_1, \ldots, a_r)$. Setze $E_i = K(a_1, \ldots, a_i)$, so daß $E_i = E_{i-1}(a_i)$. Weil jedes a_i algebraisch über K und somit nach der Bemerkung vor dem Satz auch algebraisch über E_{i-1} ist, gilt $[E_i : E_{i-1}] < \infty$ nach Satz 5.12. Daraus folgt $[E : K] = \prod_i [E_i : E_{i-1}] < \infty$ nach Satz 5.4. □

5.15 Satz. *Sei E/K eine Körpererweiterung und $A \subseteq E$. Sind die Elemente in A algebraisch über K, so ist $K(A)/K$ algebraisch und es gilt $K[A] = K(A)$.*

Beweis. Wir führen die Situation zunächst auf endliche Erweiterungen zurück. Es gilt $K(A) = \cup_M K(M)$, wobei M die endlichen Teilmengen von A durchläuft. Zunächst ist nämlich $K(M) \subseteq K(A)$ für alle M und somit $\cup_M K(M) \subseteq K(A)$. Es genügt nun zu zeigen, daß $\cup_M K(M)$ ein Körper ist, welcher K und A enthält. Seien dazu $a, b \in \cup_M K(M)$. Es gibt endliche Mengen $M_1, M_2 \subseteq A$ mit $a \in K(M_1)$ und $b \in K(M_2)$. Dann gilt weiter, daß $a, b \in K(M_1 \cup M_2)$, wobei $M_1 \cup M_2$ ebenfalls endlich ist. Somit sind $a + b, a - b, ab, a/b \in K(M_1 \cup M_2) \subseteq \cup_M K(M)$. Wegen $A = \cup_M M$ gilt $K, A \subseteq \cup_M K(M)$. Es folgt $K(A) = \cup_M K(M)$.

Für endliches $M \subseteq A$ ist $K(M)/K$ nach Satz 5.14 endlich und algebraisch. Also besteht $K(A) = \cup_M K(M)$ nur aus über K algebraischen Elementen. Für $a \in K[A]$ gilt $a^{-1} \in K[a]$ nach Satz 5.12, (ii). Wegen $K[a] \subseteq K[A]$ folgt also $a^{-1} \in K[A]$ und damit $K[A] = K(A)$. □

5.16 Satz. *Sei E/K eine Körpererweiterung und F ein Zwischenkörper. Dann ist E/K genau dann algebraisch, wenn E/F und F/K algebraisch sind.*

Beweis. Ist E/K algebraisch, so auch F/K. Außerdem gilt für $a \in E$, daß $m_{a,K} \in F[t]$ und somit a auch algebraisch über F ist. Umgekehrt sei $a \in E$ algebraisch über F und bezeichne L den Zwischenkörper von E/K, der durch Adjunktion der Koeffizienten von $m_{a,F}$ an K entsteht. Dann ist a wegen $m_{a,F} \in L[t]$ algebraisch über L. Weiter sind $L(a)/L$ und L/K endlich wegen Satz 5.14 und weil F/K algebraisch ist. Folglich ist $L(a)/K$ endlich nach Satz 5.4 und damit algebraisch nach Satz 5.14. Es ergibt sich, daß a algebraisch über K ist. □

Die Eigenschaft „algebraisch“ ist also transitiv. Dies gilt nach Satz 5.4 auch für die Eigenschaft „endlich“.

5.17 Definition. Sei E/K eine Körpererweiterung und $A \subseteq E$ die Menge der über K algebraischen Elemente von E. Dann heißt $K(A)$ der algebraische Abschluß von K in E. Gilt $K(A) = K$, so nennt man K algebraisch abgeschlossen in E.

5.18 Satz. *Der algebraische Abschluß von K in E ist ein Teilkörper von E und ist algebraisch abgeschlossen in E.*

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus Theorem 5.15 und die zweite aus Satz 5.16. □

5.19 Definition. Seien E/K eine Körpererweiterung und F_1, F_2 Zwischenkörper. Dann wird $F_1F_2 = F_1(F_2) = F_2(F_1)$ als das Kompositum von F_1 und F_2 in E bezeichnet. Das Kompositum einer beliebigen Menge $\mathcal{F}$ von Zwischenkörpern von E/K definieren wir als $K(\cup\mathcal{F})$.

Etwas spezieller nennen wir auch F_1F_2/K das Kompositum von F_1/K und F_2/K und F_1F_2/F_2 die Translation von F_1/K um F_2 in E. Typischerweise stellt man solche Körpererweiterungen graphisch dar. Die Abbildung 5.1 enthält eine Zwischenkörpersituation, eine Translation und ein Kompositum.

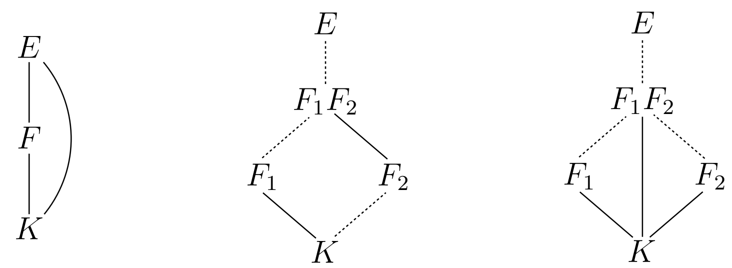


Abbildung 5.1: Zwischenkörper, Translation und Kompositum

Es ist nun natürlich, zu fragen, wie sich die Eigenschaften „endlich“ und „algebraisch“ innerhalb der Diagramme in Abbildung 5.1 fortsetzen. Die relevanten Körpererweiterungen sind hierbei mit durchgezogenen Linien markiert. Für das linke Diagramm haben wir oben bereits die Transitivität von „algebraisch“ und „endlich“ gesehen.

5.20 Satz. *Seien E/K eine Körpererweiterung und F_1, F_2 Zwischenkörper. Für die Translation F_1F_2/F_2 gilt:*

(i) Ist F_1/K algebraisch, so auch F_1F_2/F_2.

(ii) Ist F_1/K endlich, so auch F_1F_2/F_2 und es gilt $[F_1F_2 : F_2] \leq [F_1 : K]$.

Für das Kompositum F_1F_2/K gilt:

(*iii*) *Sind F_1/K und F_2/K algebraisch, so auch F_1F_2/K.*

(*iv*) *Sind F_1/K und F_2/K endlich, so auch F_1F_2/K und es gilt $[F_1F_2 : K] \leq [F_1 : K][F_2 : K]$.*

Beweis. (*i*) folgt aus Satz 5.15 angewendet auf $F_2(F_1)/F_2$, da die Elemente von F_1 auch algebraisch über F_2 sind. (*iii*) folgt aus (*i*) und Satz 5.16. (*iv*) folgt aus (*ii*) und der Gradformel $[F_1F_2 : K] = [F_1F_2 : F_2][F_2 : K] \leq [F_1 : K][F_2 : K]$. Zum Beweis von (*ii*) betrachte man $F_2[F_1]$. Jedes K-Erzeugendensystem von F_1 wird zu einem F_2-Erzeugendensystem von $F_2[F_1]$. Da F_1 nach Annahme eine endliche K-Basis besitzt, ist auch $F_2[F_1]$ endlich-dimensional über F_2 mit Dimension kleiner gleich $[F_1 : K]$. Nach Lemma 5.6 ist dann $F_2[F_1]$ ein Körper. Es folgt $F_1F_2 = F_2(F_1) = F_2[F_1]$ und (*ii*). □

Der Beweis zeigt also, daß für $[F_1 : K] < \infty$ jedes K-Erzeugendensystem von F_1 auch ein F_2-Erzeugendensystem von F_1F_2 liefert.

Sind $[F_1 : K]$ und $[F_2 : K]$ teilerfremd, so gilt $[F_1F_2 : K] = [F_1 : K][F_2 : K]$ wegen $[F_1 : K] \mid [F_1F_2 : K]$ und $[F_2 : K] \mid [F_1F_2 : K]$ nach Satz 5.4 und wegen Satz 5.20, (*iv*).

5.21 Definition. Seien E/K eine Körpererweiterung und F_1, F_2 Zwischenkörper von E/K. Dann heißen F_1/K und F_2/K linear disjunkt und F_1 und F_2 linear disjunkt über K, wenn jede über K linear unabhängige Menge von Elementen von F_1 über F_2 linear unabhängig bleibt.

Der folgende Satz zeigt unter anderem, daß die Eigenschaft „linear disjunkt“ symmetrisch ist.

5.22 Satz. *Seien E/K eine Körpererweiterung und F_1, F_2 Zwischenkörper von E/K. Dann sind äquivalent.*

(*i*) *F_1 und F_2 sind linear disjunkt über K.*

(*ii*) *F_2 und F_1 sind linear disjunkt über K.*

(*iii*) *Sind $\{a_i \mid i \in I\}$ und $\{b_j \mid j \in J\}$ Mengen über K linear unabhängiger Elemente von F_1 beziehungsweise F_2, so ist $\{a_ib_j \mid i \in I, j \in J\}$ eine Menge über K linear unabhängiger Elemente von F_1F_2.*

Beweis. (*i*) $\Rightarrow$ (*iii*): Es gelte $\sum_{i,j} \mu_{i,j}a_ib_j = 0$ mit $\mu_{i,j} \in K$. Wir setzen $\lambda_i = \sum_j \mu_{i,j}b_j$, so daß $\lambda_i \in F_2$ und $\sum_{i,j} \mu_{i,j}a_ib_j = \sum_i \lambda_ia_i = 0$ gilt. Nach Voraussetzung ergibt sich $\lambda_i = 0$ für alle $i \in I$, und aus $\lambda_i = \sum_j \mu_{i,j} b_j = 0$ dann auch $\mu_{i,j} = 0$ für alle $j \in J$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Sei $\{a_i \mid i \in I\}$ eine Menge über K linear unabhängiger Elemente von F_1 und $\{b_j \mid j \in J\}$ eine K-Basis von F_2. Es gelte $\sum_i \lambda_i a_i = 0$ mit $\lambda_i \in F_2$. Es gibt $\mu_{i,j} \in K$ mit $\lambda_i = \sum_j \mu_{i,j} b_j$. Dann gilt $\sum_i \lambda_i a_i = \sum_{i,j} \mu_{i,j} a_i b_j = 0$ und nach Voraussetzung $\mu_{i,j} = 0$. Es ergibt sich $\lambda_i = 0$.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$: Aussage (iii) ist symmetrisch in F_1 und F_2, daher folgt der Beweis analog. □

5.23 Satz. *Seien E/K eine Körpererweiterung und F_1, F_2 Zwischenkörper von E/K.*

(i) Für $[F_1 : K] < \infty$ sind F_1 und F_2 genau dann über K linear disjunkt, wenn $[F_1 : K] = [F_1F_2 : F_2]$ gilt.

(ii) Sind F_1 und F_2 linear disjunkt über K, so gilt $F_1 \cap F_2 = K$.

(iii) Bleibt eine K-Basis von F_1 über F_2 linear unabhängig, so sind F_1 und F_2 linear disjunkt über K.

Beweis. (i): Aus $[F_1 : K] < \infty$ ergibt sich zunächst $F_1F_2 = F_2[F_1]$, und jedes K-Erzeugendensystem von F_1 ist auch ein F_2-Erzeugendensystem von F_1F_2.

„ $\Rightarrow$ “: Da eine K-Basis von F_1 nach Annahme auch eine F_2-Basis von F_1F_2 ist, folgt $[F_1 : K] = [F_1F_2 : F_2]$.

„ $\Leftarrow$ “: Jede über K linear unabhängige Teilmenge T von F_1 kann zu einer Basis von F_1 über K ergänzt werden. Diese ist ein Erzeugendensystem von F_1F_2 über F_2 und wegen der Gradgleichheit auch eine Basis von F_1F_2 über F_2. Somit ist T ebenfalls über F_2 linear unabhängig.

(ii): Gibt es $a \in F_1 \cap F_2 \backslash K$, so sind $1, a \in F_1$ zwar linear unabhängig über K, aber nicht linear unabhängig über F_2.

(iii): Übung. □

Als Beispiel betrachte man $K = \mathbb{Q}$, $F_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $F_2 = \mathbb{Q}(i)$ mit $i^2 = -1$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$. Dann gilt $F_1F_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ und $[F_1F_2 : F_1] = 2$. Also sind F_1 und F_2 linear disjunkt über K.

5.24 Lemma. *Sei E/K eine einfache algebraische Erweiterung mit primitivem Element a und F ein Zwischenkörper. Dann entsteht F durch Adjunktion der Koeffizienten von $m_{a,F}$ an K.*

Beweis. Sei L der durch die Adjunktion entstehende Körper. Da $m_{a,F} \in F[t]$ folgt $L \subseteq F$. Es gilt $m_{a,F} \in L[t]$ und $m_{a,F}$ erfüllt die Eigenschaften des Minimalpolynoms $m_{a,L}$. Daher ergibt sich $m_{a,L} = m_{a,F}$ und $[E : L] = [L(a) : L] = \deg(m_{a,L}) = \deg(m_{a,F}) = [F(a) : F] = [E : F]$. Es folgt $L = F$. □

5.25 Satz. *Die Körpererweiterung E/K ist genau dann einfach und algebraisch, wenn E/K nur endlich viele Zwischenkörper hat.*

Beweis. Lassen wir aus. □

Als Anwendung betrachten wir kurz Konstruktionsprobleme mit Zirkel und Lineal. Unter Vorgabe zweier Punkte mit Abstand 1 konstruiert man weitere Punkte als Schnittpunkte von Geraden und Kreisen. Geraden müssen durch zwei verschiedene, bereits konstruierte bzw. die vorgegebenen Punkte gelegt werden. Bei Kreisen muß der Mittelpunkt ein bereits konstruierter bzw. vorgegebener Punkt und der Radius gleich dem Abstand zweier bereits konstruierter bzw. der vorgegebenen Punkte sein. Wir nennen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ konstruierbar, wenn sie als Abstand zweier konstruierter Punkte erhalten werden kann.

Da Kreise quadratischen Gleichungen genügen, werden im Konstruktionsprozeß koordinatenweise gedacht neben dem Lösen von linearen Gleichungen „höchstens" Quadratwurzeln gezogen. Daher gilt für eine konstruierbare Zahl $a \in \mathbb{R}$ notwendigerweise $a \in \mathbb{Q}(\sqrt{b_1}, \ldots, \sqrt{b_n}) \subseteq \mathbb{R}$ mit geeigneten $b_i \in \mathbb{Q}(\sqrt{b_1}, \ldots, \sqrt{b_{i-1}})$ und $b_i \geq 0$. Für konstruierbares a ist $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$ also eine Potenz von 2. Man kann darüberhinaus zeigen, daß jedes $a \in \mathbb{Q}(\sqrt{b_1}, \ldots, \sqrt{b_n}) \subseteq \mathbb{R}$ mit beliebigen $b_i \in \mathbb{Q}(\sqrt{b_1}, \ldots, \sqrt{b_{i-1}})$ und $b_i \geq 0$ konstruierbar ist.

Beim Delischen Problem geht es um die Verdoppelung des Volumens eines vorgegebenen Würfels. Nach Normierung soll also zu einem Würfel des Volumens und der Kantenlänge 1 ein Würfel des Volumens 2 mit Kantenlänge $\sqrt[3]{2}$ konstruiert werden. Wegen $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$ ist dies nach Satz 5.4 nicht möglich.

Bei der Quadratur des Kreises soll ein Quadrat bestimmt werden, dessen Flächeninhalt mit dem eines Kreises vom Radius 1 übereinstimmt. Gesucht ist also eine Kantenlänge a mit $a^2 = \pi$. Da π transzendent ist, muß a nach Satz 5.15 ebenfalls transzendent sein und ist daher nicht konstruierbar.

Die Winkeldreiteilung ist ebenfalls nicht möglich. Das Problem kann mittels Rechenregeln für sin und cos darauf zurückgeführt werden, eine Nullstelle eines irreduziblen Polynoms vom Grad drei über $\mathbb{Q}$ zu konstruieren.

5.2 Zerfällungskörper und algebraischer Abschluß

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß es erstens zu jedem Körper K und jedem nicht konstanten Polynom $f \in K[t]$ einen Erweiterungskörper gibt, über dem f in Linearfaktoren zerfällt, und daß es zweitens einen Erweiterungskörper von K gibt, über dem jedes nicht konstante $f \in K[t]$ in Linearfaktoren zerfällt.

5.26 Satz (Kronecker)**.** *Sei K ein Körper und $f \in K[t]$ irreduzibel. Dann gibt es einen Erweiterungskörper E von K und $a \in E$, so daß $f(a) = 0$, $E = K(a)$ und $[E : K] = \deg(f)$.*

Beweis. Wir definieren $E = K[t]/fK[t]$. Nach Korollar 3.8 kann E als Erweiterungskörper von K aufgefaßt werden. Bezeichnet $a = t + fK[t]$ die Klasse von t in $K[t]/fK[t]$, so gilt $E = K[a]$ und $f(a) = 0$. Ist nämlich $x \in a$, so gilt $x \equiv t \bmod f$ und $f(x) \equiv f(t) \equiv 0 \bmod f$. Die Gradaussage folgt nach Satz 5.12. □

In anderen Worten erzwingt man also durch die Quotientenbildung in $K[t]$ die algebraische Relation $f(t) = 0$. Man kann Satz 5.26 auf auch reduzible Polynome $f \in K[t]$ anwenden, indem man einen irreduziblen Faktor von f betrachtet. So erhält man also stets eine Körpererweiterung von K, indem ein nicht konstantes $f \in K[t]$ eine Nullstelle besitzt.

5.27 Definition. Sei K ein Körper, $M \subseteq K[t]$ eine Menge von nicht konstanten Polynomen und E ein Erweiterungskörper von K. Dann heißt E Zerfällungskörper von M über K, wenn jedes Polynom $f \in M$ über E in Linearfaktoren zerfällt und E durch Adjunktion der Nullstellen der f aus E an K entsteht.

Der Zerfällungskörper ist also der kleinste Erweiterungskörper von K, in dem die $f \in M$ alle ihre Nullstellen haben. Bei einer endlichen Menge $M = \{f_1, \dots, f_n\}$ sprechen wir auch vom Zerfällungskörper der $f_1, \dots, f_n$ über K.

5.28 Satz. *Zu jedem Körper K und nicht konstantem Polynom $f \in K[t]$ gibt es einen Zerfällungskörper E von f über K mit $[E : K] \leq \deg(f)!$.*

Beweis. Sei $E_0 = K$ und $f_0 = f$. Wir gehen nun induktiv vor. Sei $i \geq 0$ und $g_i \in K[t]$ ein irreduzibler Faktor von f_i. Nach Satz 5.26 gibt es einen Erweiterungskörper E_{i+1} von E_i und $a_{i+1} \in E_{i+1}$ mit $E_{i+1} = E_i(a_{i+1})$, $g_i(a_{i+1}) = f_i(a_{i+1}) = f(a_{i+1}) = 0$ und $[E_i(a_{i+1}) : E_i] = \deg(g_i) \leq \deg(f_i)$. Wir setzen $f_{i+1} = f_i/(t - a_{i+1}) \in E_{i+1}[t]$. Nach $n = \deg(f)$ Schritten erhalten wir $E_n = K(a_1, \dots, a_n)$ und mit $c = f_n \in K$ gilt $f = c\prod_i(t - a_i)$ in $E_n[t]$. Die Gradaussage folgt aus $\deg(f_{i+1}) = \deg(f_i) - 1$. □

Die im Beweis durchgeführte Konstruktion eines Zerfällungskörpers von f hängt von der Wahl der irreduziblen Polynome g_i ab. Im nächsten Abschnitt zeigen wir jedoch, daß alle Zerfällungskörper von f über K isomorph sind. Man spricht daher auch manchmal von dem Zerfällungskörper von f über K.

Als Beispiel betrachten wir $f = t^2 - 2 \in \mathbb{Q}[t]$ und $g = t^3 - 2 \in \mathbb{Q}[t]$. In $E = \mathbb{Q}[t]/f\mathbb{Q}[t]$ gibt es eine Nullstelle von f, die wir mit $\sqrt{2}$ bezeichnen. Dann gilt $f = (t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})$ über E, und E ist bereits ein Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$, vom Grad 2 über $\mathbb{Q}$.

In $\mathbb{C}$ gilt $g = (t - \sqrt[3]{2})(t - \exp(2\pi i/3)\sqrt[3]{2})(t - \exp(4\pi i/3)\sqrt[3]{2})$. Dann ist $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \exp(2\pi i/3))$ ein in $\mathbb{C}$ gelegener Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$, und zwar vom Grad 6 über $\mathbb{Q}$. Alternativ erhalten wir einen Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{Q}[t,s]/(t^3 - 2, s^2 + ts + t^2)$. In $\mathbb{Q}[t]/(t^3 - 2)[s]$ gilt hierbei $s^3 - 2 = (s - t)(s^2 + ts + t^2)$. Dieser Zerfällungskörper hat den Vorteil, daß man in ihm mittels eines Computers exakt rechnen kann, wohingegen dies bei dem anderen Zerfällungskörper nicht möglich ist, wenn die komplexen Zahlen als Fließkommazahlen mit endlicher Präzision dargestellt werden.

5.29 Definition. Ein Körper K heißt algebraisch abgeschlossen, wenn aus E/K algebraisch $E = K$ folgt. Ist E/K algebraisch und E algebraisch abgeschlossen, so heißt E algebraischer Abschluß von K. Wir bezeichnen ein solches E mit $\bar{K}$ oder K^a.

Im Hinblick auf Satz 5.28 faktorisiert jedes nicht konstante Polynom über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K in Linearfaktoren, hat also alle seine Nullstellen in K. Iterativ sieht man, daß umgekehrt ein Körper K algebraisch abgeschlossen ist, wenn jedes nicht konstante Polynom $f \in K[t]$ eine Nullstelle in K besitzt. Ist E ein algebraisch abgeschlossener Erweiterungskörper von K, so ist der algebraische Abschluß von K in E nach Satz 5.16 selbst algebraisch abgeschlossen und daher ein algebraischer Abschluß von K.

5.30 Satz. *Jeder Körper besitzt einen algebraischen Abschluß.*

Beweis. Wir gehen im Prinzip wie in Satz 5.28 vor, nur daß wir alle nicht konstanten Polynome aus $K[t]$ simultan betrachten. Wie in Satz 5.28 müssen wir geeignete irreduzible Faktoren wählen. Da wir es nun mit unendlich vielen Polynomen zu tun haben, benötigen wir dazu das Auswahlaxiom. Für die Konstruktion ist es zweckmäßig, Polynomringe in unendlich vielen Variablen zu betrachten und das Auswahlaxiom in der Form der Existenz von maximalen Idealen zu verwenden.

Sei M die Menge aller nicht konstanten Polynome in $K[t]$. Wir konstruieren zuerst einen Erweiterungskörper von K, in dem jedes $f \in M$ eine Nullstelle besitzt. Für jedes $f \in M$ bezeichne X_f eine eigene Variable und sei $X = \{X_f \mid f \in M\}$. Wir betrachten den Polynomring $K[X]$ und darin das von den $f(X_f)$ erzeugte Ideal $\mathfrak{a}$. Wir nehmen nun an, daß $\mathfrak{a} \neq K[X]$ ist (Beweis folgt gleich). Dann gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{b}$ von $K[X]$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, und $K[X]/\mathfrak{b}$ ist ein Körper. Wegen $K \cap \mathfrak{b} = \{0\}$ kann $K[X]/\mathfrak{b}$ als Erweiterungskörper von K aufgefaßt werden. Die von X_f in $K[X]/\mathfrak{b}$ erzeugte Klasse ist dann eine Nullstelle von f, weil $f(X_f) \in \mathfrak{b}$ gilt. Also ist $K[X]/\mathfrak{b}$ der gesuchte Körper. Der Beweis von $\mathfrak{a} \neq K[X]$ erfolgt durch Widerspruch. Ist nämlich $\mathfrak{a} = K[t]$, dann gibt es endlich viele $g_i \in K[X]$ und $f_i \in M$ mit $1 = \sum_i g_i f_i(X_{f_i})$. Satz 5.28 angewendet auf $\prod_i f_i$ zeigt, daß es einen Erweiterungskörper E von K gibt, in dem jedes f_i eine Nullstelle a_i besitzt. Sei $\phi : K[X] \to E$ der durch $X_{f_i} \mapsto a_i$ und $X_f \mapsto 0$ für $f \neq f_i$ für alle i definierte Einsetzhomomorphismus. Dann gilt in E, daß $\phi(f_i(X_{f_i})) = 0$ und folglich $1 = \sum_i \phi(g_i)\phi(f_i(X_{f_i})) = 0$ ist. Dies ist ein Widerspruch zur Körpereigenschaft von E, und daher kann $\mathfrak{a} = K[X]$ nicht gelten.

Durch Iteration dieses Verfahrens erhalten wir eine aufsteigende Kette $K = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \dots$ von Körpern, so daß jedes nicht konstante Polynom in $E_i[t]$ eine Nullstelle in E_{i+1} besitzt. Wir setzen $E = \cup_{i=0}^{\infty} E_i$. Je zwei Elemente $a, b \in E$ liegen bereits in einem E_i. Wir machen E zu einem Körper, indem wir die Summe, Produkt usw. von a, b durch E_i definieren. Wegen der Teilkörpereigenschaft von $E_i \subseteq E_j$ für $j \geq i$ ist dies unabhängig von der Wahl von i.

Ist $f \in E[t]$ ein nicht konstantes Polynom, so gilt bereits $f \in E_i[t]$, da f nur endlich viele Koeffizienten ungleich Null hat. Dann hat f eine Nullstelle in E_i und somit auch in E. Nach den Bemerkungen vor dem Satz ist E algebraisch abgeschlossen und der algebraische Abschluß K^a von K in E ist daher ein algebraischer Abschluß von K. □

Im nächsten Abschnitt zeigen wir, daß je zwei algebraische Abschlüsse von K isomorph sind. Man spricht daher auch manchmal von dem algebraischen Abschluß von K.

Aufgrund des nächsten Satzes befindet sich ein algebraischer Abschluß von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$.

5.31 Satz (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Der Körper der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen.*

Beweis. Erfolgt üblicherweise in der Funktionentheorie I. □

Vom Standpunkt der Computeralgebra aus läßt sich ein algebraischer Abschluß eines Körpers K trotz der impliziten Verwendung des Auswahlaxioms zumindest zum Teil simulieren, wenn man nur Polynome über endlichen Erweiterungen von K faktorisieren kann. Man stellt K^a als abstrakten Datentyp dar, der zu jedem Zeitpunkt durch eine endliche Erweiterung F von K repräsentiert wird. Anfänglich gilt $F = K$. Sollen nun die Nullstellen eines nicht konstanten Polynoms $f \in K^a[t]$ berechnet werden, so gilt zunächst $f \in F[t]$ und man bestimmt einen Zerfällungskörper E von f über F mittels der Vorgehensweise im Beweis von Satz 5.28. Man ersetzt dann F in der Darstellung von K^a durch E und liefert die Nullstellen als Elemente von E zurück. Im Endeffekt wird die unendliche Operation, die mittels des Auswahlaxioms ausgeführt wird, durch einen unbegrenzten dynamischen Prozeß modelliert.

5.32 Korollar. *Sei K ein Körper und $M \subseteq K[t]$ eine Menge nicht konstanter Polynome. Dann gibt es einen Zerfällungskörper von M über K.*

Beweis. Sei K^a ein algebraischer Abschluß von K und $A = \{a \in K^a \mid f(a) = 0 \text{ und } f \in M\}$. Dann leistet $E = K(A)$ das Gewünschte. □

5.3 Homomorphismen und ihre Fortsetzungen

Bei der Untersuchung mathematischer Objekte ist es wesentlich, auch die strukturerhaltenden Abbildungen zwischen ihnen zu betrachten. Für (endliche) Körpererweiterungen ist dies zentraler Bestandteil der Galoistheorie und soll in diesem Abschnitt begonnen werden. Als Anwendung beweisen wir, daß Zerfällungskörper und algebraische Abschlüsse bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind.

5.33 Definition. Ein Homomorphismus $\sigma : E_1 \to E_2$ der Körper E_1 und E_2 ist ein Ringhomomorphismus der Ringe E_1 und E_2. Die Menge dieser Homomorphismen wird mit $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ bezeichnet.

Sind E_1/K_1 und E_2/K_2 Körpererweiterungen und $\sigma \in \mathrm{Hom}(K_1, K_2)$, so bezeichnen wir die Menge aller Fortsetzungen $\tau \in \mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ von σ mit $\mathrm{Hom}_\sigma(E_1, E_2)$. Gilt $K_1 = K_2$ und $\sigma = \mathrm{id}$, so schreiben wir dafür auch $\mathrm{Hom}_K(E_1, E_2)$, wobei $K = K_1$, und sprechen von K-Homomorphismen der Körper E_1 und E_2 oder von Homomorphismen der Körpererweiterungen E_1/K und E_2/K.

Weiter verwenden wir die Begriffe Isomorphismus, Endomorphismus und Automorphismus wie erwartet und schreiben $\mathrm{End}(E)$, $\mathrm{Aut}(E)$ usw. Zwei Erweiterungskörper E_1 und E_2 von K können dann beispielsweise nur isomorph oder auch isomorph über K sein.

Ist $\sigma \in \mathrm{Hom}_K(E_1, E_2)$, so gilt also $\sigma(x) = x$ für alle $x \in K$ und σ ist K-linear. Ist allgemeiner $\sigma \in \mathrm{Hom}(E_1, E_2)$, so gilt definitionsgemäß $\sigma(1) = 1$. Wegen $1 \neq 0$ in Körpern ist σ nicht die Nullabbildung. Daher muß $\ker(\sigma) = \{0\}$ gelten, da dies das einzige Ideal von E_1 ungleich E_1 ist, und σ ist ein Isomorphismus auf den Teilkörper $\sigma(E_1)$ von E_2. Außerdem ergibt sich, daß E_1 und E_2 isomorphen Primkörper haben. Sind E_1 und E_2 Teilkörper eines gemeinsamen Oberkörpers, so sind die Primkörper gleich und jedes $\sigma \in \mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ ist linear bezüglich des Primkörpers.

Für $\sigma \in \mathrm{Hom}(K_1, K_2)$ erhalten wir durch koeffizientenweises Anwenden einen ebenfalls mit σ bezeichneten Ringhomomorphismus $K_1[t] \to K_2[t]$. Es ist praktisch, $f^\sigma = \sigma(f)$ zu schreiben.

5.34 Lemma. *Seien E_1/K_1 und E_2/K_2 Körpererweiterungen, $\sigma \in \mathrm{Hom}(K_1, K_2)$, $f \in K_1[t]$ und a eine Nullstelle von f in E_1.*

(*i*) *Für* $\tau \in \mathrm{Hom}_\sigma(E_1, E_2)$ *ist* $\tau(a)$ *eine Nullstelle von* $f^\sigma \in K_2[t]$ *in* E_2.

(*ii*) *Sei* σ *ein Isomorphismus und* f *irreduzibel in* $K_1[t]$. *Ist dann* $b \in E_2$ *eine beliebige Nullstelle von* f^σ, *so gibt es ein* $\tau \in \mathrm{Hom}_\sigma(K_1(a), K_2(b))$ *mit* $\tau(a) = b$, *und* τ *ist ein Isomorphismus.*

Beweis. (*i*): Es gilt $f^\sigma(\tau(a)) = \tau(f(a)) = 0$. (*ii*): Ohne Einschränkung können wir f und damit f^σ als normiert annehmen. Da σ ein Isomorphismus ist, muß f^σ irreduzibel in $K_2[t]$ sein. Nach Satz 5.12 folgt $m_{a,K_1} = f$, $m_{b,K_2} = f^\sigma$ und $K_1(a) \cong K_1[t]/fK_1[t]$, $K_2(b) \cong K_2[t]/f^\sigma K_2[t]$. Die Faktorringe $K_1[t]/fK_1[t]$ und $K_2[t]/f^\sigma K_2[t]$ sind aber offenbar unter Verwendung von σ isomorph. Die Kombination der Isomorphismen ergibt τ mit $\tau(a) = b$. □

Auf die Voraussetzung der Irreduzibilität von f kann nicht verzichtet werden (Gegenbeispiel: $f = (t-1)(t-2) \in \mathbb{Q}[t]$, $\sigma = \mathrm{id}_\mathbb{Q}$, $a = 1$, $b = 2$ und $1 = \tau(a) = b = 2$).

5.35 Satz. *Sei* $\sigma \in \mathrm{Hom}(K_1, K_2)$ *ein Isomorphismus,* $f \in K_1[t]$ *ein nicht konstantes Polynom,* E_1 *der Zerfällungskörper von* f *über* K_1 *und* E_2 *der Zerfällungskörper von* f^σ *über* K_2. *Dann gibt es einen Isomorphismus* $\tau \in \mathrm{Hom}_\sigma(E_1, E_2)$.

Beweis. Der Satz folgt im Prinzip auch aus den untenstehenden, allgemeineren Überlegungen. Der folgende Beweis dient nur der Konkretheit.

Ausgehend von E_1 und E_2 führen wir die Konstruktion von E_1 und E_2 im Beweis von Satz 5.28 noch einmal simultan für f und f^σ durch, wobei die auftretenden, irreduziblen Faktoren von f^σ die g_i^σ sein sollen. Hierbei wurde E_2 möglicherweise zwar anders konstruiert, aber jedes g_i^σ zerfällt dennoch über E_2 in Linearfaktoren. Wir definieren also induktiv $E_{1,i+1} = E_{1,i}(a_{i+1})$ mit $g_i(a_{i+1}) = 0$ wie gehabt und $E_{2,i+1} = E_{2,i}(b_{i+1})$ mit $g_i^\sigma(b_{i+1}) = 0$ für ein $b_{i+1} \in E_2$. Unter Verwendung von Lemma 5.34 können wir $\sigma_i \in \mathrm{Hom}(E_{1,i}, E_{2,i})$ zu $\sigma_{i+1} \in \mathrm{Hom}_{\sigma_i}(E_{1,i+1}, E_{2,i+1})$ durch $\sigma_{i+1}(a_{i+1}) = b_{i+1}$ fortsetzen. Schließlich erhalten wir $\tau = \sigma_n \in \mathrm{Hom}_\sigma(E_1, E_2)$. □

5.36 Korollar. *Seien* E_1 *und* E_2 *Zerfällungskörper des nicht konstanten Polynoms* $f \in K[t]$ *über* K. *Dann sind* E_1/K *und* E_2/K *isomorph.*

Jeder K-Isomorphismus von E_1 und E_2 bildet die Nullstellen von f in E_1 auf die Nullstellen von f in E_2 ab. Die Untersuchung aller solcher K-Isomorphismen für $E_1 = E_2$ ist Inhalt der Galoistheorie.

Als Beispiel betrachten wir die Zerfällungskörper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ von $f = t^2 - 2$ und $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \exp(2\pi i/3))$ von $g = t^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$. Durch $\sigma : \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}$ bekommen wir einen $\mathbb{Q}$-Automorphismus von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, der einzig weiter mögliche außer der

Identität. Weil g irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist und drei verschiedene Nullstellen in E hat, gibt es nach Lemma 5.34 genau drei Elemente σ in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), E)$. Das Minimalpolynom von $\exp(2\pi i/3)$ über $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ist t^2+t+1. Dies ist also irreduzibel über $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ und hat zwei Nullstellen in E. Folglich gibt es zu jedem σ zwei Elemente τ in $\mathrm{Aut}_\sigma(E)$. Damit besteht $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(E)$ aus genau 6 Elementen.

5.37 Satz. *Sei $\sigma \in \mathrm{Hom}(K_1, K_2)$ ein Isomorphismus, E/K_1 eine algebraische Erweiterung und C ein algebraischer Abschluß von K_2. Dann gibt es ein $\tau \in \mathrm{Hom}_\sigma(E, C)$.*

Beweis. Sei A die Menge der Paare (F, τ), wobei F ein Zwischenkörper von E/K_1 und $\tau \in \mathrm{Hom}_\sigma(F, C)$ ist. Wegen $(K_1, \sigma) \in A$ ist A nicht leer. Wir schreiben $(F_1, \tau_1) \leq (F_2, \tau_2)$, wenn $F_1 \subseteq F_2$ und τ_2 eine Fortsetzung von τ_1 ist. Dies definiert eine Halbordnung auf A. Wir zeigen, daß A durch $\leq$ induktiv geordnet wird. Sei dazu L eine Kette in A. Wir definieren den Körper F' als die Vereinigung der in L vorkommenden Körper. Ist $x \in F'$, so gibt es ein $(F_1, \tau_1) \in A$ mit $x \in F_1$. Wir können durch $\tau'(x) = \tau_1(x)$ ein Element $\tau' \in \mathrm{Hom}_\sigma(F', C)$ definieren. Das Paar $(F', \tau') \in A$ wird damit zur oberen Schranke von L. Nach dem Zornschen Lemma gibt es ein maximales Element $(F, \tau) \in A$ und es bleibt $F = E$ zu zeigen. Ist $F \neq E$, so gibt es ein $a \in E \backslash F$ und nach Voraussetzung eine Nullstelle $b \in C$ von $\tau(m_{a,F})$. Nach Satz 5.34 gibt es ein Element in $\mathrm{Hom}_\tau(F(a), \tau(F)(b))$ bzw. $\mathrm{Hom}_\tau(F(a), C)$. Wegen $F(a) \neq F$ steht dies im Widerspruch zur Maximalität von (F, τ) und es folgt $F = E$. □

5.38 Satz. *Seien C_1 und C_2 algebraische Abschlüsse des Körpers K. Dann sind C_1/K und C_2/K isomorph.*

Beweis. Nach Satz 5.37 angewendet mit $\sigma = \mathrm{id}$ gibt es ein $\tau \in \mathrm{Hom}_K(C_1, C_2)$ und $\tau(C_1)$ ist ein algebraischer Abschluß von K in C_2. Da jedes Element von C_2 auch algebraisch über $\tau(C_1)$ ist, folgt $\tau(C_1) = C_2$. □

5.39 Satz. *Seien $M \subseteq K[t]$ eine Menge nicht konstanter Polynome und E_1, E_2 Zerfällungskörper von M über K. Dann sind E_1/K und E_2/K isomorph.*

Beweis. Sei C ein algebraischer Abschluß von E_2. Dann ist C wegen Satz 5.16 auch ein algebraischer Abschluß von K. Ist E_3 neben E_2 ein weiterer Zerfällungskörper von M über K in C, so gilt $E_3 = E_2$, weil E_2 und E_3 durch Adjunktion derselben Nullstellen an K in C entstehen. Nach Satz 5.37 gibt es ein $\sigma \in \mathrm{Hom}_K(E_1, C)$, und $\sigma(E_1)$ ist ein Zerfällungskörper von M über K in C. Es folgt $\sigma(E_1) = E_2$. □

5.40 Satz. *Sei E/K algebraisch. Dann ist $\mathrm{End}_K(E) = \mathrm{Aut}_K(E)$.*

Beweis. Zu zeigen ist, daß jedes $\sigma \in \mathrm{End}_K(E)$ surjektiv ist. Sei $b \in E$ und N die Menge der Nullstellen von $m_{b,K}$ in E. Dann bewirkt σ eine Permutation von N, da Nullstellen nach Lemma 5.34 durch σ wieder in Nullstellen überführt werden und N endlich und σ injektiv ist. Also gibt es $a \in N$ mit $\sigma(a) = b$. □

5.4 Normale Erweiterungen

Zerfällungskörper sind bezüglich Nullstellen von nicht notwendigerweise in M gelegenen Polynomen und bezüglich von Homomorphismen im folgenden Sinn abgeschlossen.

5.41 Definition. Eine algebraische Erweiterung E/K heißt normal und E normal über K, wenn jedes irreduzible $f \in K[t]$, welches eine Nullstelle in E hat, über E bereits vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

Als Beispiel bemerken wir, daß K/K und C/K normal sind, wo C einen algebraischen Abschluß von K bezeichnet. Auch sind quadratische Erweiterungen immer normal. Auf der anderen Seite ist $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ zum Beispiel nicht normal.

5.42 Satz. *Sei E/K eine algebraische Körpererweiterung. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

(*i*) *E/K ist normal.*

(*ii*) *E ist ein Zerfällungskörper über K.*

(*iii*) *Für jede Körpererweiterung L/K und für jedes $\sigma, \tau \in \mathrm{Hom}_K(E, L)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $\rho \in \mathrm{Aut}_K(E)$ mit $\tau = \sigma \circ \rho$.*

Beweis. Der Homomorphismus ρ in (*iii*) ist zunächst immer eindeutig bestimmt, da σ injektiv ist.

(*i*) $\Rightarrow$ (*ii*): E ist offenbar der Zerfällungskörper der Menge $M = \{m_{a,K} \in K[t] \mid a \in E\}$ über K.

(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*): Seien E Zerfällungskörper der Menge $M \subseteq K[t]$ über K, und L, σ, τ wie in (*iii*). Die Körper $\sigma(E)$ und $\tau(E)$ sind dann ebenfalls Zerfällungskörper von M über K und entstehen durch Adjunktion der gleichen Nullstellen aus L an K, woraus $\sigma(E) = \tau(E)$ folgt. Also ist $\rho = \sigma^{-1} \circ \tau \in \mathrm{End}_K(E) = \mathrm{Aut}_K(E)$ nach Satz 5.40 der gesuchte Homomorphismus.

(*iii*) $\Rightarrow$ (*i*): Es existiert ein algebraischer Abschluß L von K und ein $\sigma \in \mathrm{Hom}_K(E, L)$. Sei $f \in K[t]$ irreduzibel und $a \in E$ mit $f(a) = 0$. In L gilt $f = c\prod_i(t - b_i)$ mit $c \in K$ und $b_i \in L$. Nach Lemma 5.34 und Satz 5.37 gibt es $\tau_i \in \mathrm{Hom}_K(E, L)$ mit $\tau_i(a) = b_i$ für alle i. Nach (*iii*) gibt es dazu $\rho_i \in \mathrm{Aut}_K(E)$

mit $\tau_i = \sigma \circ \rho_i$. Dann ist $\sigma(\rho_i(a)) = \tau_i(a) = b_i$, so daß $f = f^{\sigma^{-1}} = c\prod_i(t - \rho_i(a))$ in E durch Anwendung von σ^{-1} auf $f = c\prod_i(t - b_i)$ folgt. □

In Satz 5.42, (iii) ergibt sich ein wichtiger Spezialfall, wenn $\sigma = \mathrm{id}$ und die betrachteten Körper alle in L liegen:

5.43 Korollar. *Sei L/K eine Körpererweiterung und E ein über K normaler Zwischenkörper von L/K. Für $\tau \in \mathrm{Hom}_K(E, L)$ gilt dann bereits $\tau \in \mathrm{Aut}_K(E)$.*

Sei L/K eine Körpererweiterung und seien E_1, E_2 über K normale Zwischenkörper von L/K. Ist $\phi \in \mathrm{Hom}_K(E_1, E_2)$ ein Isomorphismus, so gilt $E_1 = E_2$.

Beweis. Folgt aus Satz 5.42, (iii). □

Sei E/K algebraisch und C ein algebraischer Abschluß von E. Jedes Element von $\mathrm{Hom}_K(E, C)$ läßt sich nach Satz 5.37 und Satz 5.40 zu einem Element von $\mathrm{Aut}_K(C)$ fortsetzen. Eine zu Satz 5.42, (iii) ähnliche und äquivalente Bedingung ist dann, daß jedes Element von $\mathrm{Aut}_K(C)$ durch Einschränkung ein Element von $\mathrm{Aut}_K(E)$ vermittelt.

Wir wenden uns jetzt wieder der Abbildung 5.1 zu und untersuchen, wie sich die Eigenschaft „normal“ vererbt.

5.44 Satz. *Sei E/K eine Körpererweiterung.*

(i) *Für einen Zwischenkörper F von E/K ist E/F normal, wenn E/K normal ist.*

(ii) *Sind F_1, F_2 Zwischenkörper von E/K und ist F_1/K normal, so ist F_1F_2/F_2 normal.*

(iii) *Ist zusätzlich F_2/K normal, so sind auch F_1F_2/K und $F_1 \cap F_2/K$ normal.*

Beweis. (i): Nach Voraussetzung ist E Zerfällungskörper einer Menge $M \subseteq K[t]$ über K. Wegen $M \subseteq F[t]$ ist E auch Zerfällungskörper von M über F.

(ii): Dasselbe Argument gilt für F_1F_2/F_2.

(iii): Ist F_1 Zerfällungskörper von M_1 über K und F_2 Zerfällungskörper von M_2 über K, so ist F_1F_2 Zerfällungskörper von $M_1 \cup M_2$ über K. Dies gilt, da jedes Polynom in $M_1 \cup M_2$ über F_1F_2 zerfällt und ein Zerfällungskörper von $M_1 \cup M_2$ somit in F_1F_2 enthalten ist. Auf der anderen Seite muß dieser Zerfällungskörper nach Voraussetzung auch F_1 und F_2 enthalten, woraus die Gleichheit folgt. Die Normalität von $F_1 \cap F_2/K$ ergibt sich aus der Definition. □

Wir bemerken, daß Komposita und Schnitte über beliebige Mengen von über K normalen Zwischenkörpern von E/K wieder normal über K sind.

5.45 Definition. Sei E/K normal und F ein Zwischenkörper von E/K. Dann heißt E normale Hülle von F/K, wenn es keinen Zwischenkörper von E/F außer E gibt, der über K normal ist.

In anderen Worten ist E also ein bezüglich Inklusion minimaler Erweiterungskörper von F, der über K normal ist. Bis auf F-Isomorphie ist er aber auch der kleinste, wie der folgende Satz zeigt.

5.46 Satz. *Sei F/K eine algebraische Körpererweiterung, E eine normale Hülle von F/K und L ein über K normaler Erweiterungskörper von F. Dann existiert ein $\sigma \in \mathrm{Hom}_F(E, L)$. Insbesondere ist E/K bis auf F-Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei C ein algebraischer Abschluß von L. Nach Satz 5.37 gibt es dann ein $\sigma \in \mathrm{Hom}_F(E, C)$ und $\sigma(E)$ ist ebenfalls eine normale Hülle von F/K. Weiter ist $\sigma(E) \cap L$ ein Zwischenkörper von $\sigma(E)/F$, der nach Satz 5.44 normal über K ist. Es folgt $\sigma(E) \cap L = \sigma(E)$ und damit $\sigma(E) \subseteq L$.

Sei L eine weitere normale Hülle von F/K. Dann gibt es auch ein $\tau \in \mathrm{Hom}_F(L, E)$ und es gilt $\tau \circ \sigma \in \mathrm{End}_F(E) = \mathrm{Aut}_F(E)$, $\sigma \circ \tau \in \mathrm{End}_F(L) = \mathrm{Aut}_F(L)$ nach Satz 5.40. Folglich sind E und L isomorph über K. $\square$

5.47 Satz. *Sei F/K eine algebraische Körpererweiterung, L ein über K normaler Erweiterungskörper von F und $A \subseteq F$ mit $F = K(A)$. Dann enthält L genau eine normale Hülle E von F/K, und es gilt*

(*i*) $E = \cap\{\, T \mid T$ *Zwischenkörper von* L/F *und* T/K *normal*$\}$.

(*ii*) E *ist der Zerfällungskörper von* $M = \{m_{a,K} \mid a \in A\}$ *über* F.

(*iii*) $E = K(\cup\{\tau(F) \mid \tau \in \mathrm{Hom}_K(F, L)\})$.

Ist F/K endlich, so ist auch E/K endlich.

Beweis. Ist E eine normale Hülle von F/K in L, so ist E nach Korollar 5.43 und Satz 5.46 eindeutig bestimmt.

Der Schnitt in (i) ist nicht leer, da mindestens $T = L$ darin vorkommt. Daher wird durch den Schnitt ein Zwischenkörper E von L/F definiert. Es ist klar, daß E dann eine normale Hülle von F/K ist.

Jeder über K normale Erweiterungskörper T von F enthält einen Zerfällungskörper Z von M über K, da jedes $f \in M$ eine Nullstelle in F und damit alle Nullstellen in T hat. Außerdem gilt $Z \supseteq F$ wegen $F = K(A)$ und Z ist nach Satz 5.42 normal über K. Mit (i) folgt $E = Z$ und damit (ii).

Sei $a \in F$. Dann ist a eine Nullstelle von $m_{a,K}$ in L und $m_{a,K}$ zerfällt über L in Linearfaktoren. Sei $b \in L$ eine beliebige Nullstelle von $m_{a,K}$. Es gibt dann ein $\tau \in \mathrm{Hom}_K(F, L)$ mit $\tau(a) = b$. Die Menge $B = \cup\{\tau(F) \mid \tau \in \mathrm{Hom}_K(F, L)\}$ enthält also alle Nullstellen von $m_{a,K}$. Da a beliebig war und B nicht von a abhängt, ist $K(B)$ der Zerfällungskörper von M über K in L und es gilt $E = K(B)$ nach (ii). Damit ist (iii) bewiesen.

Ist F/K endlich, so kann auch A endlich gewählt werden. Nach (ii) entsteht E dann durch Adjunktion endlich vieler Nullstellen an K und ist daher endlich über K. $\square$

5.48 Definition. Seien F/K und L/K algebraisch. Die Elemente $\tau(a)$ mit $\tau \in \mathrm{Hom}_K(F, L)$ und $a \in F$ heißen die Konjugierten von a über K in L. Die Körper $\tau(F)$ mit $\tau \in \mathrm{Hom}_K(F, L)$ heißen die zu F über K konjugierten Körper in L.

Die Konjugierten von a über K in L sind also genau die Nullstellen von $m_{a,K}$ in L.

5.5 Separable Erweiterungen

5.49 Definition. Ein Polynom $f \in K[t]$ heißt separabel, wenn es nur einfache, also $\deg(f)$ verschiedene Nullstellen in einem algebraischen Abschluß C von K besitzt.

Die Definition hängt nicht vom gewählten algebraischen Abschluß C ab, da C bis auf K-Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Nach Satz 3.14 sind die mehrfachen Nullstellen von f in C gleich den Nullstellen von $\gcd\{f, f'\}$ in C und f ist genau dann separabel, wenn $\gcd\{f, f'\} = 1$ gilt. Insofern sieht man auch, daß die Separabilitätseigenschaft eines Polynoms nicht vom betrachteten Grundkörper abhängt.

Nach Korollar 3.15 sind irreduzible Polynome in Charakteristik Null immer separabel, wohingegen dies in positiver Charakteristik p nicht unbedingt der Fall sein muß. Zum Beispiel ist das Polynom $t^p - x$ über $\mathbb{F}_p(x)$ irreduzibel aber nicht separabel.

5.50 Definition. Sei E/K eine algebraische Körpererweiterung. Das Element $a \in E$ heißt separabel über K, wenn $m_{a,K}$ separabel ist. Die Erweiterung E/K heißt separabel und E separabel über K, wenn jedes Element aus E separabel über K ist. Sei C ein algebraischer Abschluß von K. Der Separabilitätsgrad von E/K wird definiert als $[E : K]_s = \#\mathrm{Hom}_K(E, C)$.

Anstelle von „nicht separabel“ benutzen wir „inseparabel“. In Charakteristik Null treten nur separable irreduzible Polynome, Elemente und Körpererweiterungen auf. Ist C algebraisch abgeschlossen und $\sigma \in \operatorname{Hom}(K, C)$, so gilt $\#\operatorname{Hom}_\sigma(E, C) = [E : K]_s$, indem wir K mit $\sigma(K)$ identifizieren. Ein Homomorphismus $\sigma \in \operatorname{Hom}(K, C)$ besitzt also genau $[E : K]_s$ Fortsetzungen auf E.

Bei den Überlegungen dieses Abschnitts könnten wir C auch durch einen Körper ersetzen, welcher E enthält und über K normal ist.

5.51 Lemma. *Sei F ein Zwischenkörper der algebraischen Erweiterung E/K und sei C ein algebraischer Abschluß von E. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\operatorname{Hom}_K(F, C) \times \operatorname{Hom}_F(E, C) \to \operatorname{Hom}_K(E, C).$$

Beweis. Durch die Wahl beliebiger, aber fest gewählter Fortsetzungen definieren wir eine injektive Abbildung $\operatorname{Hom}_K(F, C) \to \operatorname{Aut}_K(C)$, $\sigma \mapsto \hat{\sigma}$. Wir erhalten dann die Abbildung $\phi : \operatorname{Hom}_K(F, C) \times \operatorname{Hom}_F(E, C) \to \operatorname{Hom}_K(E, C)$ mit $(\sigma, \tau) \mapsto \hat{\sigma} \circ \tau$.

Zum Beweis der Injektivität von ϕ gelte $\hat{\sigma}_1 \circ \tau_1 = \hat{\sigma}_2 \circ \tau_2$. Durch Einschränkung auf F ergibt sich $\sigma_1 = (\hat{\sigma}_1)_F = (\hat{\sigma}_1 \circ \tau_1)_F = (\hat{\sigma}_2 \circ \tau_2)_F = (\hat{\sigma}_2)_F = \sigma_2$ und somit $\sigma_1 = \sigma_2$. Da $\hat{\sigma}_i$ injektiv ist, folgt schließlich $\tau_1 = \tau_2$.

Zum Beweis der Surjektivität von ϕ sei $\rho \in \operatorname{Hom}_K(E, C)$. Wir definieren $\sigma = (\rho)_F$ und $\tau = \hat{\sigma}^{-1} \circ \rho$. Es gilt $\tau \in \operatorname{Hom}_F(E, C)$, so daß also (σ, τ) das Urbild von ρ unter ϕ ist. □

5.52 Satz. *Sei E/K eine algebraische Körpererweiterung und F ein Zwischenkörper. Dann gilt*

$$[E : K]_s = [E : F]_s [F : K]_s.$$

Beweis. Folgt direkt aus Lemma 5.51. □

5.53 Lemma. *Sei E/K eine einfache algebraische Körpererweiterung mit primitivem Element a und C ein algebraischer Abschluß von K. Dann gilt*

$$[E : K]_s = \#\{b \in C \mid m_{a,K}(b) = 0\} \leq [E : K].$$

Insbesondere ist a genau dann separabel über K, wenn $[E : K]_s = [E : K]$ gilt.

Beweis. Folgt direkt aus Lemma 5.34: Für jede Nullstelle b von $m_{a,K}$ in C gibt es genau ein $\tau \in \operatorname{Hom}_K(E, C)$ mit $\tau(a) = b$. □

5.54 Satz. *Sei E/K eine algebraische Körpererweiterung. Dann gilt $[E : K]_s \leq [E : K]$ und es sind äquivalent:*

(*i*) *E/K ist separabel.*

(*ii*) *Es gibt* $A \subseteq E$ *mit* $E = K(A)$ *und jedes* $a \in A$ *ist separabel über* K.

(*iii*) *Für jeden Zwischenkörper* F *von* E/K *gilt* $[F : K]_s = [F : K]$.

Wird E/K *endlich vorausgesetzt, so kann* (*iii*) *durch folgende Bedingung ersetzt werden:*

(*iii*)′ *Es gilt* $[E : K]_s = [E : K]$.

Beweis. Die Aussage $[E : K]_s \leq [E : K]$ ist für $[E : K] = \infty$ richtig. Für $[E : K] < \infty$ entsteht E als die Vereinigung eines Turms von endlich vielen, einfachen und algebraischen Erweiterungen. Mit anderen Worten gibt es Zwischenkörper E_i von E/K mit $E_0 = K$, $E_n = E$ und $E_i \subsetneq E_{i+1}$, so daß E_{i+1}/E_i einfach und algebraisch ist. Nach Lemma 5.53, Satz 5.52 und dem Gradsatz gilt daher $[E : K]_s = \prod_{i=0}^{n-1} [E_{i+1} : E_i]_s \leq \prod_{i=0}^{n-1} [E_{i+1} : E_i] = [E : K]$. Ist jede dieser einfachen Erweiterungen E_{i+1}/E_i separabel, so ergibt sich darüberhinaus die Gleichheit.

Gilt $[E : K]_s = [E : K]$ für eine endliche Erweiterung E/K, so folgt $[F : K]_s = [F : K]$ für alle Zwischenkörper von E/K wegen $[F : K]_s \leq [F : K]$ und der Multiplikativität von $[\,:\,]_s$ und $[\,:\,]$. Dies zeigt (*iii*)′ $\Leftrightarrow$ (*iii*) für endliche Erweiterungen E/K.

(*i*) $\Rightarrow$ (*ii*): Ist klar.

(*iii*) $\Rightarrow$ (*i*): Für $a \in E$ gilt $[K(a) : K]_s = [K(a) : K]$, also ist a nach Lemma 5.53 separabel über K.

(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*): Wir stellen die Bemerkung voran, daß ein über K separables $a \in E$ auch separabel über Zwischenkörpern F von E/K ist, da $m_{a,F}$ ein Teiler von $m_{a,K}$ ist. Wir nehmen nun zuerst an, daß E/K endlich ist. Durch die sukzessive Adjunktion endlich vieler, geeigneter Elemente aus A erhalten wir damit einen Turm endlich vieler, einfacher und separabler Erweiterungen, deren Vereinigung gleich E ist, und nach der Schlußweise zum Anfang des Beweises gilt $[E : K]_s = [E : K]$. Ist F ein Zwischenkörper, so folgt damit $[F : K]_s = [F : K]$. Dies beweist Satz 5.54 für endliche Erweiterungen.

Sei nun E/K beliebig. Ist F/K endlich, so gibt es $a_1, \ldots, a_n \in A$ mit $F \subseteq K(a_1, \ldots, a_n)$ und es folgt $[F : K]_s = [F : K]$ nach dem bereits Bewiesenen. Ist F/K unendlich, so gilt $[F : K]_s \geq [F_1 : K]_s = [F_1 : K]$ nach Satz 5.52 für alle endlichen Zwischenkörper F_1 von F/K. Da $[F_1 : K]$ beliebig groß wird, folgt $[F : K]_s = \infty = [F : K]$. □

Eine endliche, separable Erweiterung E/K gestattet also nach Satz 5.54 die maximal mögliche Anzahl von $[E : K]$ Fortsetzungen $\tau \in \mathrm{Hom}_\sigma(E, C)$ für $\sigma \in \mathrm{Hom}(K, C)$ und C algebraisch abgeschlossen.

Wir wenden uns wieder der Abbildung 5.1 zu und untersuchen, wie sich die Eigenschaft „separabel“ vererbt.

5.55 Satz. *Sei E/K eine algebraische Körpererweiterung.*

(*i*) *Für einen Zwischenkörper F von E/K ist E/K genau dann separabel, wenn E/F und F/K separabel sind.*

(*ii*) *Sind F_1, F_2 Zwischenkörper von E/K und ist F_1/K separabel, so ist auch F_1F_2/F_2 separabel.*

(*iii*) *Ist zusätzlich F_2/K separabel, so sind F_1F_2/K und $F_1 \cap F_2/K$ separabel.*

Beweis. (*i*): Ist E/K separabel, so folgt unmittelbar, daß F/K separabel ist. Außerdem gilt für $a \in E$, daß $m_{a,K} \in F[t]$ ist und somit von $m_{a,F}$ geteilt wird. Daher ist $m_{a,F}$ ebenfalls separabel und a separabel über F (dies wurde bereits im Beweis von Satz 5.54 gesehen). Umgekehrt sei $a \in E$ separabel über F und bezeichne L den Zwischenkörper von E/K, der durch Adjunktion der Koeffizienten von $m_{a,F}$ an K entsteht. Dann ist a wegen $m_{a,L} = m_{a,F}$ separabel über L und $L(a)/L$ und L/K sind endlich und separabel. Es folgt $[L(a) : K]_s = [L(a) : L]_s[L : K]_s = [L(a) : L][L : K] = [L(a) : K]$. Daher ist a ist separabel über K und folglich E/K separabel.

(*ii*): Die Separabilität von F_1F_2/F_2 folgt aus Satz 5.54, (*ii*) angewendet auf die Körpererweiterung $F_2(F_1)/F_2$, da die Elemente von F_1 auch separabel über F_2 sind.

(*iii*): Die Separabilität von F_1F_2/K folgt aus der Separabilität von F_1F_2/F_2 und F_2/K und der Transitivität von „separabel". Die Separabilität von $F_1 \cap F_2/K$ ist klar. □

Wir bemerken, daß Komposita und Schnitte über beliebige Mengen von über K separablen Zwischenkörpern von E/K wieder separabel über K sind.

5.56 Definition. Sei E/K eine algebraische Körpererweiterung und $A = \{a \in E \mid a \text{ ist separabel über } K\}$. Dann heißt $K(A)$ der separable Abschluß von K in E. Gilt $K(A) = K$, so nennt man K separabel abgeschlossen in E.

Ist E ein algebraischer Abschluß von K, so heißt $K(A)$ ein separabler Abschluß von K und wird mit K^s bezeichnet. Gilt $K^s = K$, so nennt man K separabel abgeschlossen.

Separable Abschlüsse K^s sind bis auf K-Isomorphie eindeutig bestimmt. Wegen der Transitivität von „separabel" sind separable Abschlüsse separabel abgeschlossen.

5.57 Satz. *Sei E/K eine algebraische Körpererweiterung und F der separable Abschluß von K in E. Dann gilt*

$$[F : K] = [E : K]_s.$$

Beweis. Siehe Satz 5.66. □

5.58 Satz (Primitives Element)**.** *Sei E/K eine algebraische Erweiterung und $a, b \in E$. Ist a separabel über K, so besitzt $K(a, b)$ ein primitives Element.*

Beweis. Da a, b algebraisch über K sind, ist $K(a, b)/K$ endlich. Für einen endlichen Körper K ist dann auch $K(a, b)$ ein endlicher Körper. Nach Satz 3.11 ist $K(a, b)^\times$ zyklisch und wird von einem Element $c \in K(a, b)$ erzeugt. Dann gilt offenbar $K(a, b) = K(c)$. Für beliebiges K und $a \in K$ gilt außerdem $K(a, b) = K(b)$.

Wir nehmen nun an, daß $\#K$ unendlich ist und a nicht in K liegt. Seien C ein Zerfällungskörper von $m_{a,K}m_{b,K}$ und $a_1, a_2, \dots, a_r \in C$ die Nullstellen von $m_{a,K}$ und $b_1, b_2, \dots, b_s$ die Nullstellen von $m_{b,K}$ in C. Wir nehmen ohne Einschränkung $a = a_1$ und $b = b_1$ an. Für $x \in K$ setzen wir $W(x) = \{a_i x + b_j \,|\, 2 \le i \le r, 1 \le j \le s\}$. Durch Auflösen nach x und unter Verwendung der Separabilität von a sehen wir, daß es nur endlich viele $x \in K$ gibt, für die $ax + b \in W(x)$ gilt. Da $\#K = \infty$ ist, gibt es ein $y \in K$ mit $ay + b \notin W(y)$. Wir zeigen, daß $c = ay + b$ ein primitives Element von $K(a, b)/K$ ist.

Wir setzen $h = \gcd\{m_{a,K}, m_{b,K}(c-yt)\}$ in $K(c)[t]$. Wegen $m_{a,K}(a) = m_{b,K}(c-ya) = 0$ ist $t - a$ ein Teiler von h in $C[t]$. Über C zerfällt $m_{a,K}$ in die paarweise verschiedenen Linearfaktoren $t - a_i$ und $m_{b,K}$ in die Linearfaktoren $t - b_j$. Für $i \ge 2$ gilt $c - ya_i \ne b_j$ für alle j nach Wahl von y. Daher ist $m_{b,K}(c - ya_i) \ne 0$ und $h = t - a$. Wegen $h \in K(c)[t]$ nach Definition von h ergibt sich $a \in K(c)$, dann $b = c - ya \in K(c)$ und schließlich $K(a, b) = K(c)$. □

Induktiv erhalten wir

5.59 Korollar. *Jede endliche, separable Körpererweiterung ist einfach.*

5.6 Rein inseparable Erweiterungen

Wir setzen in diesem Abschnitt voraus, daß K ein Körper positiver Charakteristik $p = \operatorname{char}(K) > 0$ ist.

Sei $f \in K[t]$ ein irreduzibles Polynom. Durch wiederholte Anwendung von Korollar 3.15 kann f in der Form $f = g(t^{p^r})$ geschrieben werden, wobei $g \in K[t]$ irreduzibel und separabel ist, wenn r maximal gewählt wird. Über einem algebraischen Abschluß C von K gibt es dann ein separables $h \in C[t]$ mit $f = g(t^{p^r}) = h^{p^r}$, indem man p^r-te Wurzeln aus den Koeffizienten von g zieht. Die Nullstellen von f treten daher mit der genauen Vielfachheit p^r auf.

Im vorigen Abschnitt haben wir irreduzible Polynome f betrachtet, für die $g = f$ gilt, die also nur einfache Nullstellen besitzen. Wir betrachten jetzt den Fall, daß g ein Linearfaktor ist, so daß f nur eine einzige Nullstelle besitzt.

5.60 Definition. Ein Polynom $f \in K[t]$ heißt rein inseparabel, wenn es nur eine einzige Nullstelle in einem algebraischen Abschluß C von K besitzt.

Mit der obigen Zerlegung ist es klar, daß ein rein inseparables Polynom eine Potenz eines Polynoms der Form $t^{p^r} - c \in K[t]$ ist.

5.61 Definition. Sei E/K eine algebraische Erweiterung. Ein Element $a \in E$ heißt rein inseparabel, wenn $m_{a,K}$ rein inseparabel ist. Die Erweiterung E/K heißt rein inseparabel und E rein inseparabel über K, wenn jedes $a \in E \backslash K$ inseparabel über K ist.

Die Erweiterung K/K ist die einzige Erweiterung, die separabel und rein inseparabel ist. Eine Erweiterung E/K, in der jedes $a \in E$ rein inseparabel über K ist, ist selbst rein inseparabel. Die Umkehrung dieser Aussage wird im folgenden Lemma bewiesen, wodurch auch die Abweichung der Definition 5.61 im Analogievergleich zu Definition 5.50 und zu den Definitionen für „algebraisch" behoben wird. Wir fassen ∞ auch als Potenz von $p = \mathrm{char}(K)$ auf.

5.62 Lemma. *Sei E/K eine rein inseparable Körpererweiterung.*

(i) *Jedes $a \in E$ ist rein inseparabel über K. Genauer gibt es ein $r \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ mit $a^{p^r} \in K$. Für das kleinste solche r ist $m_{a,K} = t^{p^r} - a^{p^r}$.*

(ii) *Der Grad $[E : K]$ ist eine Potenz von p.*

Beweis. (i): Ist $f = m_{a,K}$ das Minimalpolynom eines Elements $a \in E$, so ist g mit r wie aus der obigen Zerlegung das Minimalpolynom von a^{p^r} über K und separabel, folglich ist a^{p^r} separabel über K und nach Voraussetzung folgt $a^{p^r} \in K$. Also gilt $g = t - a^{p^r}$ und $f = t^{p^r} - a^{p^r}$. Da f irreduzibel über K ist, muß r bereits minimal mit $a^{p^r} \in K$ sein.

(ii): Für $[E : K] = \infty$ ist die Aussage richtig. Gelte nun also $[E : K] < \infty$. Für einfache rein inseparable Erweiterungen ist die Aussage wegen Lemma 5.62 ebenfalls richtig.

Ist F ein Zwischenkörper von E/K und $a \in E$, so ist a auch rein inseparabel über F, denn es gilt $m_{a,F} \,|\, m_{a,K}$ und $m_{a,F}$ ist mit $m_{a,K}$ rein inseparabel. Die Erweiterung E/K entsteht durch einen endlichen Turm von einfachen Erweiterungen, die wegen der vorstehenden Bemerkung alle rein inseparabel sind. Daher folgt die Aussage über $[E : K]$ unter Verwendung des Gradsatz. □

5.63 Satz. *Sei E/K eine algebraische Körpererweiterung. Dann sind äquivalent.*

(i) *E/K ist rein inseparabel.*

(ii) *Es gibt $A \subseteq E$ mit $E = K(A)$ und jedes $a \in A$ ist rein inseparabel über K.*

(*iii*) *Für jeden Zwischenkörper F von E/K gilt $[F : K]_s = 1$.*

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Ist klar.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Wenn es ein über K separables Element $b \in E \backslash K$ gibt, so ist $[K(b) : K]_s \neq 1$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Seien $\sigma, \tau \in \mathrm{Hom}_K(F, C)$, wo C einen algebraischen Abschluß von K bezeichnet, und $b \in F$ beliebig. Wir wollen $\sigma(b) = \tau(b)$ und somit $\sigma = \tau$ zeigen. Es gibt zunächst $a_1, \ldots, a_n \in A$, so daß $b \in L_n$ mit $L_i = K(a_1, \ldots, a_i)$ ist. Die Elemente $a \in A$ sind rein inseparabel über jedem echten Zwischenkörper von E/K. Daher sind die L_{i+1}/L_i einfach und rein inseparabel, und nach Satz 5.52 und Lemma 5.53 gilt folglich $[L : K]_s = \prod_i [L_{i+1} : L_i]_s = 1$ und somit $[K(b) : K]_s = 1$. Dies ergibt $\sigma(b) = \tau(b)$ und $\sigma = \tau$, da b beliebig war. □

Der Beweis verdeutlicht wieder die allgemeine Strategie, Aussagen zuerst für einfache Körpererweiterungen zu untersuchen und zu beweisen, und dann auf endliche und schließlich auf algebraische Erweiterungen zu verallgemeinern.

In Satz 5.63, (*iii*) genügt es, wegen Satz 5.52 im Grunde nur die Gleichheit $[E : K]_s = 1$ zu fordern. Eine rein inseparable Erweiterung E/K gestattet also nur die minimale Anzahl von genau einer Fortsetzung $\tau \in \mathrm{Hom}_\sigma(E, C)$ für $\sigma \in \mathrm{Hom}(K, C)$ und C algebraisch abgeschlossen.

Wir wenden uns wieder der Abbildung 5.1 zu und untersuchen, wie sich die Eigenschaft „rein inseparabel“ vererbt.

5.64 Satz. *Sei E/K eine algebraische Körpererweiterung.*

(*i*) *Für einen Zwischenkörper F von E/K ist E/K genau dann rein inseparabel, wenn E/F und F/K rein inseparabel sind.*

(*ii*) *Sind F_1, F_2 Zwischenkörper von E/K und ist F_1/K rein inseparabel, so ist auch F_1F_2/F_2 rein inseparabel.*

(*iii*) *Ist zusätzlich F_2/K rein inseparabel, so sind auch F_1F_2/K und $F_1 \cap F_2/K$ rein inseparabel.*

Beweis. Der Beweis erfolgt wegen Satz 5.63 und Satz 5.66 für „rein inseparabel“ analog wie für „separabel“. □

Wir bemerken, daß Komposita und Schnitte über beliebige Mengen von über K rein inseparablen Zwischenkörpern von E/K wieder rein inseparabel über K sind.

5.65 Definition. Sei E/K eine algebraische Körpererweiterung und $A = \{a \in E \mid a \text{ ist rein inseparabel über } K\}$. Dann heißt $K(A)$ der rein inseparable Abschluß von K in E. Gilt $K(A) = K$, so nennt man K rein inseparabel abgeschlossen in E.

Ist E ein algebraischer Abschluß von K, so heißt $K(A)$ ein rein inseparabler Abschluß von K und wird mit $K^{p^{-\infty}}$ bezeichnet. Gilt $K^{p^{-\infty}} = K$, so nennt man K rein inseparabel abgeschlossen.

Die Bezeichnung $K^{p^{-\infty}}$ rührt daher, daß wir sukzessive p-te Wurzeln an K adjungieren, um $K^{p^{-\infty}}$ zu erhalten. Rein inseparable Abschlüsse $K^{p^{-\infty}}$ sind sind bis auf K-Isomorphie eindeutig bestimmt. Wegen der Transitivität von „rein inseparabel“ sind rein inseparable Abschlüsse rein inseparabel abgeschlossen.

5.66 Satz. *Sei E/K algebraisch und F der separable Abschluß von K in E. Dann ist E/F rein inseparabel, $[F : K] = [E : K]_s$ und $[E : F]$ eine Potenz von $p = \mathrm{char}(K)$.*

Beweis. Für jedes $a \in E$ gibt es ein $r \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, so daß a^{p^r} separabel über F ist. Wegen der Transitivität von „separabel“ folgt $a^{p^r} \in F$, also ist a rein inseparabel über F. Daher ist E/K rein inseparabel.

Nach Satz 5.54, Satz 5.63 und Satz 5.52 gilt $[F : K] = [F : K]_s = [E : F]_s[F : K]_s = [E : K]_s$. Die Aussage über $[E : F]$ folgt aus Lemma 5.62. □

5.67 Definition. Sei E/K eine algebraische Körpererweiterung und F der separable Abschluß von K in E. Der Inseparabilitätsgrad von E/K wird als $[E : K]_i = [E : F]$ definiert.

Der Inseparabilitätsgrad ist also nach Satz 5.66 stets eine nicht negative Potenz der Charakteristik p und es gilt $[E : K] = [E : K]_i[E : K]_s$. Zur Vereinheitlichung definieren wir $[E : K]_i = 1$ für Körper in Charakteristik Null.

Der Inseparabilitätsgrad besitzt die gleichen Eigenschaften wie der Separabilitätsgrad:

5.68 Satz. *Sei E/K eine algebraische Körpererweiterung.*

(*i*) *Für jeden Zwischenkörper F von E/K gilt $[E : K]_i = [E : F]_i[F : K]_i$.*

(*ii*) *Ist F der rein inseparable Abschluß von K in E, so gilt $[F : K] = [E : K]_i$.*

Beweis. (*i*): Wir wenden Satz 5.72 mehrfach an. Sei F_1 der separable Abschluß von K in F, F_2 der rein inseparable Abschluß von K in F, E_1 der separable Abschluß von F in E und E_2 der rein inseparable Abschluß von F in E. Sei T der separable Abschluß von F_1 in E_1.

Dann ist F/F_1 rein inseparabel. Da E_1/F separabel ist, muß F/F_1 der rein inseparable Abschluß von F_1 in E_1 sein und es gilt $E_1 = TF$. Folglich ist auch

E_1/T rein inseparabel. Nun gilt $[E_1 : T] = [F : F_1] = [F_2 : K] = [F : K]_i$, $[E : E_1] = [E_2 : F] = [E : F]_i$, T/K ist separabel und E/T ist rein inseparabel. Also ist T/K der separable Abschluß von K in E und es gilt $[E : K]_i = [E : T]$.

Zusammen folgt $[E : K]_i = [E : T] = [E : E_1][E_1 : T] = [E : F]_i[F : K]_i$, was zu zeigen war.

(ii): Folgt aus Satz 5.72. □

Für endliche Erweiterungen E/K kann man den Satz auch mit Hilfe der Multiplikativität von $[:]$, $[:]_s$ und mit $[E : K] = [E : K]_i[E : K]_s$ leicht beweisen.

Der Satz vom primitiven Element gilt für (rein) inseparable Erweiterungen im allgemeinen nicht. Sei zum Beispiel $K = \mathbb{F}_p(x, y)$ und $E = K(x^{1/p}, y^{1/p})$. Dann gilt $[E : K] = p^2$, aber für jedes $a \in E$ ist $m_{a,K} = t^p - a^p$. Also kann E/K nicht einfach sein.

5.7 Weitere Eigenschaften von normalen, separablen und rein inseparablen Erweiterungen

Wir bezeichnen mit K jetzt wieder einen beliebigen Körper. Wird das Symbol p verwendet, so nehmen wir $p = \mathrm{char}(K) > 0$ an.

5.69 Definition. Ein Körper K heißt vollkommen, wenn jede algebraische Körpererweiterung E/K separabel ist.

Für einen Körper K schreiben wir $K^p = \{a^p \mid a \in K\}$. Man kann die Definition offensichtlich auf höhere p-Potenzen und unter Verwendung eines algebraischen Abschluß von K auch auf negative Potenzen erweitern.

5.70 Satz. (i) *Jeder Körper der Charakteristik Null ist vollkommen.*

(ii) *Ein Körper der Charakteristik $p > 0$ ist genau dann vollkommen, wenn $K^p = K$ gilt.*

(iii) *Jeder algebraische Erweiterungskörper eines vollkommenen Körpers ist vollkommen.*

Beweis. (i): Die über K irreduziblen Polynome sind separabel.

(ii): Ist $K^p \neq K$, so gibt es ein $a \in K \backslash K^p$ und $f = t^p - a$ hat keine Nullstelle in K, aber nur eine Nullstelle in einem algebraischen Abschluß von K. Damit besitzt f einen irreduziblen, nicht separablen Faktor vom Grad ≥ 2. Sei nun $K^p = K$ und $f \in K[t]$ irreduzibel. Ist f nicht separabel, so gibt es wegen $K^p = K$ Polynome $g, h \in K[t]$ mit $f = g(t^p) = h^p$, im Widerspruch zur Irreduzibilität von f.

(iii): Sei K vollkommen und L/K algebraisch. Ist dann E/L algebraisch, so ist auch E/K algebraisch und daher nach Voraussetzung separabel. Dann ist auch E/L separabel. □

Sei K ein Körper mit endlichen vielen Elementen, und sei $p = \mathrm{char}(K) > 0$. Da der Frobeniusendomorphismus $x \mapsto x^p$ von K injektiv ist, ist er wegen der Endlichkeit von K auch surjektiv und es gilt $K^p = K$. Körper mit endlich vielen Elementen sind somit vollkommen. Algebraische Abschlüsse und rein inseparable Abschlüsse sind ebenfalls vollkommen. Auf der anderen Seite ist zum Beispiel $\mathbb{F}_p(t)$ nicht vollkommen.

5.71 Lemma. *Die normale Hülle einer separablen Körpererweiterung E/K ist separabel. Der separable Abschluß von K in einer normalen Körpererweiterung E/K ist normal. Eine rein inseparable Körpererweiterung E/K ist normal.*

Beweis. Die ersten zwei Aussagen ergeben sich aus der Tatsache, daß die zu einem über K separablen Element konjugierten Elemente ebenfalls separabel sind, da sie das gleiche Minimalpolynom haben. Die dritte Aussage folgt direkt aus der Definition von „normal“ und Lemma 5.62. □

Im Abschnitt 5.6 haben wir gesehen, daß sich eine algebraische Körpererweiterung E/K in eine separable Erweiterung F/K und eine rein inseparable Erweiterung E/F aufteilen läßt. Hier ist F der separable Abschluß von K in E und es gilt allgemein $[F : K] = [E : K]_s$.

5.72 Satz. *Sei E/K eine algebraische Körpererweiterung. Sei F_1 der separable Abschluß von K in E und F_2 der rein inseparable Abschluß von K in E.*

(i) *Die Erweiterungen F_1/K und E/F_2 sind separabel und die Erweiterungen F_2/K und E/F_1 sind rein inseparabel.*

(ii) *F_1 und F_2 sind linear disjunkt über K und es gilt $E = F_1F_2$.*

(iii) $[F_1 : K] = [E : F_2] = [E : K]_s$ *und* $[F_2 : K] = [E : F_1] = [E : K]_i$.

Beweis. *(i)*: Die Erweiterungen F_1/K und F_2/K sind nach Definition separabel bzw. rein inseparabel. Sei $a \in E$. Dann sind $F_1' = F_1 \cap K(a)$ und $F_2' = F_2 \cap K(a)$ der separable bzw. rein inseparable Abschluß von K in $K(a)$. Nach Satz 5.66 ist die Erweiterung $K(a)/F_1'$ rein inseparabel. Die Erweiterung $K(a)/F_2'$ ist separabel, allerdings benötigt der Beweis dieser Tatsache etwas Galoistheorie und wird verschoben. Nach Satz 5.64, *(ii)* und Satz 5.55, *(ii)* sind dann auch die Erweiterungen $F_1(a)/F_1$ und $F_2(a)/F_2$ rein inseparabel bzw. separabel. Da a beliebig war, sind E/F_1 und E/F_2 insgesamt rein inseparabel bzw. separabel.

(ii): Die Erweiterung E/F_1F_2 ist wegen (i) nach Satz 5.64, (i) rein inseparabel und nach Satz 5.55, (i) und separabel. Daher gilt $E = F_1F_2$.

Für die lineare Disjunktheit genügt es wegen Satz 5.58 zu zeigen, daß für jedes $a \in E$ die Erweiterungen $K(a)/K$ und F_2/K linear disjunkt sind. Nach Lemma 5.62 gibt es $s \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ mit ${m_{a,F_2}}^{p^s} \in K[t]$. Dann gilt $m_{a,K} \mid {m_{a,F_2}}^{p^s}$ in $K[t]$ und folglich auch in $F_2[t]$. Da m_{a,F_2} irreduzibel ist, gibt es also $d \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ mit $m_{a,K} = {m_{a,F_2}}^d$. Weil $m_{a,K}$ aber separabel ist, folgt $d = 1$ und $m_{a,K} = m_{a,F_2}$. Es ergibt sich $[F_2(a) : F_2] = [K(a) : K]$ und nach Satz 5.23, (i) sind $K(a)/K$ und F_2/K linear disjunkt.

(iii): Die Gleichungen folgen unmittelbar aus (ii) und den Definitionen. □

5.73 Korollar. *Sei E/K eine einfache Erweiterung mit primitivem Element a und C ein algebraischer Abschluß von E. Sei $f = m_{a,K}$ und $r \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ maximal, so daß es ein $g \in K[t]$ mit $f = g(t^{p^r})$ gibt. Sei $h \in C[t]$ mit $h^{p^r} = g(t^{p^r}) = f$. Sei F_1 der separable Abschluß von K in E und F_2 der rein inseparable Abschluß von K in E. Dann gilt.*

(i) $m_{a,F_1} = t^{p^r} - a^{p^r}$ und $m_{a,F_2} = h$ (insbesondere ist $h \in F_2[t]$ irreduzibel).

(ii) $F_1 = K(a^{p^r})$ und $m_{a^{p^r},K} = g$. $F_2 = K(c_0^{p^{-r}}, \dots, c_n^{p^{-r}})$ mit $g = \sum_{i=0}^n c_i t^i$.

Beweis. (i): Die Aussage $m_{a,F_1} = t^{p^r} - a^{p^r}$ folgt aus Lemma 5.62. Nach Lemma 5.62 gibt es auch $s \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ mit ${m_{a,F_2}}^{p^s} \in K[t]$. Dann gilt $f \mid {m_{a,F_2}}^{p^s}$. Das Polynom h ist nach Definition separabel. Wegen Satz 5.72, (i) ist aber auch m_{a,F_2} separabel. Daher folgt $r = s$ und $m_{a,F_2} = h$.

(ii): Das Polynom g ist separabel und irreduzibel über K und es gilt $g(a^{p^r}) = 0$. Daher folgt $m_{a^{p^r},K} = g$ und $K(a^{p^r}) \subseteq F_1$. Aus Gradgründen ergibt sich $K(a^{p^r}) = F_1$. Weiter gilt $h = \sum_i c_i^{p^{-r}} t^i$ und aus Aussage (i) und Lemma 5.24 folgt $F_2 = K(c_0^{p^{-r}}, \dots, c_n^{p^{-r}})$. □

5.74 Satz. *Sei E/K eine algebraische Körpererweiterung und F_1, F_2 Zwischenkörper von E/K. Ist F_1/K normal, F_2/K separabel und gilt $F_1 \cap F_2 = K$, so sind F_1 und F_2 linear disjunkt über K.*

Beweis. Sei T der separable Abschluß von K in F_1. Dann sind T/K und F_2/K linear disjunkt wegen Satz 6.13. Da F_1/T rein inseparabel und TF_2/T separabel ist, sind diese Erweiterungen wegen Satz 5.72 linear disjunkt über T. Aus der Übungsaufgabe über die „Transitivität" von „linear disjunkt" in Türmen folgt die Aussage. □

5.75 Satz. *Sei E/K eine endliche Körpererweiterung mit $p = \mathrm{char}(K) > 0$. Dann ist E/K genau dann separabel, wenn $E^pK = E$ gilt. Aus $E^pK = E$ folgt $E^{p^n}K = E$ für alle $n \geq 0$.*

Beweis. Wir beweisen die letzte Aussage zuerst. Es gelte $E^pK = E$. Dann folgt induktiv $E^{p^{n+1}}K = (E^{p^n})^p(K^pK) = (E^{p^n}K)^pK = E^pK = E$.

Sei nun E/K separabel. Dann ist E/E^pK separabel und rein inseparabel, denn für $a \in E$ gilt $a^p \in E^pK$. Es folgt $E = E^pK$. Gelte nun $E^pK = E$ und sei L der separable Abschluß von K in E. Dann ist E/L nach Satz 5.66 rein inseparabel. Es gibt $a_1, \dots a_r \in E$ mit $E = K(a_1, \dots, a_r)$, und für jedes a_i gibt es ein $m_i \geq 0$ mit $a_i^{p^{m_i}} \in L$. Dann folgt mit $m = \max_i m_i$, daß $E^{p^m} \subseteq L$. Wegen $K \subseteq L$ ergibt sich $E = E^{p^m}K \subseteq L$, folglich $E = L$ und E/K ist separabel. □

Satz 5.75 wird falsch, wenn auf die Endlichkeitsvoraussetzung von E/K verzichtet wird. Zum Beispiel gilt $E^p = E$ für einen rein inseparablen Abschluß $E = K^{p^{-\infty}}$ von K, und E/K ist nicht separabel.

5.8 Endliche Körper

Ein endlicher Körper ist ein Körper mit endlich vielen Elementen. Endliche Körper sind in gewisser Weise die „einfachsten“ Körper, die es gibt. Sie spielen eine wichtige Rolle in der Mathematik und in praktischen Anwendungen wie zum Beispiel Kryptographie und Kodierungstheorie.

Ist p eine Primzahl, so ist zum Beispiel der Faktorring $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein endlicher Körper der Charakteristik p. Ist K ein endlicher Körper, so ist sein Primkörper von der Form $\mathbb{F}_p$ für eine geeignete Primzahl p. Da K ein Vektorraum der Dimension $n = [K : \mathbb{F}_p]$ über $\mathbb{F}_p$ ist, folgt $\#K = p^n$.

5.76 Satz. *Sei K ein endlicher Körper mit q Elementen. Dann ist $K^\times$ eine endliche zyklische Gruppe und für $x \in K$ gilt $x^q = x$.*

Beweis. Folgt direkt aus Satz 3.11, da $K^\times$ eine endliche Gruppe ist. Es gilt weiter $\#K^\times = q - 1$, und folglich ist $x^{q-1} = 1$ für $x \in K^\times$. Daraus folgt $x^q = x$ für alle $x \in K$. □

5.77 Satz. *Sei K ein Erweiterungskörper von $\mathbb{F}_p$. Dann sind äquivalent.*

(*i*) *K ist ein endlicher Körper mit $q = p^n$ Elementen.*

(*ii*) *K ist Zerfällungskörper des Polynoms $t^q - t$ über $\mathbb{F}_p$ mit $q = p^n$.*

Insbesondere existiert also für jedes $q = p^n$ ein endlicher Körper K mit q Elementen.

Beweis. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*): Aus Satz 5.76 folgt, daß die Elemente von K genau die Nullstellen von $t^q - t$ sind.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sind $a, b \in K$ und $b \neq 0$ zwei Nullstellen von $t^q - t$, so sind auch $a + b, ab, -a, 1/b$ Nullstellen von $t^q - t$. Aus $a^q = a$ und $b^q = b$ folgt nämlich $a^q + b^q = (a + b)^q = a + b$, $(ab)^q = ab$, $(-a)^q = -a$ und $(1/b)^q = 1/b$ unter Beachtung von Satz 2.22. Damit bilden die Nullstellen von $t^q - t$ bereits einen Körper, und K besteht wegen der Zerfällungskörpereigenschaft aus genau diesen Nullstellen. Wegen $\gcd\{t^q - t, qt^{q-1} - 1\} = 1$ ist $t^q - t$ separabel und daher $\#K = q$.

Die Existenz von K folgt aus der Existenz von Zerfällungskörpern. □

5.78 Satz. *Je zwei endliche Körper mit q Elementen sind isomorph. Jede Erweiterung E/K von endlichen Körpern ist normal, separabel und einfach. Endliche Körper sind vollkommen.*

Beweis. Die Isomorphie folgt, weil Zerfällungskörper isomorph sind. Die Normalität folgt, weil E als Zerfällungskörper über $\mathbb{F}_p$ und über K normal ist. Die Separabilität folgt, weil die Polynome $t^q - t$ separabel sind. Nach dem Satz vom primitiven Element ist E/K dann einfach. Ein primitives Element wird zum Beispiel durch einen Erzeuger von $E^\times$ gegeben. Daß endliche Körper vollkommen sind, wurde bereits gezeigt. Man kann auch so argumentieren: Ist a ein über K separables Element, so ist $K(a)$ ein endlicher Körper und $m_{a,K}$ ein Teiler eines Polynoms der Form $t^q - t$ und somit separabel. □

5.79 Definition. Innerhalb eines fest gewählten, algebraischen Abschlußes $\overline{\mathbb{F}}_p$ von $\mathbb{F}_p$ bezeichnen wir mit $\mathbb{F}_q$ den eindeutig bestimmten endlichen Körper mit q Elementen in $\overline{\mathbb{F}}_p$.

5.80 Satz. *Seien E und K endliche Körper in einem gemeinsamen Erweiterungskörper C. Es gelte $\#E = p^n$ und $\#K = p^m$. Dann gilt $K \subseteq E$ genau dann, wenn $m \mid n$.*

Beweis. Gilt $K \subseteq E$, so folgt $\#E = (\#K)^{[E:K]}$, also $p^n = p^{m[E:K]}$. Gelte umgekehrt $m \mid n$. Für $x \in K$ ergibt sich $x^{p^m} = x$ und somit $x^{p^n} = x$. Dies wiederum bedeutet $x \in E$. □

Die explizite Darstellung von endlichen Körpern kann wieder mit irreduziblen Polynomen erfolgen. Ist K ein endlicher Körper mit q Elementen und $f \in K[t]$ normiert und irreduzibel vom Grad n, so ergibt $K[t]/fK[t]$ eine Erweiterung von K vom Grad n. Wählt man ein anderes irreduzibles Polynom vom Grad n, so erhält man einen K-isomorphen Körper.

5.9 Kreisteilungskörper

5.81 Definition. Sei K ein Körper und $f = t^n - 1$. Die Nullstellen von f in einem algebraischen Abschluß $\bar{K}$ von K heißen n-te Einheitswurzeln und die Menge der

n-ten Einheitswurzeln von f in $\bar{K}$ wird mit μ_n bezeichnet. Der Zerfällungskörper $K(\mu_n)$ von f über K heißt n-ter Kreisteilungskörper.

Offenbar gilt $\#\mu_n \leq n$ und $\mu_m \subseteq \mu_n$ für $m \mid n$. Der Name Kreisteilungskörper ergibt sich daraus, daß die n-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ von der Form $\exp(2\pi i r/n)$ sind, daher auf dem Einheitskreis liegen und ihn in gleiche Teile teilen. Ist E als weiteres Beispiel ein endlicher Körper mit q Elementen, so gilt $E = K(\mu_{q-1})$.

5.82 Satz. *Die Menge μ_n ist eine zyklische Untergruppe von $K(\mu_n)^\times$. Es gilt $\mu_{pn} = \mu_n$ für $p = \operatorname{char}(K) > 0$. Aus $p \nmid n$ oder $\operatorname{char}(K) = 0$ folgt $\#\mu_n = n$.*

Beweis. Die erste Aussage folgt aus Satz 3.11. Die zweite folgt, weil $t^{mp} - 1 = (t^m - 1)^p$ ist. Die dritte folgt, weil $\gcd\{t^n - 1, nt^{n-1}\} = 1$ unter den gemachten Voraussetzungen gilt. □

Wir nehmen für den Rest des Abschnitts an, daß n nicht von der Charakteristik geteilt wird bzw. daß die Charakteristik Null ist.

5.83 Definition. Die Erzeuger von μ_n heißen primitive n-te Einheitswurzeln. Für eine primitive n-te Einheitswurzel heißt das Polynom

$$\Phi_n = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \gcd\{i,n\} = 1}} (t - \zeta^i)$$

das n-te Kreisteilungspolynom.

Eine zyklische Gruppe der Ordnung n hat $\phi(n)$ verschiedene Erzeuger. Daher gibt es also genau $\phi(n)$ primitive n-te Einheitswurzeln. Ferner hat Φ_n genau die primitiven n-ten Einheitswurzeln als Nullstellen und es gilt $\deg(\Phi_n) = \phi(n)$. Ist d die Ordnung einer Einheitswurzel $\zeta \in \mu_n$, so ist ζ eine primitive d-te Einheitswurzel. Sind n and m teilerfremd, so gilt $\mu_n\mu_m = \mu_{nm}$ und $\mu_n \cap \mu_m = \{1\}$.

5.84 Satz. *Für die Kreisteilungspolynome gilt die Beziehung $t^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d$.*

Beweis. Ist klar, weil wir alle primitiven Einheitswurzeln erfassen. □

Der Satz liefert ein Rekursionsverfahren zur Berechnung der Kreisteilungspolynome, mittels $\Phi_n = (t^n - 1)/\prod_{d \mid n, d \neq n} \Phi_d$. Ist n zum Beispiel prim, gilt also $\Phi_n = (t^n - 1)/(t - 1) = \sum_{i=0}^{n-1} t^i$. Für eine Reihe weiterer Rekursionsformeln siehe Lang, Algebra, S. 208.

5.85 Satz. *Die Kreisteilungspolynome sind bereits über $\mathbb{Z}$ bzw. den jeweiligen Primkörpern $\mathbb{F}_p$ definiert.*

Beweis. Folgt induktiv aus der Rekursionsformel $\Phi_n = (t^n - 1)/\prod_{d\,|\,n, d \neq n} \Phi_d$. Da Zähler und Nenner der rechten Seite über $\mathbb{Z}$ bzw. über dem jeweiligen Primkörper definiert und die Nenner normiert sind, ist auch Φ_d über $\mathbb{Z}$ bzw. über dem jeweiligen Primkörper definiert. □

5.86 Satz. *Das n-te Kreisteilungspolynom Φ_n ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$.*

Beweis. Sei f ein normierter irreduzibler Faktor von Φ_n über $\mathbb{Q}$. Dann gilt bereits $f \in \mathbb{Z}[t]$ nach Korollar 3.27. Sei p eine Primzahl mit $p \nmid n$ und ζ eine Nullstelle von f. Dann ist ζ^p ebenfalls eine primitive n-te Einheitswurzel. Wir zeigen gleich, daß ζ^p auch eine Nullstelle von f ist. Durch die Verwendung möglicherweise verschiedener, jedoch zu n teilerfremder Primzahlen p_i können wir dann jede primitive n-te Einheitswurzel ξ in der Form $\xi = \zeta^{\prod_i p_i}$ schreiben. Damit ist jede primitive n-te Einheitswurzel eine Nullstelle von f, es gilt $\Phi_n = f$ und Φ_n ist irreduzibel.

Sei $h \in \mathbb{Z}[t]$ normiert mit $fh = \Phi_n$. Es gilt $f(\zeta^p) = 0$ oder $h(\zeta^p) = 0$. Nehmen wir $f(\zeta^p) \neq 0$ an. Dann ist ζ^p eine Nullstelle von h und ζ eine Nullstelle von $h(t^p)$. Folglich gilt $f \,|\, h(t^p)$ und es gibt $g \in \mathbb{Z}[t]$ normiert mit $fg = h(t^p)$. Sei $\bar{\cdot} : \mathbb{Z}[t] \to \mathbb{F}_p[t]$ der kanonische Epimorphismus bezüglich koeffizientenweiser Reduktion modulo p. Für alle $x \in \mathbb{F}_p$ gilt $x^p = x$. Daher folgt $\overline{h}(t)^p = \overline{h}(t^p) = \overline{f}\overline{g}$. Wegen $\deg(\overline{f}) \geq 1$ haben dann $\overline{h}$ und $\overline{f}$ einen gemeinsamen Faktor vom Grad ≥ 1 und sind nicht teilerfremd. Auf der anderen Seite sind aber die Polynome $t^n - 1 \in \mathbb{F}_p[t]$ und damit $\overline{\phi}_n = \overline{f}\,\overline{h} \in \mathbb{F}_p[t]$ wegen $p \nmid n$ separabel. Daraus ergibt sich ein Widerspruch, und es muß also $f(\zeta^p) = 0$ gelten. □

Der vorhergehende Satz ist über endlichen Körpern im allgemeinen falsch.

5.87 Korollar. *Es gilt $\mathbb{Q}(\mu_n) = \mathbb{Q}(\zeta)$ und $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \phi(n)$ für eine primitive n-te Einheitswurzel $\zeta \in \mu_n$. Sind n und m teilerfremd so gilt $\mathbb{Q}(\mu_n)\mathbb{Q}(\mu_m) = \mathbb{Q}(\mu_{nm})$ und $\mathbb{Q}(\mu_n) \cap \mathbb{Q}(\mu_m) = \mathbb{Q}$.*

Beweis. Der erste Teil ist klar. Für den zweiten folgt aus $\mu_n\mu_m = \mu_{nm}$, daß $\mathbb{Q}(\mu_n)\mathbb{Q}(\mu_m) = \mathbb{Q}(\mu_{nm})$ gilt. Wegen $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$ ergibt sich dann aus Gradgründen $[\mathbb{Q}(\mu_n) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\mu_{nm}) : \mathbb{Q}(\mu_m)]$, so daß $\mathbb{Q}(\mu_n)$ und $\mathbb{Q}(\mu_m)$ über $\mathbb{Q}$ linear disjunkt sind und somit $\mathbb{Q}(\mu_n) \cap \mathbb{Q}(\mu_m) = \mathbb{Q}$ folgt. □

5.88 Satz. *Die Körpererweiterungen $K(\mu_n)/K$ sind normal und separabel.*

Beweis. $K(\mu_n)$ ist Zerfällungskörper des separablen Polynoms $t^n - 1$. □

5.10 Charakteristisches Polynom, Spur und Norm

Wir wenden nun eine allgemeine und häufig auftretende Begriffsbildung aus der linearen Algebra auf endliche Körpererweiterungen an.

Das charakteristische Polynom, die Spur und Norm (Determinante) von Vektorraumendomorphismen sind wie folgt definiert. Sei V ein Vektorraum über dem Körper K der Dimension n und $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$. Für eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V sei $M \in K^{n\times n}$ mit $(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n)) = (v_1, \ldots, v_n)M$ die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich der v_i. Dann ist $\chi_{\phi,V/K} = \det(tI_n - M) \in K[t]$ mit $\deg(\chi_{\phi,V/K}) = n$ das charakteristische Polynom von ϕ, und für $\chi_{\phi,V/K} = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{n-i}$ ist die Spur von ϕ gleich $\mathrm{Tr}_{V/K}(\phi) = \mathrm{Tr}(M) = -a_1$ und die Norm von ϕ gleich $\mathrm{N}_{V/K}(\phi) = \det(M) = (-1)^n a_n$. Das charakteristische Polynom, die Spur und die Norm von ϕ hängen nicht von der gewählten Basis v_i ab.

Die Notation V/K zusammen mit ϕ soll im Zusammenhang mit charakteristischem Polynom, Spur und Norm bedeuten, daß V ein K-Vektorraum ist und daß $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ gilt.

Sei E/K eine endliche Körpererweiterung und $a \in E$. Dann ist E auch ein endlich dimensionaler Vektorraum über K und die Multiplikation $x \mapsto ax$ mit a liefert einen Vektorraumendomorphismus ϕ_a von E (allgemeiner kann man auch eine endlich dimensionale K-Algebra E betrachten).

5.89 Definition. Das charakteristische Polynom $\chi_{a,E/K} \in K[t]$ von a bezüglich der endlichen Körpererweiterung E/K wird als χ_{ϕ_a} definiert. Die Spur $\mathrm{Tr}_{E/K}(a)$ und die Norm $\mathrm{N}_{E/K}(a)$ von a bezüglich E/K werden als $\mathrm{Tr}_{E/K}(\phi_a)$ beziehungsweise $\mathrm{N}_{E/K}(\phi_a)$ definiert.

Wir wiederholen zunächst die für uns interessanten, allgemeinen Eigenschaften charakteristischer Polynome, Spuren und Normen für Vektorraumendomorphismen.

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton ist $\chi_{\phi,V/K}(\phi)$ die Nullabbildung auf V. Sind $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{End}_K(V)$ und $\lambda \in K$, so gilt offenbar $\mathrm{Tr}_{V/K}(\phi_1+\phi_2) = \mathrm{Tr}_{V/K}(\phi_1) + \mathrm{Tr}_{V/K}(\phi_2)$ und $\mathrm{Tr}_{V/K}(\lambda\phi_1) = \lambda\mathrm{Tr}_{V/K}(\phi_1)$. Die Spur ist demnach K-linear. Ferner gilt $\mathrm{N}_{V/K}(\phi_1\phi_2) = \mathrm{N}_{V/K}(\phi_1)\mathrm{N}_{V/K}(\phi_2)$, so daß die Norm multiplikativ ist.

Seien $V_1, V_2 \subseteq V$ Unterräume von V mit $V = V_1 \oplus V_2$ und $\phi(V_i) \subseteq V_i$. Wir setzen $\phi_i = \phi|V_i$. Dann gilt $\chi_{\phi,V/K} = \chi_{\phi_1,V_1/K} \cdot \chi_{\phi_2,V_2/K}$ und folglich $\mathrm{Tr}_{V/K}(\phi) = \mathrm{Tr}_{V_1/K}(\phi_1) + \mathrm{Tr}_{V_2/K}(\phi_2)$ und $\mathrm{N}_{V_1/K}(\phi) = \mathrm{N}_{V_1/K}(\phi_1)\mathrm{N}_{V_2/K}(\phi_2)$.

Das folgende Lemma ist im wesentlichen eine Aussage aus der linearen Algebra.

5.90 Lemma. *Sei F ein Körper und Teilring von $K^{m\times m}$ und sei*

$$h : F^{n\times n} \to K^{nm\times nm},\ ((a_{i,j,\mu,\nu})_{i,j})_{\mu,\nu} \mapsto (a_{i,j,\mu,\nu})_{(\mu-1)n+i,(\nu-1)n+j}.$$

Dann ist h ein Ringmonomorphismus, und für alle $M \in F^{n\times n}$ gilt

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}(M)) = \mathrm{Tr}(h(M)) \text{ und } \det(\det(M)) = \det(h(M)).$$

Beweis. Es ist zunächst offensichtlich, daß h injektiv ist und $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ gilt. Seien $M, N \in F^{n\times n}$ und $M = ((a_{i,j,\mu,\nu})_{i,j})_{\mu,\nu}$, $N = ((b_{i,j,\mu,\nu})_{i,j})_{\mu,\nu}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
h(MN) &= h\left(\Big(\sum_{c=1}^{n}(a_{i,j,\mu,c})_{i,j}(b_{i,j,c,\nu})_{i,j}\Big)_{\mu,\nu}\right)\\
&= h\left(\Big(\sum_{c=1}^{n}\big(\sum_{d=1}^{m} a_{i,d,\mu,c}b_{d,j,c,\nu}\big)_{i,j}\Big)_{\mu,\nu}\right)\\
&= h\left(\Big(\big(\sum_{c=1}^{n}\sum_{d=1}^{m} a_{i,d,\mu,c}b_{d,j,c,\nu}\big)_{i,j}\Big)_{\mu,\nu}\right)\\
&= \Big(\sum_{c=1}^{n}\sum_{d=1}^{m} a_{i,d,\mu,c}b_{d,j,c,\nu}\Big)_{(\mu-1)n+i,(\nu-1)n+j}\\
&= \big(a_{i,j,\mu,\nu}\big)_{(\mu-1)n+i,(\nu-1)n+j}\big(b_{i,j,\mu,\nu}\big)_{(\mu-1)n+i,(\nu-1)n+j}\\
&= h(N)h(M).
\end{aligned}$$

Für die Spur gilt direkt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}(M)) = \mathrm{Tr}\Big(\sum_{c=1}^{n}(a_{i,j,c,c})_{i,j}\Big) &= \mathrm{Tr}\Big((\sum_{c=1}^{n} a_{i,j,c,c})_{i,j}\Big)\\
&= \sum_{d=1}^{m}\sum_{c=1}^{n} a_{d,d,c,c} = \mathrm{Tr}(h(M)).
\end{aligned}$$

Für die Determinante gilt zunächst $\det(\det(M)) = \det(h(M))$, wenn M eine Dreiecksmatrix oder eine elementare Transformationsmatrix der folgenden Form ist: Zeile mit Element aus F multiplizieren, Zeile mit Element aus F multiplizieren und zu einer anderen Zeile addieren, zwei Zeilen vertauschen. Die Aussage für Dreiecksmatrizen ist aus der linearen Algebra bekannt. Die Aussage für die ersten beiden Transformationsmatrixtypen folgt aus der für Dreiecksmatrizen. Ist M eine Transformationsmatrix des dritten Typs, so entsteht $h(M)$ aus I_{nm} durch Vertauschung von m Zeilen und es gilt

$$\det(\det(M)) = \det(-1) = \det(-I_m) = (-1)^m = \det(h(M)).$$

Nach dem Gaußalgorithmus gibt es zu beliebigem $M \in F^{n\times n}$ elementare Transformationsmatrizen $T_i \in F^{n\times n}$ und eine Dreiecksmatrix $N \in F^{n\times n}$ mit $M = N\prod_i T_i$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\det(\det(M)) &= \det(\det(N\prod_i T_i)) = \det(\det(N)\prod_i \det(T_i))\\
&= \det(\det(N))\prod_i \det(\det(T_i)) = \det(h(N))\prod_i \det(h(T_i))\\
&= \det(h(N)\prod_i h(T_i)) = \det(h(N\prod_i T_i))\\
&= \det(h(M)).
\end{aligned}$$

□

5.91 Satz. *Sei V ein endlich dimensionaler F-Vektorraum und K ein Teilkörper von F mit $[F:K] < \infty$. Für $\phi \in \mathrm{End}_F(V)$ gilt auch $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ und*

(i) $\mathrm{Tr}_{V/K}(\phi) = \mathrm{Tr}_{F/K}(\mathrm{Tr}_{V/F}(\phi))$,

(ii) $\mathrm{N}_{V/K}(\phi) = \mathrm{N}_{F/K}(\mathrm{N}_{V/F}(\phi))$,

(iii) $\chi_{\phi,V/K} = \mathrm{N}_{F(t)/K(t)}(\chi_{\phi,V/F})$.

Beweis. Der Beweis beruht auf der „Transitivität“ der Spur und der Determinante aus Lemma 5.90.

Sei $n = \dim_F(V)$ und $m = [F:K]$. Es ist günstig, anstelle von F und K mit den rationalen Funktionenkörpern $F(t)$ und $K(t)$ zu arbeiten. Eine Basis von F über K ist auch eine Basis von $F(t)$ über $K(t)$. Wir bezeichnen mit $f : F(t) \to K(t)^{m\times m}$ den Monomorphismus, der jedem $a \in F(t)$ die Darstellungsmatrix der Muliplikation-mit-a-Abbildung bezüglich einer festgewählten Basis $e_1, \dots, e_m$ von F über K zuordnet. Definitionsgemäß gilt dann $\mathrm{Tr}(f(a)) = \mathrm{Tr}_{F(t)/K(t)}(a)$ und $\det(f(a)) = \mathrm{N}_{F(t)/K(t)}(a)$ für alle $a \in F(t)$ und speziell auch $\mathrm{Tr}(f(a)) = \mathrm{Tr}_{F/K}(a)$ und $\det(f(a)) = \mathrm{N}_{F/K}(a)$ für alle $a \in F$.

Die Abbildung $f_n : F(t)^{n\times n} \to K(t)^{nm\times nm}$ wird analog zu h in Lemma 5.90 als der durch koeffizientenweise Anwendung von f erhaltene Monomorphismus definiert. Nach Lemma 5.90 gilt nun $\mathrm{Tr}(f(\mathrm{Tr}(M))) = \mathrm{Tr}(f_n(M))$ und $\det(f(\det(M))) = \det(f_n(M))$ für jedes $M \in F(t)^{n\times n}$.

Sei $v_1, \dots, v_n$ eine F-Basis von V. Dann ist $e_j v_\nu$ für $1 \le j \le m$ und $1 \le \nu \le n$ eine K-Basis von V. Sei $M_F = (m_{\mu,\nu})_{\mu,\nu} \in F^{n\times n}$ die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich $(v_\nu)_\nu$ und sei $M_K \in K^{nm\times nm}$ die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich $(e_j v_\nu)_{(\nu-1)n+j}$. Wir wollen $M_K = f_n(M_F)$ zeigen. Sei $f_n(M_F) =$

$(a_{i,j,\mu,\nu})_{(\mu-1)n+i,(\nu-1)n+j}$ mit $a_{i,j,\mu,\nu} \in K$. Dann gilt aufgrund der Definitionen $\phi(v_\nu) = \sum_{c=1}^n m_{c,\nu} v_c$ und $m_{\mu,\nu} e_j = \sum_{d=1}^m a_{d,j,\mu,\nu} e_d$ und zusammen

$$\begin{aligned}\phi(e_j v_\nu) = e_j \phi(v_\nu) = e_j \sum_{c=1}^n m_{c,\nu} v_c = \sum_{c=1}^n (m_{c,\nu} e_j) v_c = \sum_{c=1}^n \Big(\sum_{d=1}^m a_{d,j,c,\nu} e_d\Big) v_c \\ = \sum_{c=1}^n \sum_{d=1}^m a_{d,j,c,\nu} e_d v_c.\end{aligned}$$

Dies heißt aber nichts anderes, als daß $(a_{i,j,\mu,\nu})_{(\mu-1)n+i,(\nu-1)n+j} = f_n(M_F)$ die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich der K-Basis $(e_j v_\nu)_{(\nu-1)n+j}$ ist, daß also $M_K = f_n(M_F)$ gilt.

Mit der Transitivität der Spur ergibt sich nun zusammenfassend

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{V/K}(\phi) &= \mathrm{Tr}(M_K) = \mathrm{Tr}(f_n(M_F)) = \mathrm{Tr}(f(\mathrm{Tr}(M_F))) \\ &= \mathrm{Tr}(f(\mathrm{Tr}_{V/F}(\phi))) = \mathrm{Tr}_{F/K}(\mathrm{Tr}_{V/F}(\phi)).\end{aligned}$$

Mit der Transitivität der Determinante gilt analog

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_{V/K}(\phi) &= \det(M_K) = \det(f_n(M_F)) = \det(f(\det(M_F))) \\ &= \det(f(\mathrm{N}_{V/F}(\phi))) = \mathrm{N}_{F/K}(\mathrm{N}_{V/F}(\phi)),\end{aligned}$$

und abschließend

$$\begin{aligned}\chi_{\phi,V/K} &= \det(tI_{nm} - M_K) = \det(f_n(tI_n - M_F)) = \det(f(\det(tI_n - M_F))) \\ &= \det(f(\chi_{\phi,V/F})) = \mathrm{N}_{F(t)/K(t)}(\chi_{\phi,V/F}).\end{aligned}$$

□

Man kann auch noch das Verhalten von charakteristischen Polynomen, Spuren und Normen auf Tensorprodukten $V_1 \otimes_K V_2$ und bei Konstantenerweiterung $V \otimes_K F$ (die umgekehrte Richtung von Satz 5.91) untersuchen. Wir benötigen dies hier aber nicht.

Durch Anwendung beziehungsweise Spezialisierung der obigen Aussagen auf den Körpererweiterungsfall erhalten wir den folgenden Satz.

5.92 Satz. *Sei E/K eine endliche Körpererweiterung und F ein Zwischenkörper von E/K.*

(i) *Für $a, b \in E$ und $\lambda \in K$ gilt $\mathrm{Tr}_{E/K}(a+b) = \mathrm{Tr}_{E/K}(a) + \mathrm{Tr}_{E/K}(b)$, $\mathrm{Tr}_{E/K}(\lambda a) = \lambda \mathrm{Tr}_{E/K}(a)$ und $\mathrm{N}_{E/K}(ab) = \mathrm{N}_{E/K}(a)\mathrm{N}_{E/K}(b)$.*

(*ii*) *Für $a \in F$ gilt* $\mathrm{Tr}_{E/K}(a) = [E : F]\,\mathrm{Tr}_{F/K}(a)$, $\mathrm{N}_{E/K}(a) = \mathrm{N}_{F/K}(a)^{[E:F]}$ *und* $\chi_{a,E/K} = \chi_{a,F/K}{}^{[E:F]}$. *Außerdem ist* $\deg(\chi_{a,E/K}(a)) = [E : K]$, $\chi_{a,E/K}(a) = 0$ *und* $\chi_{a,K(a)/K} = m_{a,K}$.

(*iii*) *Für $a \in E$ ist* $\mathrm{Tr}_{E/K}(a) = \mathrm{Tr}_{F/K}(\mathrm{Tr}_{E/F}(a))$, $\mathrm{N}_{E/K}(a) = \mathrm{N}_{F/K}(\mathrm{N}_{E/F}(a))$ *und* $\chi_{a,E/K} = \mathrm{N}_{F(t)/K(t)}(\chi_{a,E/F})$.

Beweis. (*i*): Ist klar. (*ii*): Es gilt $E \cong F^{[E:F]}$ als F-Vektorräume. Damit gilt auch $E \cong F^{[E:F]}$ als K-Vektorräume und die Multiplikation mit a bildet die zu den F unter der Isomorphie gehörigen direkten Summanden von E auf sich selbst ab. Aus der obenstehenden Bemerkung über direkte Summen folgt $\chi_{a,E/K} = \chi_{a,F/K}{}^{[E:F]}$. Die Aussage über die Spuren und Normen ergibt sich aus dieser Aussage über die charakteristischen Polynome. Per Definition gilt $\deg(\chi_{a,E/K}(a)) = [E : K]$. Wegen $\chi_{a,E/K}(\phi_a) = 0$ nach dem Satz von Cayley-Hamilton ist die Multiplikation mit $\chi_{a,E/K}(a)$ die Nullabbildung und daher gilt $\chi_{a,E/K}(a) = 0$. Gradvergleich zeigt dann $\chi_{a,K(a)/K} = m_{a,K}$, da beide Polynome normiert sind. (*iii*): Folgt direkt aus Satz 5.91. □

Für $a \in K$ gilt also insbesondere $\mathrm{Tr}_{E/K}(a) = [E : K]a$, $\mathrm{N}_{E/K}(a) = a^{[E:K]}$ und $\chi_{a,E/K} = (t - a)^{[E:K]}$.

Wir bringen nun Körperhomomorphismen ins Spiel. Dies liefert eine alternative Definitionsmöglichkeit für Spur, Norm und charakteristisches Polynom. Der Beweis von Satz 5.92, (*iii*) kann dann auch nur unter Verwendung von Körperhomomorphismen geführt werden (siehe Lemma 6.39).

5.93 Satz. *Sei E/K eine endliche Körpererweiterung, C ein algebraischer Abschluß von K und sei $G = \mathrm{Hom}_K(E, C)$. Für $a \in E$ gilt dann*

(*i*) $\mathrm{Tr}_{E/K}(a) = [E : K]_i \sum_{\sigma\in G} \sigma(a)$,

(*ii*) $\mathrm{N}_{E/K}(a) = \left(\prod_{\sigma\in G} \sigma(a)\right)^{[E:K]_i}$,

(*iii*) $\chi_{a,E/K} = \left(\prod_{\sigma\in G}(t - \sigma(a))\right)^{[E:K]_i}$.

Ist $[E : K]_i > 1$, so gilt also $\mathrm{Tr}_{E/K}(a) = 0$ für alle $a \in E$.

Beweis. Es ist klar, daß (*i*) und (*ii*) aus (*iii*) folgen. Außerdem gilt $p = \mathrm{char}(K) > 0$ und $[E : K]_i \equiv 0 \bmod p$, wenn $[E : K]_i > 1$ ist. Daher folgt $\mathrm{Tr}_{E/K}(a) = 0$ für alle $a \in E$ aus (*i*).

Zum Beweis von (*iii*): Sei F der separable Abschluß von K in E, so daß $[E : F] = [E : K]_i$ ist. Dann ist a^q mit $q = [K(a) : K]_i$ nach Lemma 5.62 (oder auch Korollar 5.73) separabel über K und es gilt $m_{a^q,K} = \prod_{\tau\in\mathrm{Hom}_K(K(a^q),C)}(t - \tau(a^q))$, da $m_{a^q,K}$ separabel ist und es für jedes $b \in C$ mit $m_{a^q,K}(b) = 0$ ein $\tau \in$

$\mathrm{Hom}_K(K(a^q), C)$ mit $\tau(a^q) = b$ nach Lemma 5.34 gibt (siehe auch Lemma 5.53). Nach der Zerlegung am Anfang von Abschnitt 5.6 folgt $m_{a,K} = m_{a^q,K}(t^q)$. Wegen $\deg(m_{a^q,K}) = [K(a) : K]_s$ ist $K(a^q)$ der separable Abschluß von K in $K(a)$ und $K(a)/K(a^q)$ rein inseparabel (vergleiche auch Korollar 5.73). Da jedes $\tau \in \mathrm{Hom}_K(K(a^q), C)$ somit nach Satz 5.63, (iii) genau eine Fortsetzung $\sigma \in \mathrm{Hom}_\tau(K(a), C)$ besitzt, ergibt sich also zusammengenommen die allgemeine Gleichung

$$\begin{aligned} m_{a,K} &= m_{a^q,K}(t^q) \\ &= \textstyle\prod_{\tau \in \mathrm{Hom}_K(K(a^q),C)}(t^q - \tau(a^q)) \\ &= \textstyle\prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}_K(K(a),C)}(t^q - \sigma(a^q)) \\ &= \textstyle\prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}_K(K(a),C)}(t - \sigma(a))^{[K(a):K]_i}. \end{aligned}$$

Für das charakteristische Polynom gilt $\chi_{a,E/K} = {m_{a,K}}^{[E:K(a)]}$ nach Satz 5.92, (ii), und weiter

$$\begin{aligned} \chi_{a,E/K} &= {m_{a,K}}^{[E:K(a)]} \\ &= \textstyle\prod_{\tau \in \mathrm{Hom}_K(K(a),C)}(t - \tau(a))^{[E:K(a)][K(a):K]_i} \\ &= \textstyle\prod_{\tau \in \mathrm{Hom}_K(K(a),C)}(t - \tau(a))^{[E:K(a)]_s[E:K]_i} \\ &= \textstyle\prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}_K(E,C)}(t - \sigma(a))^{[E:K]_i}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist gültig, da jedes $\tau \in \mathrm{Hom}_K(K(a), C)$ zu genau $[E : K(a)]_s$ vielen $\sigma \in \mathrm{Hom}_\tau(E, C)$ nach der Bemerkung vor Lemma 5.51 fortgesetzt werden kann. $\square$

Für beliebiges $\tau \in G$ gelten außerdem die Gleichungen $\mathrm{Tr}_{\tau E/\tau K}(\tau(a)) = \tau(\mathrm{Tr}_{E/K}(a))$, $\mathrm{N}_{\tau E/\tau K}(\tau(a)) = \tau(\mathrm{N}_{E/K}(a))$ und $\chi_{\tau(a),\tau E/\tau K} = \tau(\chi_{a,E/K})$.

Kapitel 6

Galoistheorie

Die Galoistheorie liefert eine „funktorielle“ Beziehung von Zwischenkörpern normaler und separabler Erweiterungen zu Untergruppen von Automorphismengruppen, mittels derer Untersuchungen in Körpern auf Untersuchungen von Gruppen und Automorphismen zurückgeführt werden können. Die Anwendungen erstrecken sich von der Auflösung von Gleichungen durch Radikale bis zu Fragestellungen in der Geometrie.

6.1 Galoiserweiterungen

Sei E/K eine Körpererweiterung und F ein beliebiger Zwischenkörper. Die Zuordnung

$$\mathcal{G}_{E/K} : F \mapsto \mathrm{Aut}_F(E)$$

liefert eine Abbildung der Menge der Zwischenkörper von E/K in die Menge der Untergruppen von $\mathrm{Aut}_K(E)$. Sind F_1 und F_2 zwei Zwischenkörper von E/K mit $F_1 \supseteq F_2$, so gilt $\mathcal{G}_{E/K}(F_1) \subseteq \mathcal{G}_{E/K}(F_2)$.

6.1 Definition. Sei E ein Körper, C ein Erweiterungskörper von E und $G \subseteq \mathrm{Hom}(E, C)$ eine Menge von Homomorphismen. Der Fixkörper E^G von G in E wird als $E^G = \{x \in E \mid \sigma(x) = x \text{ für } \sigma \in G\}$ definiert.

Es ist leicht zu sehen, daß E^G ein Teilkörper von E ist. Für eine Untergruppe G von $\mathrm{Aut}_K(E)$ liefert die Zuordnung

$$\mathcal{F}_{E/K} : G \mapsto E^G$$

eine Abbildung der Menge der Untergruppen von $\mathrm{Aut}_K(E)$ in die Menge der Zwischenkörper von E/K. Sind G_1 und G_2 Untergruppen von $\mathrm{Aut}_K(E)$ mit $G_1 \subseteq G_2$, so gilt $\mathcal{F}_{E/K}(G_1) \supseteq \mathcal{F}_{E/K}(G_2)$.

Führen wir $\mathcal{F}_{E/K}$ und $\mathcal{G}_{E/K}$ hintereinander aus, ergibt sich $\mathcal{F}_{E/K}(\mathcal{G}_{E/K}(F)) \supseteq F$ und $G \subseteq \mathcal{G}_{E/K}(\mathcal{F}_{E/K}(G))$. Wir untersuchen als nächstes die Eigenschaften von $\mathcal{G}_{E/K}$ und $\mathcal{F}_{E/K}$ bezüglich Injektivität und Surjektivität.

6.2 Definition. Eine algebraische Körpererweiterung E/K heißt eine Galoiserweiterung oder galoissch und E galoissch über K, wenn E/K normal und separabel ist. Die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}_K(E)$ wird dann Galoisgruppe von E/K genannt und mit $G(E/K)$ oder $G_{E/K}$ bezeichnet.

6.3 Satz. *Sei E/K eine Galoiserweiterung. Für den Fixkörper von $G = G(E/K)$ gilt dann $K = E^G$. Für jeden Zwischenkörper F von E/K ist E/F galoissch.*

Beweis. Sei C ein algebraischer Abschluß von E und $a \in E^G$ beliebig. Für jedes $\sigma \in \mathrm{Hom}_K(K(a), C)$ gibt es nach Satz 5.37 eine Fortsetzung $\tau \in \mathrm{Hom}_\sigma(E, C)$. Da E normal über K ist, folgt $\tau(E) = E$ nach Satz 5.42 und somit $\tau \in G(E/K)$. Wegen $a \in E^G$ gilt $\tau(a) = a$, daher auch $\sigma(a) = a$ und es folgt $[K(a) : K]_s = 1$, da σ beliebig war. Weil a mit E separabel über K ist, ergibt sich $[K(a) : K]_s = [K(a) : K] = 1$ nach Satz 5.54 und weiter $a \in K$. Daher gilt $K = E^G$, weil a beliebig war.

Sei F ein Zwischenkörper von E/K. Die Erweiterung E/F ist normal nach Satz 5.44 und separabel nach Satz 5.55, weil E/K normal und separabel ist. Also ist E/F galoissch. □

6.4 Satz. *Sei E/K eine Galoiserweiterung. Für alle Zwischenkörper F von E/K gilt $\mathcal{F}_{E/K}(\mathcal{G}_{E/K}(F)) = F$. Daher ist $\mathcal{G}_{E/K}$ injektiv und $\mathcal{F}_{E/K}$ surjektiv.*

Beweis. Nach Satz 6.3 ist E/F galoissch und es gilt $F = E^H$ mit $H = G(E/F)$. In anderen Worten $F = \mathcal{F}_{E/K}(H)$ und $H = \mathcal{G}_{E/K}(F)$. □

6.5 Definition. Sei E/K eine Galoiserweiterung. Der Abschluß einer Untergruppe $G \subseteq G(E/K)$ wird als $\bar{G} = \mathcal{G}_{E/K}(\mathcal{F}_{E/K}(G))$ definiert. Ferner heißt G abgeschlossen, wenn $\bar{G} = G$ gilt.

Für den Abschluß gilt $\bar{G} \supseteq G$ und $\bar{\bar{G}} = \bar{G}$. Letzteres ergibt sich aus $\bar{\bar{G}} = \mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathcal{G}(\mathcal{F}(G)))) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(G)) = \bar{G}$ mit $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{E/K}$ und $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{E/K}$ unter der Berücksichtigung, daß $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ nach Satz 6.4 die Identität ist.

Sei E/K eine Galoiserweiterung und F ein Zwischenkörper. Sei H eine Untergruppe von $G(E/F)$. Dann ist H bezüglich E/F genau dann abgeschlossen, wenn H bezüglich E/K abgeschlossen ist. Daher brauchen wir bei „abgeschlossen“ nicht speziell die Körpererweiterung oder Galoisgruppe anzugeben.

6.6 Satz (Hauptsatz der Galoistheorie – Teil 1)**.** *Sei E/K eine Galoiserweiterung. Dann werden durch $\mathcal{G}_{E/K}$ und $\mathcal{F}_{E/K}$ zueinander inverse, inklusionsumkehrende Bijektionen der Menge der Zwischenkörper von E/K und der Menge der abgeschlossenen Untergruppen von $G(E/K)$ definiert.*

Beweis. Das Bild von $\mathcal{G}_{E/K}$ besteht genau aus den abgeschlossenen Untergruppen von $G(E/K)$: Denn mit $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{E/K}$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{E/K}$ und $G = \mathcal{G}(F)$ folgt $\bar{G} = \mathcal{G}(\mathcal{F}(G)) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(\mathcal{G}(F))) = \mathcal{G}(F) = G$ wegen $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = \mathrm{id}$, also ist G abgeschlossen. Ist umgekehrt G abgeschlossen, so gilt $G = \mathcal{G}(\mathcal{F}(G))$, also ist G im Bild von $\mathcal{G}$.

Wegen $\mathcal{F}(\mathcal{G}(F) = F$ für alle Zwischenkörper F von E/K und $\mathcal{G}(\mathcal{F}(G)) = G$ für alle abgeschlossenen Untergruppen G sind also $\mathcal{G}$ und $\mathcal{F}$ zueinander inverse Bijektionen, die nach den eingangs gemachten Bemerkungen auch inklusionsumkehrend sind. □

Die Definition von „abgeschlossen" wurde hier im wesentlichen nur deshalb eingeführt, um bei $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ von zueinander inversen Bijektionen sprechen zu können. Die Konstruktion kann abstrakt für beliebige Abbildungen $g : M \to N$ und $f : N \to M$ mit $f \circ g = \mathrm{id}$ durchgefürt werden.

Wir sind jetzt an einer näheren Beschreibung der abgeschlossenen Untergruppen für endliche Galoiserweiterungen E/K interessiert.

6.7 Satz. *Sei E ein Körper, $G \subseteq \mathrm{Aut}(E)$ eine Automorphismengruppe. Ist G endlich, so ist E/E^G galoissch mit $G = G(E/E^G)$ und $[E : E^G] = \#G$. Ist G beliebig und E/E^G algebraisch, so ist E/E^G galoissch mit $G \subseteq G(E/E^G)$ und $[E : E^G] = \#G$.*

Beweis. Wir schreiben $K = E^G$ und $n = \#G$. Sei G endlich oder E/K algebraisch. Sei $a \in E$ beliebig. Die Menge $S = \{\sigma(a) \,|\, \sigma \in G\}$ ist dann endlich, da G endlich ist oder weil S eine Teilmenge der Nullstellen von $m_{a,K}$ ist. Jedes $\tau \in G$ induziert eine injektive Abbildung $S \to S$, die wegen $\#S < \infty$ auch surjektiv ist. Also gilt $\tau(S) = S$ und das Polynom $f = \prod_{b \in S}(t - b)$ erfüllt $f^\tau = f$. Da dies für alle $\tau \in G$ gilt, ergibt sich $f \in K[t]$. Nun ist $f(a) = 0$, f separabel und alle Nullstellen von f liegen in E. Da $a \in E$ beliebig war, folgt, daß E separabel und Zerfällungskörper aller solcher f über K, also normal und folglich galoissch ist.

Für $n = \infty$ ist die Aussage $[E : K] \leq n$ richtig. Für $n < \infty$ und $a \in E$ beliebig gilt $[K(a) : K] \leq n$, da a nach obiger Schlußweise eine Nullstelle eines $f \in K[t]$ mit $\deg(f) \leq n$ ist. Wegen der Separabilität von E/K und Satz 5.58 gilt dann aber bereits $[E : K] \leq n$. Es ist klar, daß $G \subseteq G(E/K)$ gilt. Dann folgt $n = \#G \leq \#G(E/K) \leq [E : K] \leq n$, also $\#G = \#G(E/K) = [E : K]$. Für $n < \infty$ ergibt sich insbesondere $G = G(E/K)$. □

Die Abgeschlossenheitsaussage im folgenden Satz zeigt, daß $\mathcal{G}_{E/K}$ für eine endliche Galoiserweiterung E/K surjektiv ist, daß also $\mathcal{G}_{E/K}$ und $\mathcal{F}_{E/K}$ in diesem Fall zueinander inverse Bijektionen der Menge aller Zwischenkörper von E/K und der Menge aller Untergruppen von $G(E/K)$ sind.

6.8 Satz (Hauptsatz der Galoistheorie – Teil 2)**.** *Sei E/K eine Galoiserweiterung.*

(*i*) *Ist E/K endlich, so sind alle Untergruppen von $G(E/K)$ abgeschlossen.*

(*ii*) *Sind $F_1 \subseteq F_2$ Zwischenkörper von E/K, so gilt $(\mathcal{G}_{E/K}(F_1) : \mathcal{G}_{E/K}(F_2)) = [F_2 : F_1]$.*

Beweis. (*i*): Sei E/K endlich und $H \subseteq G(E/K)$. Dann ist H endlich und nach Satz 6.7 gilt $H = G(E/E^H) = \mathcal{G}_{E/K}(E^H) = \mathcal{G}_{E/K}(\mathcal{F}_{E/K}(H))$.

(*ii*): Es gelten die Gleichungen $\mathcal{G}_{E/F_1}(F_1) = \mathcal{G}_{E/K}(F_1)$, $\mathcal{G}_{E/F_1}(F_2) = \mathcal{G}_{E/K}(F_2)$ und folglich $(\mathcal{G}_{E/F_1}(F_1) : \mathcal{G}_{E/F_1}(F_2)) = (\mathcal{G}_{E/K}(F_1) : \mathcal{G}_{E/K}(F_2))$. Nach Satz 6.3 ist außerdem E/F_1 galoissch. Wir können daher ohne Einschränkung von einer Galoiserweiterung E/K und einem Zwischenkörper F ausgehen und müssen $(\mathcal{G}_{E/K}(K) : \mathcal{G}_{E/K}(F)) = [F : K]$ zeigen.

Sei $G = \mathcal{G}_{E/K}(K)$ und $H = \mathcal{G}_{E/K}(F)$. Da E/K normal ist, gilt $\mathrm{Hom}_K(F, E) = \{\sigma|F \mid \sigma \in G\}$. Für $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ gilt dabei $\sigma_1|F = \sigma_2|F$ genau dann, wenn $\sigma_1/\sigma_2 \in H$ ist. Sei R ein Nebenklassenrepräsentantensystem von H in G mit $G = \dot{\bigcup}_{\sigma \in R} \sigma H$. Dann folgt, daß die Abbildung $R \to \mathrm{Hom}_K(F, E)$, $\sigma \mapsto \sigma|F$ bijektiv ist und daher $\#\mathrm{Hom}_K(F, E) = \#R = (G : H)$ gilt. Da E/K normal und separabel ist, gilt $[F : K] = \#\mathrm{Hom}_K(F, E)$. Zusammen ergibt sich $[F : K] = (G : H)$, was zu zeigen war. □

Dies schließt die Diskussion der Injektivität bzw. Surjektivität der Abbildungen $\mathcal{G}_{E/K}$ und $\mathcal{F}_{E/K}$ für endliche Galoiserweiterungen E/K ab. Für unendliche Galoiserweiterungen führt man eine geeignete Topologie auf $G(E/K)$ ein, so daß die abgeschlossenen Untergruppen von $G(E/K)$ gerade mit den im Sinn von Definition 6.5 abgeschlossenen Untergruppen übereinstimmen. Außerdem wird gezeigt, daß und wie sich $G(E/K)$ aus den Galoisgruppen $G(F/K)$ zusammensetzt, wobei F die über K galoisschen (und endlichen) Zwischenkörper von E/K durchläuft. Wir gehen hierauf nicht weiter ein.

6.9 Satz. *Sei E/K eine algebraische Körpererweiterung. Dann sind äquivalent.*

(*i*) *E/K ist galoissch,*

(*ii*) *$\mathcal{G}_{E/K}$ ist injektiv,*

(*iii*) *$K = E^{\mathrm{Aut}_K(E)}$.*

Beweis. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*): Wurde in Satz 6.4 bewiesen. (*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*): In anderer Notation ist $K = \mathcal{F}_{E/K}(\mathcal{G}_{E/K}(K))$ zu zeigen. Wir kürzen $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{E/K}$ und $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{E/K}$ ab. Dann kann man leicht allgemein (also ohne (*ii*) vorauszusetzen) zeigen, daß $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}$ und $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{G} = \mathcal{G}$ gilt. Ist $\mathcal{G}$ nun injektiv, so können wir $\mathcal{G}$ links aus $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{G} = \mathcal{G}$ kürzen und erhalten $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = \mathrm{id}$, also speziell $K = \mathcal{F}(\mathcal{G}(K))$. (*iii*) $\Rightarrow$ (*i*): Die Erweiterung $E/E^{\mathrm{Aut}_K(E)} = E/K$ ist algebraisch und nach Satz 6.7 daher galoissch. □

Der Satz zeigt also die Äquivalenz zweier weiterer, gebräuchlicher Definitionen von „galoissch“ zu der hier verwendeten Definition.

Wir fahren mit der Untersuchung der Eigenschaften von $\mathcal{G}_{E/K}$ und $\mathcal{F}_{E/K}$ bezüglich Körper- und Gruppenkonstruktionen fort.

6.10 Satz. *Seien F_i Zwischenkörper der Körpererweiterung E/K und G_i Untergruppen von $\mathrm{Aut}_K(E)$. Mit $\coprod_i$ bezeichnen wir das Kompositum von Körpern in E bzw. die von Gruppen in $\mathrm{Aut}_K(E)$ erzeugte Untergruppe. Dann gilt*

(*i*) $\mathcal{G}_{E/K}(\coprod_i F_i) = \cap_i \mathcal{G}_{E/K}(F_i),\ \mathcal{F}_{E/K}(\coprod_i G_i) = \cap_i \mathcal{F}_{E/K}(G_i),$

(*ii*) $\mathcal{G}_{E/K}(\cap_i F_i) \supseteq \coprod_i \mathcal{G}_{E/K}(F_i),\ \mathcal{F}_{E/K}(\cap_i G_i) \supseteq \coprod_i \mathcal{F}_{E/K}(G_i).$

Ist E/K endlich und galoissch, so gilt in (ii) die Gleichheit.

Beweis. (i): Sei $F = \coprod_i F_i$. Für $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(E)$ gilt die Äquivalenz $\sigma \in \mathrm{Aut}_F(E) \Leftrightarrow \sigma \in \mathrm{Aut}_{F_i}(E)$ für alle i. Dies bedeutet $\mathcal{G}_{E/K}(F) = \cap_i \mathcal{G}_{E/K}(F_i)$. Sei $G = \coprod_i G_i$. Für $x \in E$ gilt die Äquivalenz $x \in E^G \Leftrightarrow x \in E^{G_i}$ für alle i. Dies bedeutet $\mathcal{F}_{E/K}(G) = \cap_i \mathcal{F}_{E/K}(G_i)$.

(ii): Folgt aus $\mathcal{G}_{E/K}(\cap_i F_i) \supseteq \mathcal{G}_{E/K}(F_i)$ und $\mathcal{F}_{E/K}(\cap_i G_i) \supseteq \mathcal{F}_{E/K}(G_i)$ für alle i. Wir zeigen nun die Gleichheit in (ii) für E/K endlich und galoissch. Wir lassen die Indizes von $\mathcal{F}_{E/K}$ und $\mathcal{G}_{E/K}$ im folgenden aus. Nach Satz 6.4 ist $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = \mathrm{id}$. Nach Satz 6.6 und Satz 6.8 ist $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = \mathrm{id}$.

Mit dem zweiten Teil von (i) ergibt sich $\mathcal{F}(\coprod_i \mathcal{G}(F_i)) = \cap_i \mathcal{F}(\mathcal{G}(F_i)) = \cap_i F_i$ und Anwenden von $\mathcal{G}$ liefert $\mathcal{G}(\cap_i F_i) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(\coprod_i \mathcal{G}(F_i))) = \coprod_i \mathcal{G}(F_i)$.

Mit dem ersten Teil von (i) ergibt sich $\mathcal{G}(\coprod_i \mathcal{F}(G_i)) = \cap_i \mathcal{G}(\mathcal{F}(G_i)) = \cap_i G_i$ und Anwenden von $\mathcal{F}$ liefert $\mathcal{F}(\cap_i G_i) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(\coprod_i \mathcal{F}(G_i))) = \coprod_i \mathcal{F}(G_i)$. □

Der Beweis zeigt, daß die Gleichheit in (ii) auch für unendliche Galoiserweiterungen gilt, wenn man im ersten Teil den Abschluß von $\coprod_i \mathcal{G}_{E/K}(F_i)$ verwendet und im zweiten Teil nur abgeschlossene G_i betrachtet.

6.2 Beziehungen zwischen Galoiserweiterungen

Wir sind nun an den Beziehungen der Galoisgruppen interessiert, die unter der Anwendung von Isomorphismen, bei Zwischenkörpersituationen, Translationen und Komposita auftreten.

6.11 Satz. *Sei E/K eine Körpererweiterung, C ein Körper und $\lambda \in \mathrm{Hom}(E, C)$ ein Isomorphismus. Die Abbildung*

$$\phi : \mathrm{Aut}_K(E) \to \mathrm{Aut}_{\lambda K}(\lambda E),\ \sigma \mapsto \lambda \circ \sigma \circ \lambda^{-1}$$

ist ein Isomorphismus. Daher gilt $\mathrm{Aut}_{\lambda K}(\lambda E) \cong \lambda \mathrm{Aut}_K(E)\lambda^{-1}$ *und* $\mathcal{G}_{\lambda E/\lambda K}(\lambda F) \cong \lambda\mathcal{G}_{E/K}(F)\lambda^{-1}$ *unter* ϕ *für beliebige Zwischenkörper* F *von* E/K*.*

Beweis. Die Homomorphieeigenschaft von ϕ ist klar. Außerdem wird durch $\tau \mapsto \lambda^{-1} \circ \tau \circ \lambda$ ein zu ϕ inverser Homomorphismus gegeben, so daß ϕ also bijektiv ist. $\square$

Es wird häufig der Fall betrachtet, daß $\lambda E = E$, also zum Beispiel $\lambda \in \mathrm{Aut}_K(E)$ ist. Dann gilt insbesondere $\mathcal{G}_{E/K}(\lambda F) = \lambda\mathcal{G}_{E/K}(F)\lambda^{-1}$.

6.12 Satz (Hauptsatz der Galoistheorie – Teil 3)**.** *Sei* E/K *algebraisch und* F *ein Zwischenkörper von* E/K*.*

(*i*) *Ist* F/K *normal, so liefert die Einschränkung von Automorphismen von* E *auf* F *einen Homomorphismus*

$$\phi : \mathrm{Aut}_K(E) \to \mathrm{Aut}_K(F)$$

mit $\ker(\phi) = \mathrm{Aut}_F(E)$*. Ist zusätzlich* E/K *normal, so ist* ϕ *surjektiv und ergibt eine Isomorphie* $\mathrm{Aut}_K(E)/\mathrm{Aut}_F(E) \cong \mathrm{Aut}_K(F)$.

(*ii*) *Ist* E/K *galoissch und* F *ein beliebiger Zwischenkörper, so ist* E/F *galoissch und* F/K *genau dann galoissch, wenn* $\mathcal{G}_{E/K}(F)$ *normal in* $G(E/K)$ *ist.*

Beweis. (*i*): Die Einschränkung von Automorphismen liefert wegen Satz 5.42 in der Tat einen Homomorphismus $\phi : \mathrm{Aut}_K(E) \to \mathrm{Aut}_K(F)$. Für $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(E)$ gilt $\sigma \in \ker(\phi)$ genau dann, wenn σ auf F die Identität ist, also $\sigma \in \mathrm{Aut}_F(E)$ gilt. Daher ist $\ker(\phi) = \mathrm{Aut}_F(E)$. Ist E/K normal, so läßt sich jedes $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(F)$ zu einem $\tau \in \mathrm{Aut}_\sigma(E)$ nach Satz 5.37, Satz 5.42 und Satz 5.40 fortsetzen.

(*ii*): Sei E/K galoissch. Daß E/F galoissch ist, wurde bereits in Satz 6.3 gezeigt. Außerdem ist F/K separabel, so daß wir nur F/K normal zu betrachten haben. Ist F/K normal, so ist $\mathcal{G}_{E/K}(F) = \mathrm{Aut}_F(E)$ als Kern von ϕ normal in $G(E/K)$. Ist umgekehrt $\mathcal{G}_{E/K}(F)$ normal in $G(E/K)$, so gilt $\mathcal{G}_{E/K}(F) = \sigma\mathcal{G}_{E/K}(F)\sigma^{-1} = \mathcal{G}_{\sigma E/\sigma K}(\sigma F) = \mathcal{G}_{E/K}(\sigma F)$ für alle $\sigma \in G(E/K)$ nach Satz 6.11. Die Injektivität von $\mathcal{G}_{E/K}$ ergibt $F = \sigma F$ für alle $\sigma \in G(E/K)$, also ist F/K nach Satz 5.42 normal. $\square$

Für E/K und F/K normal sagt man auch, daß die durch die Inklusion und die Einschränkung ϕ gegebene Sequenz

$$1 \to \mathrm{Aut}_F(E) \to \mathrm{Aut}_K(E) \to \mathrm{Aut}_K(F) \to 1$$

exakt ist. Links und rechts außen stehen die nur aus dem Einselement bestehenden Gruppen. Exakt bedeutet, daß für jede Gruppe zwischen den Abbildungspfeilen der Kern der rechten Abbildung gleich dem Bild der linken Abbildung ist.

Dies ist äquivalent zur Isomorphieaussage $\mathrm{Aut}_K(F) \cong \mathrm{Aut}_K(E)/\mathrm{Aut}_F(E)$ von Satz 6.12, (ii).

Bevor wir uns Translationen und Komposita zuwenden, benötigen wir einen auch anderweitig nützlichen Einschub über linear disjunkte Körper.

6.13 Satz. *Seien C/K eine Körpererweiterung und E und L Zwischenkörper von C/K, so daß E/K galoissch ist und $E \cap L = K$ gilt. Dann sind E und L linear disjunkt über K.*

Beweis. Wir zeigen, daß aus E/K galoissch und E/K und L/K nicht linear disjunkt folgt, daß $E \cap L \neq K$ ist. Seien $a_1, \ldots, a_n$ endlich viele, über K linear unabhängige Elemente von E, welche über L linear abhängig sind. Da E/K separabel ist, gibt es ein $a \in E$ mit $K(a_1, \ldots, a_n) = K(a)$, und die Potenzen von a bilden eine K-Basis von $K(a)$. Nun ist $K(a)/K$ nicht linear disjunkt zu L/K, folglich ist $m_{a,L}$ ein echter Teiler von $m_{a,K}$ eines kleineren Grads. Es gibt daher Koeffizienten von $m_{a,L}$, welche in L, aber nicht in K liegen. Da E/K normal ist, liegen alle Nullstellen von $m_{a,K}$ und somit auch die von $m_{a,L}$ in E. Daher sind die Koeffizienten von $m_{a,L}$ als algebraische Ausdrücke in den Nullstellen auch Elemente von E. Zusammengenommen ergibt dies $E \cap L \neq K$. $\square$

6.14 Satz. *Seien C/K eine Körpererweiterung und E und L über K linear disjunkte Zwischenkörper von C/K. Für jedes $\sigma \in \mathrm{Hom}_K(E, C)$ gibt es dann genau eine Fortsetzung $\tau \in \mathrm{Hom}_L(EL, C)$.*

Beweis. Seien die a_i eine K-Basis von E. Da E und L über K linear disjunkt sind, sind die a_i auch eine L-Basis von EL. Sei $\sigma \in \mathrm{Hom}_K(E, C)$. Für eine Fortsetzung $\tau \in \mathrm{Hom}_L(EL, C)$ von σ muß dann $\tau(\sum_i \lambda_i a_i) = \sum_i \lambda_i \sigma(a_i)$ mit $\lambda_i \in L$ gelten. Daher kann es höchstens eine Fortsetzung geben.

Um die Existenz nachzuweisen, nehmen wir dies nun als Definition von τ. Da die Darstellung $\sum_i \lambda_i a_i$ eindeutig ist, ist τ zunächst wohldefiniert und L-linear. Seien $a, b \in EL$ mit $a = \sum_i \lambda_i a_i$ und $b = \sum_j \mu_j a_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\tau(ab) &= \tau\Big(\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j a_i a_j\Big) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \sigma(a_i a_j)\\ &= \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \sigma(a_i)\sigma(a_j) = \Big(\sum_i \lambda_i \sigma(a_i)\Big)\Big(\sum_j \mu_j \sigma(a_j)\Big)\\ &= \tau(a)\tau(b).\end{aligned}$$

Damit ist τ auch multiplikativ. $\square$

6.15 Satz. *Seien C/K eine Körpererweiterung und E und L Zwischenkörper von C/K, so daß E/K galoissch ist. Dann ist EL/L galoissch und die Einschränkung von Automorphismen von EL auf E ergibt einen Monomorphimus*

$$\phi : G(EL/L) \to G(E/K)$$

mit $\phi(G(EL/L)) = G(E/E \cap L)$.

Beweis. Es ist klar, daß $E/E \cap L$ galoissch ist. Nach Satz 5.44 und Satz 5.55 ist auch EL/L galoissch. Wir bekommen dann offensichtlich einen Monomorphismus $\phi : G(EL/L) \to G(E/K)$ mit $\phi(G(EL/L)) \subseteq G(E/E \cap L)$. Nun sind $E/E \cap L$ und $L/E \cap L$ nach Satz 6.13 linear disjunkt. Nach Satz 6.14 setzt sich daher jedes $\sigma \in G(E/E \cap L)$ zu einem $\tau \in G(EL/L)$ fort. Dies ergibt $\phi(G(EL/L)) = G(E/E \cap L)$. □

6.16 Satz. *Seien F_i über K galoissche Zwischenkörper von C/K. Dann ist $E = \prod_i F_i$ galoissch über K und das Produkt der Einschränkungen von Automorphismen von E auf die F_i liefert einen Monomorphismus*

$$\psi : G(E/K) \to \prod_i G(F_i/K).$$

Für $F_1 \cap F_2 = K$ liefert ψ die Isomorphie

$$G(F_1F_2/K) \cong G(F_1/K) \times G(F_2/K).$$

Beweis. Die Erweiterung E/K ist nach Satz 5.44 und Satz 5.55 galoissch. Außerdem ist klar, daß $\psi : G(E/K) \to \prod_i G(E_i/K)$ ein Monomorphismus ist. Gilt $F_1 \cap F_2 = K$, so gibt es für $\sigma_i \in G(F_i/K)$ nach Satz 6.15 ein $\tau_i \in G(E/F_j)$ mit $j \neq i$, so daß τ_i auf F_i mit σ_i übereinstimmt. Da τ_i die Identität auf F_j ist, gilt $\psi(\tau_1\tau_2) = (\sigma_1, \sigma_2)$ und die Isomorphieaussage folgt. □

Im allgemeinen liefert die Einschränkung wirklich nur einen Monomorphismus. Dies liegt daran, daß vorgegebene $\sigma_i \in G(F_i/K)$ nicht unbedingt zueinander passen müssen und es daher nicht notwendigerweise eine gemeinsame Fortsetzung $\sigma \in G(E/K)$ gibt. Zum Beispiel sind für die Kompatibilität der σ_i neben den Schnitten $F_i \cap F_j$ auch Überschneidungen von F_iF_j mit F_k etc. und das Verhalten von σ_i, σ_j und σ_k darauf zu berücksichtigen.

6.17 Beispiel. Konkret betrachte man $K = \mathbb{Q}$, $F_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $F_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ und $F_1F_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Es gilt $G(F_1/\mathbb{Q}) \cong G(F_2/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und nach dem Satz folgt $G(F_1F_2/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. In $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gibt es aber drei Untergruppen der Ordnung 2, und entsprechend ist $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ der dritte quadratische Teilkörper von

$F_1F_2/\mathbb{Q}$. Jedes $\sigma \in G(F_1F_2/\mathbb{Q})$ wird nach dem Satz durch seine Einschränkungen $\sigma_1 = \sigma|F_1$ und $\sigma_2 = \sigma|F_2$ eindeutig bestimmt. Daher ist $\sigma_3 = \sigma|F_3$ durch σ_1 und σ_2 bereits eindeutig bestimmt. Wir können also σ_3 bei gegebenem σ_1 und σ_2 nicht beliebig vorgeben, wenn es ein σ geben soll, so daß die σ_i als Einschränkungen von σ erhalten werden. Entsprechend ist ψ im allgemeinen nicht surjektiv.

Sind allerdings die F_i/K alle in E/K enthaltenen endlichen Galoiserweiterungen und stimmen σ_i und σ_j auf $F_i \cap F_j$ für alle i, j überein, so gibt es eine gemeinsame Fortsetzung $\sigma \in G(E/K)$. Man definiert einfach $\sigma(a) = \sigma_i(a)$, wobei i so gewählt ist, daß $a \in F_i$ gilt.

6.3 Galoisgruppen spezieller Körpererweiterungen

Wir betrachten zunächst die Galoisgruppen einiger spezieller, häufig auftretender Körpererweiterungen.

6.18 Definition. Eine Galoiserweiterung E/K heißt abelsch bzw. zyklisch, wenn $G(E/K)$ abelsch bzw. zyklisch ist.

6.19 Satz. *Sei E/K abelsch (zyklisch) und F ein Zwischenkörper. Dann sind E/F und F/K abelsch (zyklisch). Ist C ein Erweiterungskörper von E und L ein Zwischenkörper von C/K, so ist EL/L abelsch (zyklisch). Für Zwischenkörper F_i von C/K mit F_i/K abelsch ist $\coprod_i F_i/K$ abelsch.*

Beweis. Folgt direkt durch die Betrachtung der Homomorphismen in Satz 6.12, Satz 6.15 und Satz 6.16. Ferner sind Untergruppen und Faktorgruppen abelscher bzw. zyklischer Gruppen wieder abelsch bzw. zyklisch. □

6.20 Definition. Die absolute Galoisgruppe $G(K)$ eines Körpers K ist definiert als $G(K^s/K)$, wo K^s ein separabler Abschluß von K ist. Der abelsche Abschluß K^{ab} von K ist das Kompositum aller abelscher Erweiterungen von K in K^s.

Man nennt K^{ab} auch maximale abelsche Erweiterung von K, da jeder abelsche Erweiterungskörper von K in K^{ab} eingebettet werden kann. Nach Satz 6.19 ist $G(K^{ab}/K)$ abelsch.

6.21 Satz. *Sei E/K eine Erweiterung von endlichen Körpern. Dann ist E/K galoissch mit zyklischer Galoisgruppe $G(E/K)$. Für $q = \#K$ wird $G(E/K)$ vom Frobeniusautomorphismus $x \mapsto x^q$ erzeugt.*

Beweis. Übung. □

6.22 Satz. *Sei* $\mathrm{char}(K) = 0$ *oder* n *koprim zu* $\mathrm{char}(K)$, *und sei* $\zeta \in \mu_n$ *eine primitive* n*-te Einheitswurzel. Dann wird durch*

$$\phi : G(K(\mu_n)/K) \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times,\ \sigma \mapsto \phi(\sigma) \text{ mit } \sigma(\zeta) = \zeta^{\phi(\sigma)}$$

ein Monomorphismus definiert. Für $K = \mathbb{Q}$ *ist* ϕ *auch surjektiv.*

Beweis. Übung. □

Man kann Satz 6.22 auch auf Erweiterungen von endlichen Körpern wie in Satz 6.21 anwenden, denn mit $n = [E : K]$ gilt $E = K(\mu_{q^n-1})$. Ist $\zeta \in \mu_{q^n-1}$ eine primitive $(q^n - 1)$-te Einheitswurzel, so hat ζ genau n verschiedene Konjugierte ζ^{q^j} über K und das Bild von ϕ aus Satz 6.22 ist die von q in $(\mathbb{Z}/(q^n - 1)\mathbb{Z})^\times$ erzeugte, n-elementige Untergruppe.

6.23 Satz. *Sei* $\mathrm{char}(K) = 0$ *oder* n *koprim zu* $\mathrm{char}(K)$, *und sei* $\zeta \in \mu_n \subseteq K$ *eine primitive* n*-te Einheitswurzel. Sei* $f = t^n - a \in K[t]$ *irreduzibel. Der Zerfällungskörper* E *von* f *über* K *ist galoissch über* K *und es gilt* $E = K(b)$ *mit* $f(b) = 0$. *Durch*

$$\phi : G(E/K) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \sigma \mapsto \phi(\sigma) \text{ mit } \sigma(b) = \zeta^{\phi(\sigma)}b$$

wird ein Isomorphismus definiert. Die Erweiterung E/K *ist also zyklisch von der Ordnung* n.

Beweis. Übung. □

6.24 Satz. *Sei* $\mathrm{char}(K) = p > 0$ *und* $f = t^p - t - a \in K[t]$ *irreduzibel. Der Zerfällungskörper* E *von* f *über* K *ist galoissch über* K *und es gilt* $E = K(b)$ *mit* $f(b) = 0$. *Durch*

$$\phi : G(E/K) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ \sigma \mapsto \phi(\sigma) \text{ mit } \sigma(b) = b + \phi(\sigma)$$

wird ein Isomorphismus definiert. Die Erweiterung E/K *ist also zyklisch von der Ordnung* p.

Beweis. Übung. □

Die Erweiterungen E/K aus Satz 6.23 bzw. Satz 6.24 heißen einfache Kummererweiterungen bzw. einfache Artin-Schreier-Erweiterungen. Sie spielen bei weitergehenden Körperkonstruktionen als einfachste Bausteine eine wichtige Rolle. Kummererweiterungen sind ihrer Natur nach multiplikativ, während Artin-Schreier-Erweiterungen einen additiven Charakter aufweisen. Abgesehen davon sind sie sich aber recht ähnlich.

6.4 Permutationsdarstellungen und Galoisgruppen von Polynomen

Sei K ein Körper, $f \in K[t]$ ein nicht-konstantes, separables Polynom und E ein Zerfällungskörper E von f über K. Dann ist E/K galoisch. Für die Galoisgruppe von E/K erhalten wir eine Permutationsdarstellung $\phi : G(E/K) \to S_n$ wie folgt. Seien $a_1, \ldots, a_n \in E$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von f, wobei $n = \deg(f)$ ist. Für $\sigma \in G(E/K)$ gilt $f^\sigma = f$, daher bewirkt σ eine Permutation der Nullstellen $a_1, \ldots, a_n$. Bezeichnet S_n die symmetrische Gruppe (die Gruppe der Permutationen auf den Ziffern $1, \ldots, n$), so gibt es also ein $\phi(\sigma) \in S_n$ mit $\sigma(a_i) = a_{\phi(\sigma)(i)}$. Für die Definition von $\phi(\sigma)$ verwenden wir somit eine festgewählte Anordnung der Nullstellen a_i.

6.25 Satz. *Die Abbildung $\phi : G(E/K) \to S_n$, $\sigma \mapsto \phi(\sigma)$ ist ein Monomorphismus und ϕ bzw. $\phi(G(E/K))$ sind ohne Angabe einer Nullstellenanordnung nur bis auf Konjugation in S_n eindeutig bestimmt. Die Permutationsgruppe $\phi(G(E/K))$ ist genau dann transitiv, wenn f irreduzibel ist.*

Beweis. Die Homomorphieeigenschaft ist klar. Wegen $E = K(a_1, \ldots, a_n)$ ist σ durch die Operation auf den a_i bereits eindeutig bestimmt, daher ist ϕ injektiv.

Sei b_i eine andere Anordnung der Nullstellen von f und ϕ_a, ϕ_b die entsprechenden Permutationsdarstellungen. Es gibt ein $\tau \in S_n$ mit $b_i = a_{\tau(i)}$. Sei $\sigma \in G(E/K)$. Dann gilt $\phi_b(\sigma)(i) = j$ genau dann, wenn $\phi_a(\sigma)(\tau(i)) = \tau(j)$. Letzteres heißt $(\tau^{-1}\phi_a(\sigma)\tau)(i) = j$, so daß wir $\phi_b(\sigma) = \tau^{-1}\phi_a(\sigma)\tau$ erhalten. Folglich gilt auch $\phi_b(G(E/K)) = \tau^{-1}\phi_a(G(E/K))\tau$.

Sei f irreduzibel und $1 \leq i, j \leq n$. Zu a_i, a_j gibt es ein $\sigma \in \mathrm{Hom}_K(K(a_i), K(a_j))$ mit $\sigma(a_i) = a_j$, und σ läßt sich auf E fortsetzen. Dann gilt $\sigma \in G(E/K)$ und $\phi(\sigma)(i) = j$. Also ist $\phi(G(E/K))$ transitiv. Ist umgekehrt $f = f_1 f_2$ mit nicht-konstanten Polynomen f_1 und f_2, so können die Nullstellen von f_1 nicht auf die Nullstellen von f_2 abgebildet werden und $\phi(G(E/K))$ ist daher nicht transitiv. □

Der Satz gibt Anlaß zu folgender Definition, die historisch vor der Definition der Galoisgruppe einer Körpererweiterung steht.

6.26 Definition. Sei K ein Körper, $f \in K[t]$ ein nicht-konstantes, separables Polynom und E ein Zerfällungskörper von f über K. Die Galoisgruppe $G(f, K)$ von f über K wird als Bild der Permutationsdarstellung von $G(E/K)$ auf einer fest gewählten Anordnung der Nullstellen von f in E definiert.

Die Galoisgruppe $G(f, K)$ eines Polynoms ist also ohne Angabe einer Nullstellenanordnung nur bis auf Konjugation in S_n mit $n = \deg(f)$ eindeutig bestimmt.

Für jede Galoiserweiterung E/K gilt $G(E/K) \cong G(m_{a,K}, K)$, wobei a ein primitives Element von E/K bezeichnet.

Die Berechnung von $G(f, K)$ kann auf die Berechnung des Zerfällungskörpers von f über K zurückgeführt werden. Seien die E_i eine aufsteigende Kette von Zwischenkörpern von E/K mit $E_{i+1} = E_i(a_i)$ und $f(a_i) = 0$ wie im Beweis von Satz 5.28. Für $\sigma_i \in \mathrm{Hom}_K(E_i, E)$ sind alle Fortsetzungen auf E_{i+1} durch $a_i \mapsto a_j$ gegeben, wobei a_j über die Nullstellen von ${m_{a_i,E_i}}^{\sigma_i}$ läuft. Man erhält daher alle Elemente von $G(f, K)$, indem man Polynome über den E_i faktorisiert und induktiv alle Fortsetzungen der Identität auf K nach E bestimmt.

Als Beispiel für dieses Vorgehen betrachten wir $f = t^3 - 2 \in \mathbb{Q}[t]$. Wir setzen $E_0 = K = \mathbb{Q}$, $a_1 = \sqrt[3]{2}$, $a_2 = \zeta\sqrt[3]{2}$ mit $\zeta = \exp(2\pi i/3) \in \mu_3$ und $E_{i+1} = E_i(a_i)$. Damit gilt $[E_1 : K] = 3$, $[E_2 : E_1] = 2$ und $E = E_2$. Die Identität auf K hat drei Fortsetzungen auf E_1, und diese drei Fortsetzungen haben jeweils zwei Fortsetzungen auf E_2. Damit besteht $G(f, K)$ aus 6 Elementen. Die Bestimmung dieser 6 Elemente ist allerdings etwas leichter, wenn wir $E = K(\zeta, \sqrt[3]{2})$ beachten. Mit Satz 6.22 bestimmen wir zunächst $G(K(\zeta)/K)$, und setzen diese Automorphismen mittels Satz 6.23 und Lemma 5.51 zu allen Automorphismen in $G(E/K)$ zusammen. Dies ergibt $G(E/K) = \{\sigma_{i,j} \,|\, 1 \le i \le 2, 1 \le j \le 3\}$ mit $\sigma_{i,j}$ definiert durch $\sigma_{i,j}(\zeta) = \zeta^i$, $\sigma_{i,j}(\sqrt[3]{2}) = \zeta^j \sqrt[3]{2}$.

Wir betrachten nun die allgemeinen Fälle $n = 1, 2, 3$. Für $n = 1$ ist f linear und $G(f, K) = \{(1)\}$ als Untergruppe von S_1. Für $n = 2$ hat f zwei Nullstellen a_1 und a_2. Gilt $a_i \in K$, so folgt $G(f, K) = \{(1)\}$ als Untergruppe von S_2. Ansonsten gilt $G(f, K) = \{(1), (1, 2)\} = S_2$.

Der erste nicht völlig triviale Fall ergibt sich für $n = 3$. Ist f nicht irreduzibel, so sind wir auf die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ zurückgeführt. Wir nehmen also an, daß f irreduzibel ist. Sei E der Zerfällungskörper von f über K. Dann gilt $[E : K] = 3$ oder $[E : K] = 6$. Im ersten Fall ist $G(f, K) = A_3$ zyklisch und wird beispielsweise von $(1, 2, 3)$ erzeugt. Hier gibt es keine nicht-trivialen Zwischenkörper. Im letzteren Fall $[E : K] = 6$ gilt $G(f, K) = S_3$ wegen $\#S_3 = 6$, und $G(f, K)$ ist nicht abelsch. Die S_3 wird von $(1, 2, 3)$ und $(1, 2)$ erzeugt. Man rechnet leicht nach, daß es genau drei (zueinander konjugierte) Untergruppen der Ordnung zwei gibt, nämlich $G_1 = \langle(1, 2)\rangle$, $G_2 = \langle(1, 3)\rangle$ und $G_3 = \langle(2, 3)\rangle$, und genau eine normale Untergruppe der Ordnung drei, nämlich $H = \langle(1, 2, 3)\rangle$. Daher gibt es genau drei (zueinander konjugierte) Zwischenkörper $F_i = \mathcal{F}_{E/K}(G_i)$ von E/K mit $[F_i : K] = 3$ und einen über K galoisschen Zwischenkörper $L = \mathcal{F}_{E/K}(H)$ mit $[L : K] = 2$. Man setze diese allgemeinen Betrachtungen in Beziehung zum obigen Beispiel $f = t^3 - 2$. Wie lautet der Isomorphismus zwischen den Permutationen und den $\sigma_{i,j}$, und welchen Zwischenkörpern entsprechen die F_i und L? Ein allgemeiner Ansatz zur Konstruktion von Erzeugern von Fixkörpern von Automorphismengruppen wird übrigens durch Lemma 5.24 gegeben.

Für höhere Polynomgrade n wird die Diskussion schnell schwieriger. Mit Spezialbetrachtungen kann man aber trotzdem einiges über $G(f, K)$ herausfinden. Ein systematisches Vorgehen und der Einsatz von Computern erlauben die explizite Bestimmung von $G(f, K)$ für geeignete Grundkörper K zur Zeit bis $n = 23$. Wir nehmen dieses Thema im folgenden Abschnitt auf. Auf der anderen Seite kann man die Galoisgruppen von Klassen von speziellen Polynomen bzw. Galoiserweiterungen wie im Abschnitt 6.3 leicht explizit bestimmen.

Der folgende Satz zeigt, daß wir für eine Permutationsdarstellung einer Galoisgruppe in gewissen Fällen immer ein Polynom finden können, welches diese Permutationsdarstellung realisiert.

6.27 Satz. *Sei E/K eine Galoiserweiterung und $\phi : G(E/K) \to S_n$ ein Homomorphismus. Mit den Bezeichnungen $G = \phi(G(E/K))$ und $H_i = \mathrm{Stab}_G(i)$ gelte $N_G(H_i) = H_i$ für ein i mit $1 \le i \le n$. Ist G transitiv oder gilt $\#K \ge n$, so gibt es ein normiertes, separables Polynom $f \in K[t]$ mit den folgenden Eigenschaften.*

(*i*) *Der Zerfällungskörper F von f über K ist in E enthalten und erfüllt $[E : F] = \#\ker(\phi)$.*

(*ii*) *Es gilt $G(f, K) = G$ für eine Nullstellenanordnung.*

Beweis. Wir schicken ein paar Betrachtungen für transitive Permutationsgruppen G voraus. Da G transitiv ist, gibt es für alle i, j ein $\sigma \in G$ mit

$$H_j = \mathrm{Stab}_G(j) = \mathrm{Stab}_G(\sigma(i)) = \sigma \mathrm{Stab}_G(i)\sigma^{-1} = \sigma H_i \sigma^{-1},$$

also sind die H_i alle konjugiert. Wir wählen ein festes ν und setzen $H = H_\nu$. Desweiteren gilt dann $G \cdot \nu = \{1, \dots n\}$ und daher $(G : H) = \#(G \cdot \nu) = n$. Bezeichnet $G \cdot H$ die Bahn von H unter der Operation von G durch Konjugation, so gilt $G \cdot H = \{H_i \,|\, 1 \le i \le n\}$ und $\#(G \cdot H) = (G : N_G(H))$. Wegen $H \subseteq N_G(H)$ ergibt sich also $\#(G \cdot H) \le n$, und $\#(G \cdot H) = n$ gilt genau dann, wenn $N_G(H) = H$ ist. Für $N_G(H) = H$ seien die $\sigma_i \in G$ ein Nebenklassenrepräsentantensystem mit $G = \dot\cup\{\sigma_i H \,|\, 1 \le i \le n\}$. Dann gilt $\sigma_i H \sigma_i^{-1} = \sigma_j H \sigma_j^{-1}$ genau dann, wenn $(\sigma_j^{-1}\sigma_i)H(\sigma_j^{-1}\sigma_i)^{-1} = H$, also $\sigma_j^{-1}\sigma_i \in H$ und damit $\sigma_i = \sigma_j$ ist. Es folgt $G \cdot H = \{\sigma_i H \sigma_i^{-1} \,|\, 1 \le i \le n\}$. Die σ_i können so numeriert werden, daß $\sigma_i(\nu) = i$ gilt. Dann ergibt sich genauer $\sigma_i H \sigma_i^{-1} = H_i$ für $1 \le i \le n$.

Sei nun $F = \mathcal{F}_{E/K}(\ker(\phi))$. Dann ist F/K galoissch und $\phi|F$ erfüllt ebenfalls die Voraussetzungen des Satzes. Außerdem gilt $[E : F] = \#\ker(\phi)$, so daß wir mit den Bezeichnungen des Satzes ohne Einschränkung annehmen können, daß ϕ injektiv ist. Im folgenden identifizieren wir $G(E/K)$ mit G und verwenden die Bezeichnungen des vorigen Absatzes.

Wir behandeln zuerst den Fall, daß G transitiv ist. Dann operiert G durch Konjugation auf der n-elementigen Menge $\{H_i \,|\, 1 \leq i \leq n\}$. Wir setzen $F_i = \mathcal{F}_{E/K}(H_i)$ und $F = \mathcal{F}_{E/K}(H)$. Dann operiert G durch $\sigma \cdot F_i = \sigma(F_i)$ ebenfalls auf der n-elementigen Menge $\{F_i \,|\, 1 \leq i \leq n\}$, denn es gilt $\sigma(F_i) = \mathcal{F}_{E/K}(\sigma H_i \sigma^{-1}) = \mathcal{F}_{E/K}(H_j) = F_j$ für ein j. Sei $a \in E$ ein primitives Element von F/K und $a_i = \sigma_i(a) \in F_i$. Da die F_i paarweise verschieden sind (oder auch die σ_i ein Nebenklassenrepräsentantensystem von G/H bilden), sind die a_i paarweise verschieden. Dann operiert G durch $\sigma \cdot a_i = \sigma(a_i)$ auch auf der n-elementigen Menge $\{a_i \,|\, 1 \leq i \leq n\}$, denn $\sigma(a_i) = \sigma(\sigma_i(a)) = \sigma_j(a)$ für ein j wegen $a \in \mathcal{F}_{E/K}(H)$. Vermöge der Bijektionen $i \mapsto H_i$, $i \mapsto F_i$, $i \mapsto a_i$ und wegen $\sigma(F_i) = \mathcal{F}_{E/K}(\sigma H_i \sigma^{-1})$ für $\sigma \in G$ sind alle diese Operationen von G äquivalent und transitiv, da G transitiv vorausgesetzt wurde. Wir definieren $f = \prod_{i=1}^{n}(t - a_i)$. Dann ist f normiert und separabel. Weil G auf $\{a_i \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ operiert, gilt $f^\sigma = f$ für alle $\sigma \in G$ und es folgt $f \in K[t]$. Wegen der Transitivität von G auf $\{a_i \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ ist f irreduzibel über K. Nach Konstruktion gilt $G(f, K) = G$ mit der gewählten Nullstellenanordnung. Schließlich folgt aus $\sigma(a_i) = a_i$ auch $\sigma(i) = i$ für alle i (wir identifizieren $G(E/K)$ und G), und daraus $\sigma = \mathrm{id}$. Also gilt für den Zerfällungskörper F von f über K wie gewünscht $F = K(a_1, \ldots, a_n) = E$.

Für nicht unbedingt transitives G, aber $\#K \geq n$, seien nun $D_i = \{d_{i,j} \,|\, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s_i\}$ die Bahnen von G in $\{1, \ldots, n\}$. Durch Einschränkung auf D_i erhalten wir Homomorphismen $\psi_i : G \to S(D_i)$. Sei $G_i = \psi_i(G)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
N_{G_i}(\mathrm{Stab}_{G_i}(d_{i,j})) &= \psi_i(\psi_i^{-1}(N_{G_i}(\mathrm{Stab}_{G_i}(d_{i,j})))) \\
&= \psi_i(N_G(\psi_i^{-1}(\mathrm{Stab}_{G_i}(d_{i,j})))) \\
&= \psi_i(N_G(\mathrm{Stab}_G(d_{i,j}))) \\
&= \psi_i(\mathrm{Stab}_G(d_{i,j})) \\
&= \mathrm{Stab}_{G_i}(d_{i,j}).
\end{aligned}$$

Wir können daher den bereits bewiesenen, transitiven Fall des Satzes auf G_i anwenden. Für jedes i mit $1 \leq i \leq r$ gibt es separable und irreduzible $f_i \in K[t]$ mit $f_i = \prod_{j=1}^{s_i}(t - a_{i,j})$ und $a_{i,j} \in E$. Die Gruppe G operiert äquivalenterweise auf D_i und $\{a_{i,j} \,|\, 1 \leq j \leq s_i\}$. Wegen $\#K \geq n$ gibt es $c_i \in K$, so daß die Polynome $f_i(t + c_i)$ für $1 \leq i \leq r$ paarweise teilerfremd sind. Mit $f = \prod_i f_i(t + c_i)$ erhalten wir dann ein separables Polynom mit $G(f, K) = G$ bezüglich der gewählten Nullstellenanordnung. Für den Zerfällungskörper F von K gilt wieder wie gewünscht $F = K(\{a_{i,j} \,|\, i, j\}) = E$. $\square$

Sei E/K galoissch, a ein primitives Element von E/K und $G = G(m_{a,K}, K)$. Dann gilt $\mathrm{Stab}_G(i) = \{\mathrm{id}\}$ und $N_G(\mathrm{Stab}_G(i)) = G$. Dieses Beispiel zeigt, daß die Bedingung des Satzes nur hinreichend für die Existenz eines Polynoms f mit $G = G(f, K)$ ist.

6.5 Symmetrische Polynome und das Umkehrproblem der Galoistheorie

Wir wollen an die Situation des vorhergehenden Abschnitts anknüpfen und für allgemeines f kurz „allgemeine" Betrachtungen anstellen. Sei k ein Körper und $E = k(x_1, \ldots, x_n)$ der Körper der rationalen Funktionen in $x_1, \ldots, x_n$. Für $\sigma \in S_n$ definieren wir ein $\psi(\sigma) \in \mathrm{Aut}_k(E)$ durch $\psi(\sigma)(x_i) = x_{\sigma(i)}$. Dies liefert einen Monomorphismus $\psi : S_n \to \mathrm{Aut}_k(E)$, $\sigma \mapsto \psi(\sigma)$. Wir setzen $K = E^{\psi(S_n)}$. Die Elemente aus K bleiben unverändert, wenn man die x_i permutiert. Es handelt sich also dabei um genau die symmetrischen Funktionen in E. Da $\psi(S_n)$ endlich ist, ist E/K nach Satz 6.7 galoissch mit $G(E/K) = \psi(S_n)$. Aufgrund der Isomorphie $\psi(S_n) \cong S_n$ identifizieren wir $G(E/K)$ und S_n im folgenden.

Wir setzen nun $f = \prod_{i=1}^{n}(t - x_i) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i s_i t^{n-i}$, wobei die s_i die elementarsymmetrischen Polynome in den x_i sind. Offenbar gilt $f \in k(s_1, \ldots, s_n)[t]$, und E ist Zerfällungskörper von f über $k(s_1, \ldots, s_n)$. Wegen $[E : k(s_1, \ldots, s_n)] \leq n!$, $[E : K] = n!$ und $k(s_1, \ldots, s_n) \subseteq K$ ergibt sich $K = k(s_1, \ldots, s_n)$. Dies zeigt, daß sich jede symmetrische Funktion als rationale Funktion in den s_i erhalten läßt. Darüberhinaus gibt es zu i, j ein $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(x_i) = x_j$. Die x_i sind damit alle konjugiert und f ist irreduzibel über K. Zusammenfassend erhalten wir folgenden Satz.

6.28 Satz. *Sei $E = k(x_1, \ldots, x_n)$ der Körper der rationalen Funktionen in x_i und K der Teilkörper der symmetrischen Funktionen in E. Dann ist E/K galoissch mit $G(E/K) = S_n$ und es gilt $K = k(s_1, \ldots, s_n)$, wobei s_i die elementarsymmetrischen Polynome in den x_i sind. Der Körper E ist Zerfällungskörper des irreduziblen Polynoms $f = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i s_i t^{n-i} \in K[t]$.*

Die folgende Aussage ist an dieser Stelle noch von grundsätzlichem Interesse.

6.29 Satz. *Die elementarsymmetrischen Polynome $s_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$ sind algebraisch unabhängig. Daher kann $k[s_1, \ldots, s_n]$ auch als Polynomring in den Variablen s_i aufgefaßt werden. Sei K der Körper der symmetrischen Funktionen und $R = k[x_1, \ldots, x_n] \cap K$ der Ring der symmetrischen Polynome. Dann gilt $R = k[s_1, \ldots, s_n]$.*

Beweis. Wurde in Algebra 1 bewiesen. Mit Theorie, die später behandelt wird, kann man wie folgt argumentieren: Die Körpererweiterung $k(x_1, \ldots, x_n)/k$ hat

Transzendenzgrad n, und $k(x_1, \dots, x_n)/k(s_1, \dots, s_n)$ ist endlich. Daher hat auch $k(s_1, \dots, s_n)/k$ Transzendenzgrad n, und die s_i sind algebraisch unabhängig. Die Ringerweiterung $k[x_1, \dots, x_n]/k[s_1, \dots, s_n]$ ist ganz. Daher ist auch die Ringerweiterung $R/k[s_1, \dots, s_n]$ ganz. Da $k[s_1, \dots, s_n]$ wegen der algebraischen Unabhängigkeit ein Polynomring und damit faktoriell ist, ist $k[s_1, \dots, s_n]$ in seinem Quotientenkörper K ganz abgeschlossen. Es folgt $R = k[s_1, \dots, s_n]$. □

Das oben verwendete Polynom $f = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i s_i t^{n-i} \in R[t]$ heißt aufgrund der ersten Aussage des Satzes allgemeines Polynom n-ten Grads, da f nicht nur „allgemeine" Nullstellen, sondern auch „allgemeine" Koeffizienten hat. Wir merken an, daß es einen konstruktiven Beweis der zweiten Aussage von Satz 6.29 gibt, der ein Verfahren angibt, mit dem man ein symmetrisches Polynom in den x_i als Polynom in den s_i darstellt.

6.30 Satz. *Sei $E = k(x_1, \dots, x_n)$, $K = k(s_1, \dots, s_n)$, G eine Untergruppe von S_n und $F = \mathcal{F}_{E/K}(G)$. Dann gilt $G(E/F) = G$ und es gibt ein $h \in k[x_1, \dots, x_n]$ mit $F = K(h)$.*

Beweis. Fordern wir statt $h \in k[x_1, \dots, x_n]$ nur $h \in k(x_1, \dots, x_n)$, so ergibt sich die Existenz von h direkt aus dem Satz vom primitiven Element. Für jedes $g \in k[x_1, \dots, x_n]$ ist $f = \mathrm{N}_{E/K}(g) = \prod_{\sigma \in S_n} \sigma(g) \in k[x_1, \dots, x_n] \cap k(s_1, \dots, s_n)$ nach Satz 6.28 (genauer $f \in k[s_1, \dots, s_n]$ nach Satz 6.29). Besitzt $h \in k(x_1, \dots, x_n)$ einen Nenner g, so können wir wegen $f \in k(s_1, \dots, s_n)$ anstelle von h daher auch $fh \in k[x_1, \dots, x_n]$ als primitives Element verwenden. □

Es gelten die Bezeichnungen von Satz 6.30 mit $k = \mathbb{Q}$. Satz 6.30 kann folgendermaßen genutzt werden, um Informationen über die Galoisgruppe eines Polynoms $f_0 \in \mathbb{Q}[t]$ zu erhalten. Wir wählen eine Anordnung der Nullstellen $a_i \in \mathbb{C}$ von f_0 und betrachten $G(f_0, \mathbb{Q})$ als Untergruppe der S_n. Aus $G(f_0, \mathbb{Q}) \leq G$ muß dann $h(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}$ folgen, weil h unter G und unter $G(f_0, \mathbb{Q})$ als Permutationsgruppe, und somit $h(a_1, \dots, a_n)$ unter $G(f_0, \mathbb{Q})$ als Gruppe von Körperautomorphismen invariant ist. Unter einer Zusatzbedingung gilt auch die Umkehrung dieser Implikation, aus $h(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}$ folgt $h \in \mathcal{F}_{E/K}(G(f_0, \mathbb{Q}))$ und daraus $G(f_0, \mathbb{Q}) \leq G$. Durch systematisches Testen von $h(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}$ für die möglichen Kandidatengruppen G kann man so die Galoisgruppe $G(f_0, \mathbb{Q})$ genau bestimmen. Man kann dabei auch induktiv vorgehen, indem man die G absteigend durchläuft. Im i-ten Schritt wissen wir $G(f_0, \mathbb{Q}) \leq G_i$, also $h_j(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}$ für $1 \leq j \leq i$. Sei $G_{i+1} < G_i$ eine Kandidatengruppe, für die wir herausfinden wollen, ob $G(f_0, \mathbb{Q}) \leq G_{i+1}$ gilt. Wir definieren h_{i+1} als primitives Element von $F_{i+1} = \mathcal{F}_{E/K}(G_{i+1})$ über $F_i = \mathcal{F}_{E/K}(G_i) = K(h_1, \dots, h_i)$ und testen $h_{i+1}(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}$ (und dazu die oben erwähnte Zusatzbedingung). Für die

Berechnungen kann man Fließkommazahlen in $\mathbb{C}$ benutzen, und die Tests „$\in \mathbb{Q}$" kann man bei geeignetem Vorgehen auch durch Tests „$\in \mathbb{Z}$" ersetzen. Die Möglichkeit von Rundungsfehlern in den Berechnungen muß berücksichtigt werden.

Ein anderer Ansatz geht wie folgt. Für jede Kandidatengruppe G bestimmen wir $m_{h,K} \in K[t]$. Die Koeffizienten von $m_{h,K}$ sind Ausdrücke in den s_i und wir können folglich für die s_i die Koeffizienten von f_0 (unter Beachtung der Vorzeichen $(-1)^i$) substituieren. Das resultierende Polynom $m_0 \in \mathbb{Q}[t]$ muß dann mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{Q}$ haben, welche $h(a_1, \ldots, a_n)$ entsprechen würde. Hat es eine einfache Nullstelle in $\mathbb{Q}$, so folgt $G(f_0, \mathbb{Q}) \leq G$. Hier brauchen wir nur mit den Koeffizienten von f_0, nicht aber mit seinen Nullstellen zu arbeiten.

Normalerweise verwendet man für diese Strategien einen Computer, da die h und $m_{h,K}$ sehr große Ausdrücke werden können und es sehr viele Kandidaten G geben kann (301 Kandidaten für $n = 12$, 1954 Kandidaten für $n = 16$, 25000 Kandidaten für $n = 23$). In Spezialfällen ist es aber möglich, relativ einfache Formeln anzugeben.

Wir wollen als Beispiel $G = A_n$ in Charakteristik Null oder > 2 betrachten. Die folgende, allgemeine Definition ist dafür und auch anderweitig nützlich.

6.31 Definition. Sei $f \in K[t]$ mit $n = \deg(f) \geq 1$ ein Polynom mit Leitkoeffizient $c \in K$ und den Nullstellen $a_1, \ldots, a_n$ in einem Zerfällungskörper von f über K. Die Diskriminante $d(f)$ von f wird dann als $d(f) = c^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2$ definiert.

6.32 Satz. *Die Diskriminante liefert eine Abbildung der Menge der Polynome vom Grad ≥ 1 in $K[t]$ nach K.*

Beweis. Es ist unmittelbar einsichtig, daß $d(f)$ nicht von der gewählten Reihenfolge der a_i abhängt. Dies zeigt, daß $d(f)$ invariant unter $G(f, K)$ ist und folglich $d(f) \in K$ gilt. Damit ist $d(f)$ auch unabhängig von den gewählten Nullstellen. $\square$

Mit $h = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ gilt für die Diskriminante $d(f)$ des allgemeinen Polynoms f nach Satz 6.32 und Satz 6.29, daß $d(f) = h^2 \in k[s_1, \ldots, s_n]$ ist. Für konkret gegebene Polynome f_0 gibt es also eine Formel für $d(f_0)$ in den Koeffizienten von f_0. Im Hinblick auf den Unterschied von S_n und A_n bemerken wir, daß für $\sigma \in S_n$ entweder $\sigma(h) = h$ oder $\sigma(h) = -h$ gilt, und der zweite Fall tritt wirklich auf. Für $\sigma \in A_n$ gilt auf der anderen Seite stets $\sigma(h) = h$. Aus $(S_n : A_n) = 2$ ergibt sich daher mit den Bezeichnungen von Satz 6.30, daß $F = \mathcal{F}_{E/K}(G) = K(h)$ und $m_{h,K} = t^2 - d(f)$ ist.

6.33 Satz. *Sei $f_0 \in k[t]$ ein separables Polynom vom Grad n und* $\mathrm{char}(k) = 0$ *oder* $\mathrm{char}(k) > 2$. *Die Diskriminante $d(f_0)$ ist ein Quadrat im Zerfällungskörper von f_0 über k und es gilt $G(f_0, k) \subseteq A_n$ genau dann, wenn $d(f_0)$ ein Quadrat in k ist.*

Beweis. Seien a_i die Nullstellen von f_0 und $h_0 = \prod_{1 \le i < j \le n}(a_i - a_j)$. Die erste Aussage ist wegen $d(f_0) = h_0^2$ klar. Zur zweiten Aussage: Aus $G(f_0, k) \subseteq A_n$ folgt $h_0 \in k$ und somit ist $d(f_0) = h_0^2$ ein Quadrat in k. Gilt $G(f_0, k) \not\subseteq A_n$, so gibt es ein $\sigma \in G(f_0, k)$ mit $\sigma(h_0) = -h_0$. Wegen $h_0 \neq 0$ wegen der Separabilität von f_0 und $-1 \neq 1$ wegen $\mathrm{char}(k) = 0$ oder $\mathrm{char}(k) > 2$ folgt $\sigma(h_0) \neq h_0$. Dann gilt $h_0, -h_0 \notin k$ und $d(f_0)$ ist kein Quadrat in k. $\square$

Für den Fall $n = 3$ betrachten wir das separable Polynom $f = x^3 + ax^2 + bx + c$ in Charakteristik ungleich 3. Durch die Transformation $x \mapsto x - a/3$ erhalten wir ein Polynom mit gleicher Galoisgruppe wie f, aber ohne den x^2-Term. Wir nehmen daher ohne Einschränkung $a = 0$ an. Man kann nachrechnen, daß dann $d(f) = -4b^3 - 27c^2$ gilt, und wir können Satz 6.33 anwenden, um zwischen $G(f, K) = A_3$ und $G(f, K) = S_3$ zu unterscheiden.

Das Umkehrproblem der Galoistheorie für einen Körper K ist, zu einer endlichen Gruppe G ein Polynom $f \in K[t]$ mit $G(f, K) \cong G$ zu finden. Es hat für endliche Körper K im allgemeinen keine Lösung, da hier nur zyklische Galoisgruppen auftreten. Auf der anderen Seite haben wir mit Satz 6.28 eine Erweiterung E/K mit Galoisgruppe S_n konstruiert. Da jede endliche Gruppe G isomorph zu einer Untergruppe von S_n für geeignetes n ist, erhalten wir durch Fixkörperbildung eine Erweiterung E/F mit Galoisgruppe isomorph zu G. Indem man für die x_i geeignete Werte einsetzt, erhält man Erweiterungen E_0/F_0 und kann das Umkehrproblem so auch für F_0 und G lösen. Ein wesentliches Problem stellt sich hier aber, wenn die Bedingung $F_0 = k$ für $E = k(x_1, \ldots, x_n)$ fest vorgeben ist. Die Körper F sind nach einem Satz von Swan (1969) im allgemeinen keine rationalen Funktionenkörper mehr, ein Gegenbeispiel ist $k = \mathbb{Q}$, $n = 47$ und $G = \langle (1, \ldots, n) \rangle$. Daher fällt F_0 im allgemeinen echt größer als $\mathbb{Q}$ aus. Das Umkehrproblem der Galoistheorie ist damit für $\mathbb{Q}$ zur Zeit nur für spezielle Klassen von Gruppen gelöst. Nach einem Satz von Shafarevich (1954) sind beispielsweise alle auflösbaren Gruppen als Galoisgruppen realisierbar. Schreibt man ein „zufälliges" Polynom $f \in \mathbb{Q}[t]$ hin, so gilt mit „großer" Wahrscheinlichkeit $G(f, \mathbb{Q}) = S_n$.

6.6 Lineare Unabhängigkeit von Charakteren

Sei G eine Halbgruppe und K ein Körper. Unter einem Charakter von G in K verstehen wir in diesem Abschnitt einen Homomorphismus $\chi : G \to K^\times$. Der triviale Charakter $\chi = 1$ ist der durch $\chi(a) = 1$ für alle $a \in G$ gegebene Charakter.

Charaktere treten in vielen Zusammenhängen auf (zum Beispiel Fourieranalysis, Darstellungstheorie endlicher Gruppen). Im Rahmen der Vorlesung werden sie aber nur eine geringe Rolle spielen.

Sind χ_1, χ_2 Charaktere und $\lambda \in K$, so definieren wir wie üblich $(\chi_1 + \chi_2)(a) = \chi_1(a) + \chi_2(a)$ und $(\lambda\chi_1)(a) = \lambda\chi_1(a)$. Die Charaktere von G in K spannen damit einen K-Vektorraum von Abbildungen $G \to K$ auf. Die Charaktere $\chi_1, \dots, \chi_n$ von G in K sind linear unabhängig über K, wenn für $\lambda_i \in K$ aus $\lambda_1\chi_1 + \cdots + \lambda_n\chi_n = 0$ folgt, daß alle $\lambda_i = 0$ sind. Wir haben folgenden, grundlegenden Satz.

6.34 Satz (Artin)**.** *Sei G eine Halbgruppe und K ein Körper. Die Charaktere $\chi_1, \dots, \chi_n$ von G in K sind genau dann linear unabhängig über K, wenn sie paarweise verschieden sind.*

Beweis. Sind die Charaktere linear unabhängig, so sind sie notwendigerweise verschieden. Wir nehmen nun an, daß die χ_i verschieden sind. Ein einzelner Charakter ist offenbar linear unabhängig über K, weil er nicht die Nullabbildung sein kann. Wir betrachten jetzt eine Relation $\lambda_1\chi_1 + \cdots + \lambda_n\chi_n = 0$ mit minimalem $n \geq 2$. Dann sind alle $\lambda_i \neq 0$. Da $\chi_1 \neq \chi_2$ gibt es $a \in G$ mit $\chi_1(a) \neq \chi_2(a)$. Wegen $\chi_1 : G \to K^\times$ gilt $\chi_1(a) \neq 0$. Für alle $b \in G$ gilt dann $\sum_i \lambda_i\chi_i(ab) = \sum_i \lambda_i\chi_i(a)\chi_i(b) = 0$, folglich $\sum_i \lambda_i\chi_i(a)\chi_i = 0$. Wir dividieren diese Relation durch $\chi_1(a)$ und subtrahieren die ursprüngliche Relation $\sum_i \lambda_i\chi_i = 0$. Dies liefert $\sum_i(\lambda_i\chi_i(a)/\chi_1(a) - \lambda_i)\chi_i = 0$. Der Koeffizient von χ_1 ist Null und der von χ_2 nach Wahl von a ungleich Null. Wir erhalten eine Relation mit weniger als n Summanden, im Widerspruch zur Wahl von n. $\square$

Als Spezialfall können wir Körperhomomorphismen eingeschränkt auf die multiplikativen Gruppen als Charaktere ansehen. Ein anderer, aufwendigerer Beweis für die lineare Unabhängigkeit in diesem Fall wurde von Dedekind gegeben.

Man kann Satz 6.34 nach Artin übrigens zum Ausgangspunkt eines anderen Aufbaus der Galoistheorie als wie behandelt machen (siehe zum Beispiel die Bücher von Fischer/Sacher und Meyberg).

Als erste Anwendung notieren wir den folgenden Satz über die Spurabbildung.

6.35 Satz. *Sei E/K eine endliche Körpererweiterung. Dann sind äquivalent:*

(*i*) *E/K ist separabel.*

(*ii*) *Die Spurabbildung $\mathrm{Tr}_{E/K} : E \to K$ ist surjektiv.*

(*iii*) *Die symmetrische Bilinearform $E \times E \to K$, $(a, b) \mapsto \mathrm{Tr}_{E/K}(ab)$ ist nicht ausgeartet.*

Beweis. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*): Da $\mathrm{Tr}_{E/K}$ eine Linearform des K-Vektorraums E ist, genügt es, $\mathrm{Tr}_{E/K} \neq 0$ zu zeigen. Sei C ein algebraischer Abschluß von K. Wegen $\mathrm{Tr}_{E/K} = \sum_{\sigma \in \mathrm{Hom}_K(E,C)} \sigma$ nach Satz 5.93 (*i*), folgt dies aus Satz 6.34.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Sei $a \neq 0$. Nach (ii) gibt es ein $c \in E$ mit $\mathrm{Tr}_{E/K}(c) \neq 0$. Mit $b = c/a$ folgt $\mathrm{Tr}_{E/K}(ab) \neq 0$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Ist E/K nicht separabel, so folgt aus Satz 5.93, daß $\mathrm{Tr}_{E/K} = 0$ gilt und die Bilinearform ist ausgeartet. □

6.7 Normalbasen

6.36 Definition. Sei E/K eine endliche Galoiserweiterung und $G = G(E/K)$. Eine K-Basis B von E heißt eine Normalbasis von E/K, wenn B von der Form $B = \{\sigma(a) \mid \sigma \in G\}$ für ein $a \in E$ ist.

6.37 Satz. *Jede endliche Galoiserweiterung E/K besitzt eine Normalbasis.*

Beweis. Für ein Element $a \in E$ mit $\sum_{\sigma \in G} \lambda_\sigma \sigma(a) = 0$ und $\lambda_\sigma \in K$ folgt $\sum_{\sigma \in G} \lambda_\sigma (\tau^{-1}\sigma)(a) = 0$ für alle $\tau \in G$. Es genügt also, ein Element a in E mit $\det(((\tau^{-1}\sigma)(a))_{\tau,\sigma}) \neq 0$ zu finden. Sei $g(t) = m_{b,K}(t)/(t-b) = \prod_{\tau \neq 1}(t - \tau(b))$ für ein primitives Element b von E/K. Genau dann ist $g^\sigma(b) \neq 0$, wenn $\sigma = 1$ ist. Denn für $\sigma = 1$ ist $g^\sigma(b) = g(b) \neq 0$ aufgrund der Separabilität von $m_{b,K}(t)$. Umgekehrt folgt aus $g^\sigma(b) \neq 0$, daß $b \neq \sigma(\tau(b))$ für alle $\tau \neq 1$ gilt, und daraus ergibt sich $\sigma = 1$ wegen $E = K(b)$. Wir betrachten die über $E[t]$ definierte Matrix $M(t) = (g^{\tau^{-1}\sigma}(t))_{\tau,\sigma}$ und $d(t) = \det(M)$. Für $t = b$ ist $M(b)$ eine Diagonalmatrix mit $g(b) \neq 0$ auf der Diagonalen. Daher gilt $d(b) \neq 0$ und folglich $d(t) \neq 0$. Enthält K unendlich viele Elemente, so gibt es ein $c \in K$ mit $d(c) \neq 0$. Wegen $g^{\tau^{-1}\sigma}(c) = (\tau^{-1}\sigma)(g(c))$ erhalten wir mit $a = g(c)$ das gesuchte Element a. Es bleibt der Fall zu behandeln, daß K ein endlicher Körper ist. Dann ist E/K zyklisch. Sei σ ein Erzeuger von $G(E/K)$. Wir betrachten σ als lineare Abbildung des Vektorraums E/K. Es gilt $\sigma^{[E:K]} - 1 = 0$.

Außerdem sind $1, \sigma, \ldots, \sigma^{[E:K]-1}$ nach Satz 6.34 über K linear unabhängig. Daher gilt für das Minimalpolynom $m_{\sigma,K}(t) = t^{[E:K]} - 1$ und wegen $\deg(m_{\sigma,K}(t)) = [E : K]$ ist es auch gleich dem charakteristischen Polynom von σ. Aus der linearen Algebra folgt damit, daß E/K ein σ-zyklischer Vektorraum ist und von einem Element $a \in E$ erzeugt wird. Per Definition liefert a dann eine Normalbasis von E/K. □

6.38 Bemerkung. Die Galoisgruppe operiert auf E, so daß E neben der Struktur eines K-Vektorraums auch die Struktur eines $K[G]$-Moduls besitzt ($(\sum_\sigma \lambda_\sigma \sigma)a = \sum_\sigma \lambda_\sigma \sigma(a)$ für $\lambda_\sigma \in K$ und $a \in E$). Die Aussage von Satz 6.37 besitzt dann die folgende, äquivalente Formulierung: Der $K[G]$-Modul E ist zyklisch.

Neben der theoretischen Bedeutung spielen Normalbasen zum Beispiel in der effizienten Computerarithmetik von endlichen Körpern eine wichtige Rolle.

6.8 Kummertheorie

Im Abschnitt 6.3 haben wir gesehen, daß die Galoisgruppen von einfachen Kummer- und Artin-Schreier-Erweiterungen zyklisch sind. In diesem Abschnitt zeigen wir umgekehrt, daß eine zyklische Erweiterung unter geeigneten Voraussetzungen wie in Abschnitt 6.3 eine einfache Kummer- oder Artin-Schreier-Erweiterung ist. Wir betrachten dafür aber allgemeiner gleich „mehrfache“ Kummer- bzw. Artin-Schreier-Erweiterungen.

Um Kummer- und Artin-Schreier-Erweiterungen gemeinsam behandeln zu können, verwenden wir folgende Abstraktion. Für eine Galoiserweiterung E/K mit Galoisgruppe $G = G(E/K)$ betrachten wir eine Teilmenge $A \subseteq E^m$ mit $m \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$, die eine mit der koordinatenweise Operation von G auf A verträgliche abelsche Gruppenstruktur haben soll. Es soll also $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$ für alle $\sigma \in G$ und $a, b \in A$ gelten, wobei das Gruppengesetz von A multiplikativ geschrieben wird. Wir nennen ein solches A einen G-Modul. Die uns hier im wesentlichen interessierenden Beispiele für A sind $A = E^\times$ und $A = E^+$.

Bezüglich G und A haben wir galoistheoretische Operationen und Normabbildungen. Zu einer Untergruppe H von G definieren wir $A^H = \{x \in A \,|\, \sigma(x) = x \text{ für alle } \sigma \in H\}$. Ist umgekehrt B eine Untergruppe von A, so sei $G_B = \{\sigma \in G \,|\, \sigma(x) = x \text{ für alle } x \in B\}$. Diese Definitionen sind ganz analog zu den Definitionen der Abbildungen $\mathcal{F}_{E/K}$ und $\mathcal{G}_{E/K}$ aus Abschnitt 6.1. Es hängt jedoch von der Wahl von A ab, ob $H \mapsto A^H$ und $B \mapsto G_B$ zueinander invers sind oder nicht. Zumindest gilt beispielsweise immer $G_{\sigma B} = \sigma G_B \sigma^{-1}$. Ist ferner H normal in G, so operieren G/H und G auf A^H in kompatibler Weise und A^H ist ein G/H-Modul.

Um Zwischenkörper von E/K und Untergruppen von A logisch zu verbinden, definieren wir zu einem Zwischenkörper F von E/K die Untergruppe $A_F = A^{\mathcal{G}_{E/K}(F)}$ und umgekehrt zu einer Untergruppe B von A den Zwischenkörper $K(B) = \mathcal{F}_{E/K}(G_B)$. Wegen der Regel $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = \mathrm{id}$ gilt offenbar einerseits $A_F = A \cap F^m$, und andererseits entsteht $K(B)$ durch Adjunktion der in den Koordinaten der Elemente von B vorkommenden Elemente aus E an K. Ist F ein Zwischenkörper von E/K und normal über K, so wird A_F in natürlicher Weise ein $G(F/K)$-Modul.

Für eine Zwischenkörpererweiterung F_2/F_1 von E/K und $x \in A_{F_2}$ definieren wir schließlich $\mathrm{N}_{F_2/F_1}(x) = \prod_{\sigma \in R} \sigma(x)$, wobei R ein Nebenklassenrepräsentantensystem von $\mathcal{G}_{E/K}(F_2)$ in $\mathcal{G}_{E/K}(F_1)$ mit $\mathcal{G}_{E/K}(F_1) = \dot{\bigcup}_{\sigma \in R} \sigma \mathcal{G}_{E/K}(F_2)$ ist. Die Definition hängt nicht von der Wahl von R ab, da A_{F_2} von $\mathcal{G}_{E/K}(F_2)$ fixiert wird. Wir könnten die Norm übrigens auch nur für Untergruppen H_2, H_1 von G ohne einen Bezug zu Körpern definieren. Wegen der galoistheoretischen Äquivalenz von Zwischenkörpern und Untergruppen sind diese Varianten im Endeffekt gleichbedeutend.

6.39 Lemma. *Sei F_2/F_1 eine Zwischenkörpererweiterung der Galoiserweiterung E/K. Dann gilt $\mathrm{N}_{F_2/F_1}(x) \in A_{F_1}$ und die resultierende Abbildung $\mathrm{N}_{F_2/F_1} : A_{F_2} \to A_{F_1}$ ist ein Homomorphismus.*

Ferner gilt $\mathrm{N}_{\tau F_2/\tau F_1}(\tau(x)) = \tau(\mathrm{N}_{F_2/F_1}(x))$ für alle $\tau \in G$ und $x \in F_2$, und $\mathrm{N}_{F_3/F_1} = \mathrm{N}_{F_2/F_1} \circ \mathrm{N}_{F_3/F_2}$ für einen weiteren Zwischenkörper F_3 von E/K mit $F_2 \subseteq F_3$.

Beweis. Wir kürzen $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{E/K}$ ab. Mit R ist auch $R' = \{\tau\sigma \mid \sigma \in R\}$ für jedes $\tau \in \mathcal{G}(F_1)$ ein Nebenklassenrepräsentantensystem von $\mathcal{G}(F_2)$ in $\mathcal{G}(F_1)$. Folglich gilt $\tau(\mathrm{N}_{F_2/F_1}(x)) = \prod_{\sigma\in R} \tau\sigma(x) = \prod_{\sigma\in R'} \sigma(x) = \mathrm{N}_{F_2/F_1}(x)$ und daher $\mathrm{N}_{F_2/F_1}(x) \in A_{F_1}$. Die Homomorphieeigenschaft folgt, da die σ als Endomorphismen auf A_{F_2} operieren.

Für jedes $\tau \in G$ ist das System $R' = \{\tau\sigma\tau^{-1} \mid \sigma \in R\}$ ein Nebenklassenrepräsentantensystem von $\tau\mathcal{G}(F_2)\tau^{-1} = \mathcal{G}(\tau F_2)$ in $\tau\mathcal{G}(F_1)\tau^{-1} = \mathcal{G}(\tau F_1)$. Daraus folgt direkt die Behauptung $\mathrm{N}_{\tau F_2/\tau F_1}(\tau(x)) = \tau(\mathrm{N}_{F_2/F_1}(x))$.

Schließlich seien R_{F_2/F_1} und R_{F_3/F_2} Nebenklassenrepräsentantensysteme von $\mathcal{G}(F_2)$ in $\mathcal{G}(F_1)$ bzw. von $\mathcal{G}(F_3)$ in $\mathcal{G}(F_2)$ wie oben. Dann ist $R_{F_3/F_1} = \{\sigma\tau \mid \sigma \in R_{F_2/F_1}, \tau \in R_{F_3/F_2}\}$ ein Nebenklassenrepräsentantensystem von $\mathcal{G}(F_3)$ in $\mathcal{G}(F_1)$ und es gilt $\mathrm{N}_{F_3/F_1}(x) = \prod_{\sigma,\tau} \sigma(\tau(x)) = \prod_\sigma \sigma(\prod_\tau \tau(x)) = \mathrm{N}_{F_2/F_1}(\mathrm{N}_{F_3/F_2}(x))$. $\square$

Es sei angemerkt, daß die Normabbildung N_{F_2/F_1} nicht von der Galoiserweiterung E/K abhängt. Lemma 6.39 liefert einen zu Satz 5.92 alternativen Beweis für die Transitivität von Spur und Norm.

Sei E/K galoissch, $G = G(E/K)$ und A wie oben ein G-Modul. Durch Untergruppen B von A können wir Zwischenkörper $K(B)$ von E/K definieren und umgekehrt. Wir wollen diesen Prozeß genauer untersuchen, wenn es einen surjektiven G-Homomorphismus $\wp : A \to A$ mit endlichem, zyklischem Kern $\mu_\wp \subseteq A_K$ gibt. G-Homomorphismus bedeutet, daß $\sigma(\wp(a)) = \wp(\sigma(a))$ für alle $\sigma \in G$ und $a \in A$ gilt. Wir setzen $n = \#\mu_\wp$ und machen folgende, axiomatische Annahme:

6.40 Annahme. *Sei F/K eine endliche, zyklische Erweiterung mit $F \subseteq E$ und σ ein Erzeuger von $G(F/K)$. Für $a \in A_F$ gilt $\mathrm{N}_{F/K}(a) = 1$ genau dann, wenn es ein $b \in A_F$ mit $a = b \cdot \sigma(b)^{-1}$ gibt.*

Mit Lemma 6.39 ist klar, daß die Implikation „$\Leftarrow$“ in Annahme 6.40 immer gilt. Wir verwenden Annahme 6.40 nur für den zweiten Teil des nachfolgenden Satzes 6.41.

Für eine Untergruppe $\Delta \subseteq A$ mit $\wp(A_K) \subseteq \Delta$ bezeichnet $\wp^{-1}(\Delta)$ die Menge aller Urbilder der Elemente von Δ unter $\wp$. Wir können daher den Körper $K(\wp^{-1}(\Delta))$ bilden. Ist $B \subseteq \wp^{-1}(\Delta)$ derart, daß $\{\wp(b)\wp(A_K) \mid b \in B\}$ ein Erzeugendensystem von $\Delta/\wp(A_K)$ bildet, so gilt $K(\wp^{-1}(\Delta)) = K(B)$ wegen der Homomorphieeigenschaft von $\wp$ und $\wp^{-1}(\wp(A_K)) = A_K$.

6.41 Satz. *Im folgenden bezeichnet F einen Zwischenkörper von E/K.*

(i) *Sei Δ eine Untergruppe von A_K mit $\wp(A_K) \subseteq \Delta \subseteq A_K$ und $F = K(\wp^{-1}(\Delta))$. Dann ist F/K galoissch und $G(F/K)$ abelsch vom Exponenten n.*

(ii) *Ist umgekehrt F/K eine galoissche Erweiterung mit $G(F/K)$ abelsch vom Exponenten n, so ist $\Delta = \wp(A_F) \cap A_K$ eine Untergruppe von A_K mit $\wp(A_K) \subseteq \Delta \subseteq A_K$ und es gilt $F = K(\wp^{-1}(\Delta))$.*

Beweis. (i): Sei $a \in A_K$ und $b \in A$ mit $\wp(b) = a$. Das Element b ist modulo $\mu_\wp$ definiert und die Erweiterung $K(b)/K$ ist wegen $\mu_\wp \subseteq A_K$ nach Voraussetzung eindeutig durch a bestimmt. Wir nennen $K(b)/K$ eine einfache Kummererweiterung bezüglich $\wp$ und a. Wegen $\wp(\sigma(b)) = \sigma(\wp(b)) = \sigma(a) = a = \wp(b)$ für $\sigma \in G$ gibt es daher für jedes σ ein $\zeta_\sigma \in \mu_\wp$ mit $\sigma(b) = \zeta_\sigma b \in A_{K(b)}$, so daß $K(b)/K$ galoissch ist und $G(K(b)/K)$ durch $\sigma \mapsto \zeta_\sigma$ nach $\mu_\wp$ eingebettet wird. Insbesondere ist $K(b)/K$ demzufolge zyklisch vom Exponenten n.

Sei nun Δ eine Untergruppe von A_K mit $\wp(A_K) \subseteq \Delta \subseteq A_K$ und $F = K(\wp^{-1}(\Delta))$. Wegen $F = \coprod_{b\in\wp^{-1}(\Delta)} K(b)$ ist F/K galoissch mit einer Galoisgruppe, die sich nach $\prod_{b\in\wp^{-1}(\Delta)} \mu_\wp$ einbettet. Diese ist daher abelsch vom Exponenten n.

(ii): Sei umgekehrt F/K abelsch vom Exponenten n. Aufgrund der Definition ist Δ eine Untergruppe von A_K. Da $\wp$ G-linear ist, gilt $\wp(A_K) \subseteq A_K$ und damit $\Delta = \wp(A_F) \cap A_K \supseteq \wp(A_K) \cap A_K = \wp(A_K)$. Außerdem gilt $\wp^{-1}(\Delta) \subseteq \wp^{-1}(\wp(A_F)) = A_F$ wegen $\mu_\wp \subseteq A_K$, woraus sich $K(\wp^{-1}(\Delta)) \subseteq F$ ergibt.

Wir wollen nun $F \subseteq K(\wp^{-1}(\Delta))$ zeigen. Jeder endliche Teilkörper F' von F/K ist ebenfalls abelsch vom Exponenten n über K. Da F das Kompositum solcher endlicher Teilerweiterungen ist, genügt es zu zeigen, daß $F' \subseteq K(\wp^{-1}(\Delta))$ gilt.

Die Galoisgruppe $G(F'/K)$ läßt sich in ein Produkt $\prod_{i\in I} \mu_\wp$ für eine endliche Indexmenge I einbetten. Wir definieren den Kern der Komposition dieser Einbettung mit der i-ten Projektion $\prod_{i\in I} \mu_\wp \to \mu_\wp$ als H_i und setzen $F'_i = \mathcal{F}_{F'/K}(H_i)$. Wegen $\cap_i H_i = \{1\}$ und $[F' : K] < \infty$ gilt $F' = \coprod_i F'_i$ nach Satz 6.10, (ii), so daß wir nun nur noch $F'_i \subseteq K(\wp^{-1}(\Delta))$ für alle $i \in I$ zeigen müssen.

Sei $i \in I$ beliebig. Die Erweiterung F'_i/K ist galoissch und $G(F'_i/K) \cong G(F'/K)/H_i$ bettet sich nach $\mu_\wp$ ein, so daß F'_i/K insbesondere zyklisch ist. Sei σ ein Erzeuger von $G(F'_i/K)$ und $\zeta_\sigma \in \mu_\wp$ ein Element der Ordnung $[F'_i : K]$. Dann gilt $\mathrm{N}_{F'_i/K}(\zeta_\sigma) = \zeta_\sigma^{[F'_i:K]} = 1$ und aufgrund der Annahme 6.40 gibt es ein $b \in A_{F'_i}$ mit $\sigma(b) = \zeta_\sigma b$. Da ζ_σ die Ordnung $[F'_i : K]$ besitzt, gilt $\mathcal{G}_{F'_i/K}(K(b)) = \{1\}$ und somit $F'_i = K(b)$. Außerdem ist $\sigma(\wp(b)) = \wp(\sigma(b)) = \wp(\zeta_\sigma b) = \wp(b)$ und folglich $\wp(b) \in \wp(A_F) \cap A_K = \Delta$. Daraus ergibt sich $b \in \wp^{-1}(\Delta)$ und $F'_i = K(b) \subseteq K(\wp^{-1}(\Delta))$. □

Für den Hauptsatz dieses Abschnitts benötigen wir noch eine allgemeine Aussage. Seien C und D abelsche Gruppen. Eine Paarung von C und D in die additive Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist eine in beiden Argumenten homomorphe Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : C \times D \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Eine Paarung definiert (und wird definiert durch) Homomorphismen $\iota_1 : C \to \operatorname{Hom}(D, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ bzw. $\iota_2 : D \to \operatorname{Hom}(C, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ und heißt nicht ausgeartet, wenn ι_1 und ι_2 injektiv sind.

6.42 Lemma. *Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle : C \times D \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ eine nicht ausgeartete Paarung. Dann besitzen C und D den Exponenten n und es gilt $\#C = \#D$. Gilt zusätzlich $\#C < \infty$, so sind die Monomorphismen $\iota_1 : C \to \operatorname{Hom}(D, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ und $\iota_2 : D \to \operatorname{Hom}(C, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ Isomorphismen und es gibt eine (nicht kanonische) Isomorphie $C \cong D$.*

Beweis. Übung. $\square$

Für $C = \coprod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $D = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ liefert $((a_i)_i, (b_i)_i) \mapsto \sum_i a_i b_i$ eine nicht ausgeartete Paarung $C \times D \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Hier gilt $\operatorname{Hom}(C, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \operatorname{Hom}(D, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong D \ncong C$.

6.43 Satz. *Die Zuordnung*

$$\Delta \mapsto F = K(\wp^{-1}(\Delta))$$

ist eine inklusionserhaltende Bijektion zwischen den Untergruppen Δ von A_K mit $\wp(A_K) \subseteq \Delta \subseteq A_K$ und den abelschen Erweiterungen F/K vom Exponenten n in E mit der inversen Bijektion

$$F \mapsto \Delta = \wp(A_F) \cap A_K.$$

Weiter gilt $[F : K] = (\Delta : \wp(A_K))$ und $\Delta/\wp(A_K)$ besitzt den Exponenten n.

Sind Δ und F einander zugeordnet, gibt es eine kanonische, nicht ausgeartete Paarung

$$G(F/K) \times \Delta/\wp(A_K) \to \mu_\wp,$$

welche $(\sigma, a\wp(A_K))$ auf $b/\sigma(b)$ für $b \in \wp^{-1}(a)$ abbildet. Für $[F : K] = (\Delta : \wp(A_K)) < \infty$ liefert die Paarung die Isomorphismen

$$G(F/K) \cong \operatorname{Hom}(\Delta/\wp(A_K), \mu_\wp), \quad \Delta/\wp(A_K) \cong \operatorname{Hom}(G(F/K), \mu_\wp).$$

Beweis. Die Wohldefiniertheit und Homomorphieeigenschaft der Paarung in beiden Argumenten folgen im wesentlichen aus der Definition von $\wp$: Sei Δ eine Untergruppe von A_K mit $\wp(A_K) \subseteq \Delta \subseteq A_K$, $F = K(\wp^{-1}(\Delta))$, $a \in \Delta$ und

$\sigma \in G(F/K)$. Da $\wp : A \to A$ surjektiv ist, gibt es zunächst einmal überhaupt ein $b \in \wp^{-1}(a) \subseteq A_F$, mit dem die Paarung definiert werden kann. Außdem gilt $\wp(b/\sigma(b)) = \wp(b)/\sigma(\wp(b)) = a/\sigma(a) = 1$, also $b/\sigma(b) \in \mu_\wp$. Zu $b' \in \wp^{-1}(a\wp(c)) = \wp^{-1}(a)c$ mit $c \in A_K$ gibt es $\zeta \in \mu_\wp \subseteq A_K$ mit $b' = \zeta bc$. Daraus folgt $b'/\sigma(b') = (\zeta bc)/(\zeta\sigma(b)c) = b/\sigma(b)$ und die Paarung ist wohldefiniert. Zu $a_1, a_2 \in \Delta$ gibt es $b_i \in \wp^{-1}(a_i)$. Dann gilt $b_1b_2 \in \wp^{-1}(a_1a_2)$ und $(b_1b_2)/\sigma(b_1b_2) = (b_1/\sigma(b_1))(b_2/\sigma(b_2))$, also die Homomorphieeigenschaft im rechten Argument der Paarung. Für $\sigma_1, \sigma_2 \in G(F/K)$ gilt $b/\sigma_1(\sigma_2(b)) = (b/\sigma_2(b))(\sigma_2(b)/\sigma_1(\sigma_2(b))) = (b/\sigma_2(b))\sigma_2(b/\sigma_1(b)) = (b/\sigma_2(b))(b/\sigma_1(b))$, weil die Galoisgruppe $G(F/K)$ abelsch ist und $b/\sigma_1(b) \in \mu_\wp \subseteq A_K$ gilt. Dies ergibt die Homomorphieeigenschaft im linken Argument.

Wir zeigen nun, daß die Paarung nicht ausgeartet ist. Gilt $b/\sigma(b) = 1$ für alle $\sigma \in G(F/K)$, so folgt $b \in A_K$. Damit ist $a \in \wp(A_K)$ und die Paarung ist im rechten Argument nicht ausgeartet. Sei $\sigma \in G$. Gilt dann $b/\sigma(b) = 1$ für $b \in \wp^{-1}(a)$ und alle $a \in \Delta$, so folgt $\sigma \in G_{\wp^{-1}(\Delta)} = \mathcal{G}_{E/K}(F)$. Somit ist σ auf F die Identität und die Paarung im linken Argument nicht ausgeartet.

Da die Paarung nicht ausgeartet ist, können wir Lemma 6.42 anwenden. Es ergibt sich, daß $[F : K] = \#G(F/K) = \#(\Delta/\wp(A_K)) = (\Delta : \wp(A_K))$ gilt und $\Delta/\wp(A_K)$ den Exponenten n besitzt. Für $(\Delta : \wp(A_K)) < \infty$ ergeben sich außerdem die Isomorphieen $G(F/K) \cong \mathrm{Hom}(\Delta/\wp(A_K), \mu_\wp)$ und $\Delta/\wp(A_K) \cong \mathrm{Hom}(G(F/K), \mu_\wp)$.

Wir beweisen nun die Injektivität der Abbildung $\Delta \mapsto F$. Seien Δ_1, Δ_2 mit $F = K(\wp^{-1}(\Delta_1)) = K(\wp^{-1}(\Delta_2))$ und sei $a \in \Delta_1$. Wir wollen $a \in \Delta_2$ zeigen. Wegen $K(\wp^{-1}(a)) \subseteq K(\wp^{-1}(\Delta_1)) = K(\wp^{-1}(\Delta_2))$ und $\#\wp^{-1}(a) < \infty$ gibt es eine endliche Menge $S \subseteq \wp^{-1}(\Delta_2)$ mit $K(\wp^{-1}(a)) \subseteq K(S)$. Sei $\Delta_a = \langle\wp(S)\rangle\wp(A_K)$ die von $\wp(S)$ und $\wp(A_K)$ erzeugte Untergruppe von Δ_2. Wegen der Homomorphieeigenschaft von $\wp$ und $\mu_\wp \subseteq A_K$ gilt dann auch $K(\wp^{-1}(a)) \subseteq K(\wp^{-1}(\Delta_a)) = K(S)$. Da $\#\wp(S) < \infty$ und $\Delta_2/\wp(A_K)$ den Exponenten n besitzt, gilt $\#(\Delta_a/\wp(A_K)) < \infty$. Aus $K(\wp^{-1}(a)) \subseteq K(\wp^{-1}(\Delta_a))$ ergibt sich $K(\wp^{-1}(\langle a\rangle\Delta_a)) = K(\wp^{-1}(\Delta_a))$, wobei $\langle a\rangle\Delta_a$ die von a und Δ_a erzeugte Untergruppe von A_K bezeichnet. Nach der bereits bewiesenen Gleicheit von Körpergrad und Gruppenindex ergibt sich $(\langle a\rangle\Delta_a : \wp(A_K)) = [K(\wp^{-1}(\langle a\rangle\Delta_a)) : K] = [K(\wp^{-1}(\Delta_a)) : K] = (\Delta_a : \wp(A_K))$. Wegen $(\Delta_a : \wp(A_K)) < \infty$ und $\Delta_a \subseteq \langle a\rangle\Delta_a$ folgt $\Delta_a = \langle a\rangle\Delta_a$, also $a \in \Delta_a \subseteq \Delta_2$. Da a beliebig war, folgt $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$. Analog ergibt sich $\Delta_2 \subseteq \Delta_1$, so daß $\Delta_1 = \Delta_2$ folgt und die Abbildung $\Delta \mapsto F$ injektiv ist.

Die Surjektivität der Abbildung $\Delta \mapsto F$ und die Ausssage über die inverse Abbildung folgt direkt aus Satz 6.41, *(ii)*. □

Die Paarung von Satz 6.43 wird Kummerpaarung genannt. Ist L/K eine Erweiterung von K, so können wir die Translation $L(\wp^{-1}(\Delta))/L$ der Erweiterung

$K(\wp^{-1}(\Delta))/K$ betrachten. Diese ist nach Satz 6.15 wieder abelsch vom Exponenten n und gehört zur von Δ in $A_L/\wp(A_L)$ erzeugten Untergruppe $\Delta_L = \Delta\wp(A_L)/\wp(A_L) \cong \Delta/(\Delta \cap \wp(A_L))$. Ähnlich gilt für Komposita und Schnitte, daß $K(\wp^{-1}(\Delta_1))K(\wp^{-1}(\Delta_2))/K$ zu $\Delta_1\Delta_2$ und $K(\wp^{-1}(\Delta_1)) \cap K(\wp^{-1}(\Delta_2))/K$ zu $\Delta_1 \cap \Delta_2$ gehören.

Wir spezialisieren obige Theorie nun auf die Fälle $A = E^\times$ und $A = E^+$, wo E den separablen Abschluß von K bezeichnet. Im ersten Fall betrachten wir $\wp : A \mapsto A, x \mapsto x^n$, wobei $\mathrm{char}(K) = 0$ oder $\gcd(\mathrm{char}(K), n) = 1$ gelte. Wir müssen $\mu_\wp \subseteq A_K$, also $\mu_n \subseteq K^\times$ voraussetzen. Die Erweiterungen $K(\wp^{-1}(\Delta))/K$ entstehen dann also durch Adjunktion aller n-ter Wurzeln der Elemente in Δ an K und werden Kummererweiterungen genannt. Im zweiten Fall betrachten wir den Artin-Schreier Operator $\wp : A \mapsto A, x \mapsto x^p - x$, wobei $p = \mathrm{char}(K) > 0$ gelte. Hier ist $\mu_\wp \subseteq A_K$, also $\mathbb{F}_p^+ \subseteq K^+$ automatisch erfüllt. Die Erweiterungen $K(\wp^{-1}(\Delta))/K$ enstehen also durch Adjunktion aller Nullstellen der Polynome $t^p - t - a$ für $a \in \Delta$ an K und werden Artin-Schreier Erweiterungen genannt. Für diese beiden Fälle gilt die Annahme 6.40:

6.44 Satz (Hilbert 90)**.** *Sei F/K eine endliche, zyklische Erweiterung und σ ein Erzeuger von $G(F/K)$.*

(*i*) *Für $a \in F^\times$ gilt $\mathrm{N}_{F/K}(a) = 1$ genau dann, wenn es ein $b \in F^\times$ mit $a = b \cdot \sigma(b)^{-1}$ gibt.*

(*ii*) *Für $a \in F^+$ gilt $\mathrm{Tr}_{F/K}(a) = 0$ genau dann, wenn es ein $b \in F^+$ mit $a = b - \sigma(b)$ gibt.*

Beweis. $(i), \Leftarrow$: Es gilt $\mathrm{N}_{F/K}(a) = \mathrm{N}_{F/K}(b)/\mathrm{N}_{F/K}(\sigma(b)) = 1$ nach Lemma 6.39. $(i), \Rightarrow$: Wir setzen $n = [F : K]$. Die durch

$$\sigma^0 + a\sigma^1 + a\sigma(a)\sigma^2 + \cdots + a\sigma(a)\cdots\sigma^{n-2}(a)\sigma^{n-1}$$

definierte Abbildung $F^\times \to F$ ist nach Satz 6.34 nicht die Nullabbildung. Daher gibt es ein $c \in F$, so daß

$$b := \sigma^0(c) + a\sigma^1(c) + a\sigma(a)\sigma^2(c) + \cdots + a\sigma(a)\cdots\sigma^{n-2}(a)\sigma^{n-1}(c) \neq 0$$

ist. Anwenden von σ und Multiplikation mit a ergibt

$$a\sigma(b) = a\sigma^1(c) + a\sigma(a)\sigma^2(c) + \cdots + a\sigma(a)\cdots\sigma^{n-1}(a)\sigma^n(c) = b,$$

da $\sigma^n = 1$ und $a\sigma(a)\cdots\sigma^{n-1}(a) = \mathrm{N}_{F/K}(a) = 1$ nach Voraussetzung gilt.

(*ii*): Kann ähnlich wie (*i*) bewiesen werden. Ist $c \in F$ mit $\mathrm{Tr}_{F/K}(c) \neq 0$ so erfüllt

$$b = \frac{1}{\mathrm{Tr}_{F/K}(c)}\big(a\sigma^1(c) + (a+\sigma(a))\sigma^2(c) + \dots \\ + (a+\sigma(a)+\dots+\sigma^{n-2}(a))\sigma^{n-1}(c)\big)$$

die Bedingung $a = b - \sigma(b)$. □

Genauer bezeichnet man eigentlich nur Teil (*i*) als Satz Hilbert 90. Als Beispiel betrachten wir die aufsteigende Folge von Primzahlen $p_1, \dots, p_m$, $K = \mathbb{Q}$, $A_K = \mathbb{Q}^\times$, $\wp(x) = x^2$, $n = 2$, $\mu_2 = \{-1, 1\}$ und die von den p_i und den Quadraten $\mathbb{Q}^{\times 2}$ erzeugte Untergruppe Δ von $\mathbb{Q}^\times$. Da die p_i die Gruppe $\Delta/\mathbb{Q}^{\times 2}$ erzeugen, gilt $F = K(\wp^{-1}(\Delta)) = K(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_m})$. Da die p_i multiplikativ unabhängig sind, gilt $\Delta/\mathbb{Q}^{\times 2} \cong \langle p_1, \dots, p_m\rangle/(\langle p_1, \dots, p_m\rangle \cap \mathbb{Q}^{\times 2}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$. Daraus folgt $G(F/K) \cong \mathrm{Hom}(\Delta/\mathbb{Q}^{\times 2}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$.

6.45 Korollar. *Sei F/K eine algebraische Körpererweiterung und $p = \mathrm{char}(K)$.*

(*i*) *Es gelte $p = 0$ oder $\gcd(p, n) = 1$, und K enthalte die n-ten Einheitswurzeln. Dann ist F/K genau dann zyklisch vom Exponenten n, wenn $F = K(b)$ mit $b^n \in K$ gilt.*

(*ii*) *Es gelte $p > 0$. Dann ist F/K genau dann zyklisch vom Exponenten p, wenn $F = K(b)$ mit $b^p - b \in K$ gilt.*

Beweis. Ist der einfachste Fall in Satz 6.43. Für die Richtung „$\Leftarrow$“ setzen wir $a = \wp(b)$ und $\Delta = \langle a\rangle\wp(A_K)$ und erhalten $F = K(b) = K(\wp^{-1}(\Delta))$. Da $\Delta/\wp(A_K)$ zyklisch ist, muß auch $G(F/K) \cong \mathrm{Hom}(\Delta/\wp(A_K), \mu_\wp)$ zyklisch sein. Für die Richtung „$\Rightarrow$“ sei F/K zyklisch und $\Delta = \wp(A_F) \cap A_K$. Dann ist $\Delta/\wp(A_K) \cong \mathrm{Hom}(G(F/K), \mu_\wp)$ zyklisch. Also gibt es $a \in A_K$ mit $\Delta = \langle a\rangle\wp(A_K)$ und mit $b \in \wp^{-1}(a)$ gilt $F = K(\wp^{-1}(\Delta)) = K(b)$.

Ist ζ eine Einheitswurzel der genauen Ordnung $[F : K]$, so ist das gesuchte Element b im übrigen das Element b zu $a = \zeta$ aus Satz 6.44. □

Abschließend sei bemerkt, daß man für die Betrachtung von abelschen Erweiterungen vom Exponenten p^r in Charakteristik $p > 0$ den G-Modul A als die additive Gruppe des Rings der Wittvektoren der Länge r über K wählt. Eine abelsche Erweiterung F/K eines beliebigen Exponenten $n = n_1 p^r$ mit $\gcd(n_1, p^r) = 1$ und $p = \mathrm{char}(K)$ kann damit auf eine abelsche Erweiterung F_1/K vom Exponenten n_1 und eine dazu linear disjunkte abelsche Erweiterung F_2/K vom Exponenten p^r mit $F = F_1F_2$ zurückgeführt werden.

Ergänzung

Die Isomorphieen in Satz 6.43 gelten zum Teil auch ohne die Voraussetzung $(\Delta : \wp(A_K)) < \infty$. Dies soll hier noch nachgetragen werden. Wir benötigen dazu eine Verschärfung von Lemma 6.42.

Seien C und D abelsche Gruppen und $\langle\cdot,\cdot\rangle : C \times D \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ eine Paarung. Für Untergruppen U von C und V von D definieren wir Abbildungen $\phi_1 : U \mapsto V = \{d \in D \,|\, \langle U, d\rangle = \{0\}\}$ und $\phi_2 : V \mapsto U = \{c \in C \,|\, \langle c, V\rangle = \{0\}\}$. Die Abbildungen ϕ_1 und ϕ_2 erfüllen analoge Eigenschaften wie $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ in Abschnitt 6.1. Das folgende Lemma kann als eine Art „Galoistheorie" aufgefaßt werden.

6.46 Lemma. *Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle : D \times C \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ eine nicht ausgeartete Paarung.*

(*i*) *Es gilt $\#U = \#D/\phi_1(U)$ und $\#V = \#C/\phi_2(V)$ für alle Untergruppen U von C und V von D.*

(*ii*) *Der Homomorphismus $\iota_2 : D \to \mathrm{Hom}(C, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ ist ein Monomorphismus, dessen Bild aus allen $h \in \mathrm{Hom}(C, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ besteht, für die es eine Untergruppe V von D mit $\ker(h) = \phi_2(V)$ gibt. Analoges gilt für ι_1.*

Für jede Untergruppe V von D und $d \in D$ mit $\phi_2(V) \subseteq \phi_2(\langle d\rangle)$ gebe es nun eine endliche Untergruppe $V_0 \subseteq V$ mit $\phi_2(V_0) \subseteq \phi_2(\langle d\rangle)$. Dann gilt weiter:

(*iii*) *Die Abbildung $\phi_1 \circ \phi_2$ ist die Identität auf der Menge der Untergruppen von D.*

(*iv*) *Der Homomorphismus $\iota_1 : C \to \mathrm{Hom}(D, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. (*i*): Ist U eine Untergruppe von C so erhalten wir aus $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine Paarung $U \times D/\phi_1(U) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Nach Vorausetzung ist die linke zugehörige Abbildung $U \to \mathrm{Hom}(D/\phi_1(U), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ injektiv. Außerdem hat die rechte Abbildung $D \to \mathrm{Hom}(U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ den Kern $\phi_1(U)$, so daß $D/\phi_1(U) \to \mathrm{Hom}(U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ ebenfalls injektiv ist. Die Paarung ist also nicht entartet. Nach Lemma 6.42 gilt also $\#U = \#D/\phi_1(U)$. Analoges gilt für Untergruppen V von D und $C/\phi_2(V)$.

(*ii*): Für $d \in D$ gilt $\ker(\iota_2(d)) = \phi_2(\langle d\rangle)$. Daher besteht das Bild von ι_2 nur aus Elementen der angegebenen Form. Sei umgekehrt $h \in \mathrm{Hom}(C, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ beliebig und $\ker(h) = \phi_2(V)$. Fassen wir die Gruppe $\mathrm{Hom}(C/\phi_2(V), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ mittels Zurückziehung als Untergruppe von $\mathrm{Hom}(C, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ auf, so gilt $h \in \mathrm{Hom}(C/\phi_2(V), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Da die eingeschränkte Paarung $C/\phi_2(V) \times V \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nach (*i*) nicht ausgeartet ist und $\#V = \#C/\phi_2(V) < \infty$ gilt, liefert die Einschränkung von ι_2 auf V eine Isomorphie $V \cong \mathrm{Hom}(C/\phi_2(V), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Also gibt es ein Urbild $d \in V$ von h unter ι_2 in D.

(iii): Man sieht wie bei $\mathcal{G}$ und $\mathcal{F}$ leicht, daß $\phi_2 \circ \phi_1 \circ \phi_2 = \phi_2$ gilt. Ist ϕ_2 injektiv, ergibt sich daraus $\phi_1 \circ \phi_2 = \mathrm{id}$. Zum Beweis der Injektivität von ϕ_2 seien V und V' Untergruppen von D mit $\phi_2(V) = \phi_2(V')$. Sei $d \in V'$. Wir wollen $d \in V$ zeigen.

Es gilt $\phi_2(V) = \phi_2(V') \subseteq \phi_2(\langle d \rangle)$. Nach Voraussetzung gibt es eine endliche Untergruppe V_0 von V mit $\phi_2(V_0) \subseteq \phi_2(\langle d \rangle)$. Dann gilt $\phi_2(V_0) = \phi_2(V_0 + \langle d \rangle)$. Wir wenden ($i$) für $V = V_0$ und $V = V_0 + \langle d \rangle$ an und erhalten $\#V_0 = \#C/\phi_2(V_0) = \#C/\phi_2(V_0 + \langle d \rangle) = \#(V_0 + \langle d \rangle)$. Wegen $\#V_0 < \infty$ und $V_0 \subseteq V_0 + \langle d \rangle$ ergibt sich daraus $V_0 = V_0 + \langle d \rangle$ und $d \in V_0 \subseteq V$. Da d beliebig war, folgt $V' \subseteq V$. Analog ergibt sich $V \subseteq V'$ und damit $V = V'$.

(iv). Die Aussage in (ii) gilt analog auch für ι_1. Jede Untergruppe V von D ist aber von der Form $\phi_1(U)$ für eine Untergruppe U von C. Definiere nämlich $U = \phi_2(V)$. Nach (iii) gilt dann $\phi_1(U) = \phi_1(\phi_2(V)) = V$. Also ist ι_1 surjektiv. □

6.47 Satz. *Sei Δ eine Untergruppe von A_K mit $\wp(A_K) \subseteq \Delta \subseteq A_K$ und $F = K(\wp^{-1}(\Delta))$. Die Kummerpaarung liefert Isomorphismen*

$$G(F/K) \cong \mathrm{Hom}(\Delta/\wp(A_K), \mu_\wp), \quad \Delta/\wp(A_K) \cong \mathrm{Hom}_a(G(F/K), \mu_\wp),$$

wobei $\mathrm{Hom}_a(G(F/K), \mu_\wp)$ die Gruppe der Homomorphismen mit abgeschlossenem Kern bezeichnet.

Beweis. Sei $E = K(\wp^{-1}(A_K))$. Wir bezeichnen die zugehörige Kummerpaarung mit $\langle \cdot, \cdot \rangle : G(E/K) \times A_K/\wp(A_K) \to \mu_\wp$. Nach Satz 6.43 existert diese und ist nicht ausgeartet. Außerdem ist die Bedingung von Lemma 6.46 an $D = A_K/\wp(A_K)$ nach dem Beweis von Satz 6.43 erfüllt.

Seien $\phi_1 : H \mapsto \Delta/\wp(A_K)$ und $\phi_2 : \Delta/\wp(A_K) \mapsto H$ die Abbildungen der Untergruppen wie in Lemma 6.46. Seien $\psi_2 : \Delta/\wp(A_K) \mapsto F$ und $\psi_1 : F \mapsto \Delta/\wp(A_K)$ die Abbildungen wie in Satz 6.43.

Sei $B \subseteq A$ beliebig. Wegen $K(B) = \mathcal{F}_{E/K}(G_B)$ gilt $\psi_2 = \mathcal{F}_{E/K} \circ \phi_2$. Wegen $G_B = \mathcal{G}_{L/K}(K(B))$ gilt $\phi_2 = \mathcal{G}_{E/K} \circ \psi_2$. Damit sind die Bilder von ϕ_2 abgeschlossene Untergruppen von $G(E/K)$. Aus Lemma 6.46, (iii) erhalten wir daher, daß $\psi_2 = \mathcal{F}_{E/K} \circ \phi_2$ die inverse Abbildung $\phi_1 \circ \mathcal{G}_{L/K}$ besitzt, also injektiv ist. Aus Lemma 6.46, (i) erhalten wir, daß $[K(\wp^{-1}(\Delta)) : K] = (\Delta : \wp(A_K))$ gilt. Nach Satz 6.41, (ii) ist ψ_1 die inverse Abbildung von ψ_2 und ψ_2 ist surjektiv.

Nach Lemma 6.46, (iv) und (ii) gilt $G(F/K) \cong \mathrm{Hom}(\Delta/\wp(A_K), \mu_\wp)$ und $\Delta/\wp(A_K) \cong \mathrm{Hom}_a(G(F/K), \mu_\wp)$. Für die zweite Isomorphie muß man noch beachten, daß der Kern H eines Elements in $\mathrm{Hom}_a(G(F/K), \mu_\wp)$ abgeschlossen ist und somit eine endliche, abelsche Erweiterung $L = \mathcal{F}_{F/K}(M)$ vom Exponenten n von K definiert. Da $\psi_2 = \mathcal{F}_{L/K} \circ \phi_2$ surjektiv und $\mathcal{F}_{F/K}$ auf der Menge der abgeschlossenen Untergruppen von $G(F/K)$ injektiv ist, gehört L zu einem Δ mit

$\phi_2(\Delta/\wp(A_K)) = H$. Außerdem ergibt sich, daß $\mathrm{Hom}_a(G(F/K), \mu_\wp)$ tatsächlich eine Gruppe ist. $\square$

Wählt man $K = \mathbb{Q}$, p_i die i-te Primzahl und $\Delta = \langle p_1, p_2, \dots\rangle \mathbb{Q}^{\times 2}$, so gilt $\Delta/\mathbb{Q}^{\times 2} \cong \coprod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $G(\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots)/\mathbb{Q}) \cong \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nach der ersten Isomorphie in Satz 6.47. In diesem Fall dürfen für die zweite Isomorphie in Satz 6.47 wirklich nur Homomorphismen mit abgeschlossenen Kern betrachtet werden, wie das Beispiel nach Lemma 6.42 zeigt.

6.9 Auflösbarkeit durch Radikale

6.48 Definition. Eine endliche Körpererweiterung E/K heißt eine Radikalerweiterung, wenn es Körper E_i mit $K = E_0 \subseteq \cdots \subseteq E_m = E$ gibt, so daß E_{i+1}/E_i von der folgenden Gestalt ist.

(*i*) E_{i+1} entsteht aus E_i durch Adjunktion einer Einheitswurzel.

(*ii*) E_{i+1} entsteht aus E_i durch Adjunktion einer Nullstelle von $t^n - a$ für $a \in E_i$ und n teilerfremd zur Charakteristik.

(*iii*) E_{i+1} entsteht aus E_i durch Adjunktion einer Nullstelle von $t^p - t - a$ für $a \in E_i$ und $p = \mathrm{char}(K) > 0$.

Eine endliche Körpererweiterung F/K heißt durch Radikale auflösbar, wenn F ein Zwischenkörper einer Radikalerweiterung E/K ist.

In einer durch Radikale auflösbaren Erweiterung E/K läßt sich jedes Element als „Wurzelausdruck" schreiben. Eine durch Radikale auflösbare Erweiterung E/K ist separabel. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß n in (*ii*) eine Primzahl ist.

Das folgende Lemma zeigt, daß sich die Eigenschaft „durch Radikale auflösbar" analog zu den Eigenschaften „algebraisch", „normal" usw. verhält.

6.49 Lemma. *Die Erweiterung E/K ist genau dann durch Radikale auflösbar, wenn E/F und F/K für jeden Zwischenkörper F von E/K durch Radikale auflösbar ist.*

Sind E, L Zwischenkörper einer Erweiterung C/K und E/K durch Radikale auflösbar, so ist auch EL/L durch Radikale auflösbar.

Sind E_1, E_2 Zwischenkörper in C/K und über K durch Radikale auflösbar, so ist E_1E_2/K durch Radikale auflösbar.

Beweis. Folgt ziemlich direkt aus der Definition. $\square$

Sei E/K eine galoissche Radikalerweiterung mit $G = G(E(K)$, $\mu_{\#G}(K^a) \subseteq K$, den Zwischenkörpern E_i wie oben und $G_i = \mathcal{G}_{E/K}(E_i)$. Dann gilt $G = G_0 \geq \cdots \geq G_m = \{1\}$. Die Erweiterungen E_{i+1}/E_i sind nach Korollar 6.45 zyklisch von Primzahlgrad, daher sind auch die G_{i+1} normal in G_i und $G_i/G_{i+1} \cong G(E_{i+1}/E_i)$ ist zyklisch mit Primzahlordnung $[E_{i+1} : E_i]$. Diese Eigenschaft nimmt man zum Anlaß der folgenden Definition.

Eine endliche Gruppe G heißt auflösbar, wenn es Untergruppen G_i gibt, so daß $G = G_0 \geq \cdots \geq G_m = \{1\}$, G_{i+1} normal in G_i und G_i/G_{i+1} zyklisch von Primzahlordnung ist. Die G_i heißen eine Kompositionsreihe von G.

6.50 Satz. *Sei G eine endliche Gruppe.*

(*i*) *Ist G auflösbar, so ist auch jede Untergruppen und jede Faktorgruppe von G auflösbar.*

(*ii*) *Ist $N \leq G$ ein Normalteiler und sind N und G/N auflösbar, so ist G auflösbar.*

(*iii*) *Abelsche Gruppen G und p-Gruppen G sind auflösbar.*

(*iv*) *Die alternierende Gruppe A_n ist auflösbar für $n \leq 4$ und ist nicht auflösbar für $n \geq 5$.*

Beweis. (*i*): Ist G_i eine Kompositionsreihe von G, so liefern $G_i \cap U$ und G_iN/N nach Auslassung von Wiederholungen Kompositionsreihen von U und G/N: Für $G_i \cap U$ gilt $G_0 \cap U = U$, $G_m \cap U = \{1\}$ und nach dem Homomorphiesatz gibt es einen Monomorphismus $(G_i \cap U)/(G_{i+1} \cap U) \to G_i/G_{i+1}$, so daß $(G_i \cap U)/(G_{i+1} \cap U)$ zyklisch von Primzahlordnung oder trivial ist. Für G_iN/N gilt $G_0N/N = G/N$, $G_mN/N = \{1\}$ und es gibt einen Epimorphismus $G_i/G_{i+1} \to (G_iN/N)/(G_{i+1}N/N)$, so daß $(G_iN/N)/(G_{i+1}N/N)$ abermals zyklisch von Primzahlordnung oder trivial ist. Den Epimorphimus erhalten wir wie folgt: Wir starten mit dem kanonischen Epimorphismus $G_i \to G_i/(G_i \cap N)$ und verlängern mit dem Isomorphismus aus dem ersten Isomorphiesatz zum Epimorphismus $G_i \to G_iN/N$. Diesen verlängern wir mit dem kanonischen Epimorphismus $G_iN/N \to (G_iN/N)/(G_{i+1}N/N)$ zum Epimorphismus $G_i \to (G_iN/N)/(G_{i+1}N/N)$. Der Kern umfaßt G_{i+1}, so daß wir nach dem Homomorphiesatz den Epimorphismus $G_i/G_{i+1} \to (G_iN/N)/(G_{i+1}N/N)$ erhalten.

(*ii*): Wir liften die Kompositionsreihe von G/N durch Urbildbildung unter dem kanonischen Epimorphimus $G \to G/N$ nach G und hängen die Kompositionsreihe von N an. Dies liefert eine Kompositionsreihe von G.

(*iii*): Die Aussage für abelsche Gruppen ist nach dem Hauptsatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen klar. Für die Aussage für p-Gruppen G beachten wir, daß das Zentrum $Z(G)$ nicht-trivial ist. Induktiv ist dann $G/Z(G)$ als echt kleinere p-Gruppe und $Z(G)$ als abelsche Gruppe auflösbar. Nach (ii) ist damit G auflösbar.

(iv): Die Gruppen A_1, A_2 und A_3 sind zyklisch und daher auflösbar. Die Gruppe A_4 ist nach den Sylowsätzen semidirektes Produkt einer abelschen Gruppe der Ordnung 4 und einer abelschen Gruppe der Ordnung 3 und somit auflösbar (vgl. die Aufgabe aus der Algebra 1, es gilt $A_4 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Die Gruppe A_5 ist nach einer Übung in der Algebra 1 einfach, aber nicht abelsch, und daher nicht auflösbar. □

Wegen $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und Satz 6.50, (i) und (ii) gilt (iv) auch für S_n anstelle von A_n.

Nach dem Satz von Burnside sind alle endlichen Gruppen der Ordnung $p^a q^b$ mit Primzahlen p, q und $a, b \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ auflösbar. Nach dem Satz von Feit-Thompson sind alle endlichen Gruppen ungerader Ordnung auflösbar.

Durch Radikale auflösbare Erweiterungen lassen sich galoistheoretisch wie folgt klassifizieren.

6.51 Satz. *Eine endliche, separable Körpererweiterung F/K ist genau dann durch Radikale auflösbar, wenn die Galoisgruppe $G(F'/K)$ der normalen Hülle F' von F/K auflösbar ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Wir können F/K und F'/K in eine normale Radikalerweiterung E'/K wie folgt einbetten. Wir betrachten die beteiligten Körper als Teilkörper eines algebraischen Abschluß C. Sei E/K eine Radikalerweiterung mit $F \subseteq E$. Für die normale Hülle E' von E gilt $E' = \coprod_{\sigma \in \mathrm{Hom}_K(E,C)} \sigma(E)$, und mit jedem $\sigma(E)/K$ ist auch E'/K eine Radikalerweiterung. Also ist E'/K eine galoissche Radikalerweiterung mit $F' \subseteq E'$. Wir werden zeigen, daß $G(E'/K)$ auflösbar ist. Da $G(F'/K) \cong G(E'/K)/G(E'/F')$ gilt, ist $G(F'/K)$ als Faktorgruppe einer auflösbaren Gruppe auflösbar.

Sei n der zu $\mathrm{char}(K)$ teilerfremde Faktor von $[E' : K]$ und $L = K(\mu_n)$. Dann ist $E'L/L$ ebenfalls eine normale Radikalerweiterung. Durch mehrfache Anwendung von Korollar 6.45 ersehen wir, daß $E'L/L$ durch einen Turm von zyklischen Erweiterungen mit Primzahlgraden entsteht. Also ist $G(E'L/L)$ auflösbar. Weiter ist L/K zyklisch und $E'L/K$ als Kompositum der Galoiserweiterungen L/K und E'/K selbst galoissch, so daß $G(E'L/K)$ den auflösbaren Normalteiler $G(E'L/L)$ und auflösbaren Quotienten $G(L/K) \cong G(E'L/K)/G(E'L/L)$ besitzt. Daher ist auch $G(E'L/K)$ auflösbar und es folgt, daß $G(E'/K)$ als Untergruppe auflösbar ist.

„$\Leftarrow$“: Sei n der zu $\mathrm{char}(K)$ teilerfremde Faktor von $[F' : K]$ und $L = K(\mu_n)$. Dann sind $G(F'/K)$ und $G(F'L/L)$ auflösbar. Daher entsteht $F'L/L$ durch einen

Turm von zyklischen Erweiterungen mit Primzahlgraden. Durch mehrfache Anwendung von Korollar 6.45 ersehen wir, daß jede dieser zyklischen Erweiterungen vom Typ (*ii*) oder Typ (*iii*) in Definition 6.48 ist und daß $F'L/L$ somit eine Radikalerweiterung ist. Weiter ist L/K eine Radikalerweiterung. Es folgt, daß $F'L/K$ eine Radikalerweiterung und F/K somit durch Radikale auflösbar ist. □

6.52 Definition. Sei $f \in K[t]$ normiert und separabel. Dann heißt f durch Radikale auflösbar, wenn der Zerfällungskörper von f über K durch Radikale auflösbar ist.

6.53 Korollar. *Ein normiertes und separables Polynom $f \in K[t]$ ist genau dann durch Radikale auflösbar, wenn $G(f, K)$ auflösbar ist.*

Ist f durch Radikale auflösbar und gilt bei positiver Charakteristik $\mathrm{char}(K) \nmid \#G(f, K)$, so können die Nullstellen von f als echte, geschachtelte Wurzelausdrücke dargestellt werden.

Für quadratische Polynome $t^2 + pt + q$ erhält man die Nullstellen in der Form $-p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$. Gibt es solche Formeln in den Koeffizienten von f auch für höhere Polynomgrade? Hierzu betrachten wir die Auflösbarkeit des allgemeinen Polynoms n-ten Grads durch Radikale.

6.54 Satz. *Sei k ein Körper und $K = k(a_1, \ldots, a_n)$ rationaler Funktionenkörper in den Variablen a_i über K. Das allgemeine Polynom $f = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in K[t]$ vom Grad n ist für $n \geq 5$ nicht durch Radikale auflösbar.*

Sei K ein beliebiger Körper. Jedes normierte und separable Polynom $f \in K[t]$ vom Grad $n \leq 4$ ist durch Radikale auflösbar.

Beweis. Es gilt $G(f, K) \cong S_n$ nach Satz 6.28. Nach Satz 6.50, (*iv*) wissen wir, daß S_n für $n \leq 4$, aber nicht für $n \geq 5$ auflösbar ist. Der Rest ergibt sich aus Korollar 6.53. □

Die Formeln für $n = 3$ und $n = 4$ sind für Rechnungen mit der Hand im übrigen verhältnismäßig unangenehm.

Die Auflösung von Polynomen durch Radikale spielt in der Robotik eine Rolle. Hier wird versucht, die Lösungen von Bewegungsgleichungen zur Robotersteuerung durch Radikale schneller als mit allgemeinen Methoden zu berechnen.

Kapitel 7

Anwendungen in der Kryptographie

Wir wollen kurz auf ein paar einfache Anwendungen der bisher behandelten Theorie in der Kryptographie eingehen.

7.1 Zielsetzung der Kryptographie

Die Kryptographie beschäftigt sich mit der sicheren Informationsübertragung im weiteren Sinne zwischen logischen Einheiten. Solche logischen Einheiten können zum Beispiel Personen oder Computer sein. Eine der grundlegenden und namensgebenden Fragestellungen ist, wie zwei Personen Informationen austauschen können, ohne das eine mithörende dritte Person diese Informationen erhalten kann. Dabei geht es nicht darum, wie man das Mithören der dritten Person verhindern kann, sondern wie sich die kommunizierenden Personen zu verhalten haben, so daß das Mithören ergebnislos bleibt.

Die zwei wichtigsten Fragestellungen der Kryptographie sind etwa

1. Verschlüsselung. Nur der rechtmäßige Empfänger soll das Verschlüsselte entschlüsseln bzw. überhaupt nur irgendwelche Informationen erhalten können.

2. Unterschriften. Alle Personen sollen die Unterschrift einer Person verifizieren, aber niemand soll sie fälschen können.

Darüberhinaus gibt es eine ganze Reihe weiterer Fragestellungen wie zum Beispiel den Austausch von Geheimnissen (Schlüsselaustausch), Authentifizierung, Datenintegrität, Unleugbarkeit usw.

Die Kryptographie befaßt sich heute im wesentlichen mit Algorithmen, Computern und der digitalen Kommunikation und ist ein eigenständiges, interdisziplinäres Gebiet mit Verbindungen zur theoretischen Informatik, Mathematik, Software Engineering, Elektrotechnik, Quantenphysik.

7.2 Fachliche Unterteilung

Die Gebiete der Kryptographie unterteilen sich grob wie folgt.

Theoretische Grundlagen aus der Informatik Hierzu gehören neben anderem Informationstheorie und Fragen nach der Existenz von Einwegfunktionen und Zero-Knowledge Beweisen.

Symmetrische Kryptoverfahren Dies sind spezielle Verfahren zur Verschlüsselung (Block- und Stromchiffren), bei denen man davon ausgeht, daß die kommunizierenden Personen sich einen geheimen Schlüssel teilen. Ein Schlüssel ist einfach eine digitale Information. Die Untersuchung der Sicherheit dieser Verfahren basiert mehr oder weniger auf statistischen Methoden und ist im wesentlichen heuristisch. Symmetrische Kryptoverfahren sind im allgemeinen effizienter als die asymmetrischen Kryptoverfahren.

Asymmetrische Kryptoverfahren Hier sind jeder Person ein öffentlicher (allen Personen bekannter) und ein geheimer Schlüssel zugeordnet. Darauf aufbauend betreibt man dann Verfahren zur Verschlüsselung, zum Unterschreiben und zum Schlüsselaustausch geheimer Schlüssel für symmetrische Kryptoverfahren. Die Untersuchung der Sicherheit dieser Verfahren basiert im wesentlichen auf der Reduktion zu algorithmischen Problemen aus der Mathematik mit hoher Komplexität. Entsprechend geht bei asymmetrischen Kryptoverfahren die meiste Mathematik und besonders die algebraische Zahlentheorie ein. Die asymmetrische Kryptographie wurde 1976 von Diffie und Hellman erfunden.

Technische Fragestellungen Hier untersucht man, inwieweit die verwendeten Geräte auch physikalisch sicher sind. Zum Beispiel kann man aus Stromverbrauch, elektromagnetischer Abstrahlung oder Öffnen der Geräte unauthorisierten Zugang zu Informationen erhalten. Eine andere Disziplin ist die Untersuchung biometrischer Verfahren (z.B. Identifikation durch Fingerabdruck oder Iris).

7.3 Asymmetrische Kryptoverfahren

Die grundlegende Vorgehensweise bei den asymmetrischen Kryptosystemen ist wie folgt. Wir betrachten die Personen Alice und Bob. Alice hat einen öffentlichen und einen geheimen Schlüssel. Wenn Bob Alice eine geheime Nachricht schicken möchte, verwendet er einen geeigneten Algorithmus $\mathcal{E}$, der als Eingabe die Nachricht und den öffentlichen Schlüssel von Alice erwartet und als Ausgabe die verschlüsselte Nachricht liefert. Bob schickt diese Nachricht an Alice. Mithilfe eines zu $\mathcal{E}$ passenden Entschlüsselungsalgorithmus $\mathcal{D}$ kann Alice unter Eingabe der verschlüsselten Nachricht und ihres geheimen Schlüssels die ursprüngliche Nachricht berechnen.

Beim Unterschreiben wird wie folgt vorgegangen. Alice verwendet einen Signaturalgorithmus $\mathcal{S}$, welcher nach Eingabe des zu unterschreibenden Texts und des geheimen Schlüssels von Alice eine Unterschrift zurückliefert. Mithilfe eines passenden Verifikationsalgorithmus $\mathcal{V}$ und nach Eingabe der Unterschrift und des öffentlichen Schlüssels von Alice verifiziert Bob dann die Unterschrift.

Zum Schlüsselaustausch schließlich benötigt Bob ebenfalls einen öffentlichen und geheimen Schlüssel. Man verwendet dann einen Algorithmus $\mathcal{K}$, welcher denselben Wert nach Eingabe von Alice's geheimen Schlüssel und Bob's öffentlichem Schlüssel und nach Eingabe von Alice's öffentlichem Schlüssel und Bob's geheimen Schlüssel zurückliefert. Alice und Bob tauschen ihre öffentlichen Schlüssel aus und benutzen $\mathcal{K}$, um ein gemeinsames Geheimnis zu berechnen.

Im allen Fällen soll die Kenntnis des geheimen Schlüssels unbedingt erforderlich sein, um Nachrichten zu entschlüsseln, Unterschriften zu fälschen bzw. das gemeinsame Geheimnis zu berechnen (dies ist nicht ganz richtig, zumindest soll es möglich sein, einen erfolgreichen Angreifer zur Lösung eines schwierigen mathematischen Problems zu verwenden). Es wird nicht angenommen, daß die verwendeten Algorithmen $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{V}$ und $\mathcal{K}$ geheim sind.

Nun stellt sich die Frage, ob solche Algorithmen überhaupt realisiert werden können. Dies ist in der Tat der Fall, wenn verschiedene plausible Annahmen gemacht werden bzw. gewisse mathematische Berechnungsprobleme nur mit hohem algorithmischen Aufwand gelöst werden können. Ein solches Problem ist die Faktorisierung ganzer Zahlen. Das bekannteste, darauf beruhende asymmetrische Kryptoverfahren heißt RSA-Verfahren (nach den Entdeckern Rivest, Adleman, Shamir). Eine andere Klasse von asymmetrischen Kryptoverfahren beruht auf geeigneten endlichen, zyklischen Gruppen und dem diskreten Logarithmusproblem, auf die wir im folgenden eingehen.

7.4 Das diskrete Logarithmus Problem

7.1 Definition. Sei G eine endliche, abelsche Gruppe und $g, h \in G$. Eine Zahl $r \in \mathbb{Z}$ mit $h = g^r$ heißt diskreter Logarithmus von h zur Basis g. Das diskrete Logarithmus Problem (DLP) ist, zu vorgegebenen g, h den diskreten Logarithmus r berechnen, falls er existiert.

Es ist klar, daß r modulo der Ordnung von g bestimmt ist. Auch gibt es beispielsweise in der Gruppe $C_3 \times C_3$ keinen diskreten Logarithmus von $h = (1, 0)$ zur Basis $g = (0, 1)$.

Wir fassen die Komplexität des diskreten Logarithmus Problems als eine Funktion von $\log(\#G)$ auf, welche geeignete Grundoperationen (Gruppenoperationen, Bitoperationen) zählt. Diese Komplexität hängt wesentlich von der Gruppe G ab. Zum Beispiel nimmt das diskrete Logarithmus Problem in $G = \mathbb{F}_p^+$ die Form $h = rg$ an, und man muß nur $r = h/g$ berechnen. Das diskrete Logarithmus Problem in $G = \mathbb{F}_p^\times$ ist hingegen viel schwieriger. Wir sind daran interessiert, daß das diskrete Logarithmus Problem möglichst schwierig zu lösen ist.

Eine Black-Box Gruppe G ist eine Gruppe, die man sich als abstrakten Datentyp implementiert vorstellen kann. Es sollen speziell nur die Gruppenoperationen, der Zugriff auf das Einselement und die Auswahl unabhängig und gleichverteilt zufälliger Elemente aus G möglich bzw. zulässig sein. Ein Algorithmus für eine solche Gruppe darf bzw. kann also nur diese Funktionen verwenden.

7.2 Satz. *Sei G eine Black-Box Gruppe, p der größte Primteiler von $\#G$ und $g, h \in G$ unabhängig und gleichverteilt zufällig gewählte Elemente. Die Wahrscheinlichkeit, den diskreten Logarithmus von h zur Basis g mit m Gruppenoperationen zu lösen, ist $\tilde{\Theta}(m^2/p)$.*

Für Black-Box Gruppen von Primzahlordnung n ist die Komplexität des diskreten Logarithmus Problems $\Theta(\sqrt{n})$ und damit exponentiell in $\log(n)$. Wie gesehen, kann dies für speziell gegebene Gruppen auch polynomiell in $\log(n)$ sein. Die kryptographische Qualität einer Gruppe wird einerseits durch die Komplexität der Gruppenoperationen (soll möglichst niedrig sein) und die Komplexität des diskreten Logarithmus Problems (soll möglichst hoch sein) gegeben. Wir merken an, daß die Komplexität des diskreten Logarithmus Problems für die multiplikativen Gruppen von endlichen Körpern $\mathbb{F}_q^\times$ obere, subexponentielle Schranken der (ungefähren) Form $\exp(\log(n)^{1/2})$ und $\exp(\log(n)^{1/3})$ mit $n = q - 1$ existieren. Die Punktgruppen elliptischer Kurven über $\mathbb{F}_q$ sind komplexitätsweise im allgemeinen den Black-Box Gruppen gleichgestellt. Untere Schranken sind in beiden Fällen nicht bekannt.

Das diskrete Logarithmus Problem in nicht zyklischen Gruppen kann offensichtlich auf mehrere diskrete Logarithmus Probleme in den einzelnen zyklischen Faktoren zurückgeführt werden. Da das Verhältnis von Komplexität zu Gruppenordnung hier ungünstiger als bei zyklischen Gruppen ähnlich großer, primer Gruppenordnung ist, beschränken wir uns deshalb nur auf zyklische Gruppen mit Primzahlordnung.

7.5 DLP basierte Kryptoverfahren

Wir legen den Betrachtungen eine endliche, zyklische Gruppe G von Primzahlordnung n zugrunde. Mit g bezeichnen wir Erzeuger von G.

Die Teilnehmer Alice und Bob haben jeweils ein Schlüsselpaar (r_A, g_A) und (r_B, g_B), wobei $r_A, r_B \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die geheimen Schlüssel und $g_A = g^{r_A}$, $g_B = g^{r_B}$ die öffentlichen Schlüssel sind.

Die geheimen Schlüssel sind eindeutig durch die öffentlichen Schlüssel bestimmt und durch die (hohe) Komplexität des diskreten Logarithmus Problems geschützt.

Diffie-Hellman Schlüsselaustausch Alice und Bob tauschen ihre öffentlichen Schlüssel aus und berechnen unabhängig das gemeinsame Geheimnis $g_B^{r_A} = g^{r_B r_A}$ bzw. $g_A^{r_B} = g^{r_A r_B}$. Dies kann nun als Schlüssel für ein symmetrisches Kryptoverfahren benutzt werden. Der oben erwähnte Algorithmus $\mathcal{K}$ ist daher einfach $\mathcal{K}(x, y) = x^y$.

Will eine dritte Person Oscar das Geheimnis lüften, so muß sie im wesentlichen aus $g, g_A = g^{r_A}, g_B = g^{r_B}$ den Wert $g^{r_A r_B}$ berechnen.

7.3 Definition. Das Computational Diffie-Hellman Problem (CDH) ist, für g, g^a, g^b den Wert g^{ab} zu berechnen. Das Decision Diffie-Hellman Problem (DDH) ist, für g, g^a, g^b, h zu entscheiden, ob $h = g^{ab}$ gilt.

Können wir das DLP lösen, so auch das CDP. Können wir das CDP lösen, so auch das DDH. Über die Umkehrungen weiß man nur etwas in speziellen Fällen. Ist das CDP leicht, so muß der beschriebene Schlüsselaustausch als unsicher angesehen werden.

ElGamal Verschlüsselung Bob will eine Nachricht m an Alice schicken. Dabei wird m als geeignetes Gruppenelement von G aufgefaßt. Der Verschlüsselungsalgorithmus $\mathcal{E}$ berechnet dann für m und den öffentlichen Schlüssel g_A ein gleichverteilt zufälliges $r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und liefert die verschlüsselte Nachricht $(g^r, m g_A^r)$ zurück. Alice verwendet den Entschlüsselungsalgorithmus $\mathcal{D}$, welcher für die verschlüsselte Nachricht (u, v) und den geheimen Schlüssel r_A den Wert $v/u^{r_A} = m(g^{r_A})^r/(g^r)^{r_A} = m$ berechnet.

Schnorr Signatur Alice will einen Text $m \in G$ unterschreiben. Hier benötigt man noch eine geeignete Hilfsfunktion $H : G \times G \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Der Signaturalgorithmus $\mathcal{S}$ wählt ein gleichverteilt zufälliges $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und berechnet $r = g^k$, $u = r_A H(m, r) + k$. Die Unterschrift ist $(u, H(m, r))$. Bob verwendet zur Verifikation der Unterschrift (s, t) den Algorithmus $\mathcal{V}$. Dieser berechnet $r = g^u/g_A^t$

und akzeptiert genau dann, wenn $t = H(m, r)$. Annahmen an H sind, daß keine verschiedenen Argumente mit gleichem Bild und keine Urbilder berechnet werden können.

In einem geeigneten Sicherheitsmodell und unter gewissen Annahmen wird die Sicherheit von ElGamal Verschlüsselung und Schnorr Signaturen auf das DDH bzw. DLP zurückgeführt. Der Begriff der Sicherheit ist jedoch recht delikat und insbesondere stark vom betrachteten Sicherheitsmodell abhängig. Die Theorie ist im übrigen nicht sehr „stetig", kleine Änderungen oder Fehler bewirken häufig, daß ein Verfahren vollkommen unbrauchbar wird.

7.6 XTR Kryptosystem

Das Akronym „XTR" steht für „ECSTR" beziehungsweise „Efficient and Compact Subgroup Trace Representation". Die Hauptmotivation hinter XTR ist, $G = \mathbb{F}_q^\times$ auf möglichst effiziente und trickreiche Weise zu verwenden. Genauer betrachtet man eine besonders geeignete Untergruppe G von $\mathbb{F}_{p^6}^\times$ für eine Primzahl p. Im folgenden verwenden wir die Bezeichnungen $E = \mathbb{F}_{p^6}$, $F = \mathbb{F}_{p^2}$ und $K = \mathbb{F}_p$.

7.4 Lemma. *Die Gruppe $E^\times$ enthält genau eine Untergruppe G der Ordnung $p^2 - p + 1$. Die Gruppe G stimmt mit der Gruppe all derjeningen Elemente $x \in E^\times$ überein, für die $\mathrm{N}_{E/F}(x) = 1$ für alle echten Teilkörper F von E gilt.*

Beweis. Es gilt $p^6 - 1 = (p-1)(p+1)(p^2 - p + 1)(p^2 + p + 1)$. Daher existiert genau eine Untergruppe G von $E^\times$ mit Ordnung $p^2 - p + 1$. Es gilt $\mathrm{N}_{E/F}(x) = x^{(p^6-1)/(p^{[F:K]}-1)}$, wobei der Exponent eine ganze Zahl ist, die durch $p^2 - p + 1$ teilbar ist. Genauer ist $p^2 - p + 1$ gleich dem ggT dieser Exponenten für alle echten Teilkörper F von E. Daraus folgt die behauptete Charakterisierung von G. $\square$

Ein diskretes Logarithmus Problem in G kann mit der Norm nicht auf ein äquivalentes diskretes Logarithmus Problem in der multiplikativen Gruppe eines der echten Teilkörper von E abgebildet werden. Darüberhinaus wählt man p so, daß $p^2 - p + 1$ einen großen Primfaktor q enthält. Dieser tritt nicht in $p^3 - 1$ und $p^2 - 1$ auf. Daher kann ein diskretes Logarithmusproblem auch nicht auf irgendeine andere Weise in die multiplikative Gruppe eines der echten Teilkörper von E abgebildet werden.

7.5 Lemma. *Für jedes $x \in G$ sind die Konjugierten von x über F gleich x, x^{p-1}, x^{-p} und es gilt $m_{x,F}(t) = t^3 - \mathrm{Tr}_{E/K}(x)t^2 + \mathrm{Tr}_{E/K}(x)^p t - 1$. Es gibt also eine Bijektion der Konjugationsklassen $\{x, x^{p^2}, x^{p^4}\}$ und der Spuren $\mathrm{Tr}_{E/K}(x)$.*

Beweis. Die Konjugierten von $x \in G$ sind $x^{p^2} = x^{p-1}$ und $x^{p^4} = 1/(xx^{p-1}) = x^{-p}$. Der negierte Koeffizient von t in $m_{x,F}(t)$ ist damit gleich $xx^{p-1}+xx^{-p}+x^{p-1}x^{-p} = x^p + x^{-p^2} + x^{p^2-p} = \mathrm{Tr}_{E/K}(x)^p$. □

Kommt es uns nur auf die Konjugationsklasse eines Elements aus G an, so können wir diese durch die Spur des Elements darstellen. Wir können also $(p^2 - p+1)/3$ Konjugationsklassen durch ein Drittel des Speicherbedarfs darstellen, den die $p^2 - p + 1$ Elemente aus G benötigen. Dies ist sehr vorteilhaft. Ein Problem jedoch ist, wie Konjugationsklassen multipliziert oder potenziert werden sollen. Wir bemerken, daß durch elementweise Multiplikation keine eindeutig bestimmte Konjugationsklasse erhalten werden kann. Dies ist aber beim Potenzieren möglich. Wir entwickeln nun Formeln, so daß man nur mit den Spuren selbst zu rechnen braucht.

7.6 Lemma. *Für $x \in G$ gilt.*

(*i*) $\mathrm{Tr}_{E/F}(x^{n+m}) = \mathrm{Tr}_{E/F}(x^n)\mathrm{Tr}_{E/F}(x^m) - \mathrm{Tr}_{E/F}(x^n)^p\mathrm{Tr}_{E/F}(x^{m-n}) + \mathrm{Tr}_{E/F}(x^{m-2n})$.

(*ii*) $\mathrm{Tr}_{E/F}(x^{2n}) = \mathrm{Tr}_{E/F}(x^n)^2 - 2\mathrm{Tr}_{E/F}(x^n)^p$.

(*iii*) $\mathrm{Tr}_{E/F}(x^{n+2}) = \mathrm{Tr}_{E/F}(x)\mathrm{Tr}_{E/F}(x^{n+1}) + \mathrm{Tr}_{E/F}(x)^p\mathrm{Tr}_{E/F}(x^n) + \mathrm{Tr}_{E/F}(x^{n-1})$.

(*iv*) $\mathrm{Tr}_{E/F}(x^{2n-1}) = \mathrm{Tr}_{E/F}(x^n)\mathrm{Tr}_{E/F}(x^{n-1})+\mathrm{Tr}_{E/F}(x^n)^p\mathrm{Tr}_{E/F}(x)^p+\mathrm{Tr}_{E/F}(x^{n+1})^p$.

(*iv*) $\mathrm{Tr}_{E/F}(x^{2n+1}) = \mathrm{Tr}_{E/F}(x^n)\mathrm{Tr}_{E/F}(x^{n+1})+\mathrm{Tr}_{E/F}(x^n)^p\mathrm{Tr}_{E/F}(x)+\mathrm{Tr}_{E/F}(x^{n-1})^p$.

Beweis. (*i*): Aus $m_{x^n,F}(x^n) = 0$ folgt $x^{3n} = \mathrm{Tr}_{E/F}(x^n)x^{2n} - \mathrm{Tr}_{E/F}(x^n)x^n + 1$. Muliplizieren mit x^{m-2n} ergibt $x^{n+m} = \mathrm{Tr}_{E/F}(x^n)x^m - \mathrm{Tr}_{E/F}(x^n)^p x^{m-n} + x^{m-2n}$. Durch Anwenden von $\mathrm{Tr}_{E/F}$ folgt die Aussage.

(*ii*) – (*iv*): Folgen aus (*i*) und $\mathrm{Tr}_{E/F}(x^{-1}) = \mathrm{Tr}_{E/F}(x)^p$. □

Ohne Beweis merken wir an, daß $\mathrm{Tr}_{E/F}(x^n)$ mit Hilfe des Lemmas effizient und nur durch Rechnungen in $F = \mathbb{F}_{p^2}$ aus $\mathrm{Tr}_{E/F}(x)$ bestimmt werden kann. Dabei verwendet man im übrigen auch eine Normalbasis von F/K. Etwas komplizierter, aber trotzdem möglich ist die Berechnung von Ausdrücken der Form $\mathrm{Tr}(x^m x^{kn})$ ausgehend von n, m, $\mathrm{Tr}_{E/F}(x)$ und $\mathrm{Tr}_{E/F}(x^k)$ für ein geheimes k.

Anstelle mit $x \in G$ zu rechnen, benutzt XTR nur die Elemente $\mathrm{Tr}_{E/K}(x)$, wodurch G wie oben bemerkt in Dreierklassen zusammengefaßt wird. Dies bewirkt eine Speicherersparnis vom Faktor 3 und zusätzlich eine höhere Rechengeschwindigkeit.

Der Diffie-Hellman Schlüsselaustausch kann dann wie beschrieben durchgeführt werden. Für die ElGamal Verschlüsselung ist eine Adaption notwendig, da aus

$\mathrm{Tr}(g)$ und $\mathrm{Tr}(h)$ nicht ohne weiteres $\mathrm{Tr}(gh)$ ausgerechnet werden kann. Der Wert $v = mg_A^r$ wird einfach durch den Wert $v = \mathcal{E}'(k, g_A^r)$ ersetzt, wobei $\mathcal{E}'$ ein symmetrisches Verschlüsselungsverfahren bezeichnet. Die Entschlüsselung findet dann durch $m = \mathcal{D}'(v, u^{r_A})$ statt. Unterschriften können in einem ähnlichen Hybridverfahren erzeugt werden, jedoch geht hier kein Weg daran vorbei, Ausdrücke der Form $\mathrm{Tr}(x^m x^{kn})$ wie oben auszurechnen.

Um ein gegenwärtig sicheres System zu bekommen, müssen die Primzahl p und der große Primfaktor q von $\#G = p^2 - p + 1$ mindestens 170 Bit bzw. 52 Dezimalstellen haben (entspricht grob einem RSA 1024 Bit Modul). Das XTR Kryptosystem ist patentiert (Citibank).

Kapitel 8

Transzendente Körpererweiterungen

In diesem Kapitel betrachten wir Körpererweiterungen E/K, in denen nicht alle Elemente algebraisch über K sind, welche also transzendente Elemente enthalten. Nach der Diskussion von Transzendenzbasen besprechen wir die Eigenschaften „separabel“ und „regulär“ für beliebige Körpererweiterungen nur sehr knapp.

8.1 Transzendenzbasen

Die Begriffe dieses Abschnitts verhalten sich ganz analog zu den Begriffen „linear unabhängig“ und „Basis“ aus der linearen Algebra.

8.1 Definition. Sei E/K eine Körpererweiterung. Eine Menge $A \subseteq E$ heißt algebraisch unabhängig über K, wenn für alle endlichen Teilmengen $\{a_1, \ldots, a_n\}$ von A und alle $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ aus $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ bereits $f = 0$ folgt.

Wir fassen die leere Menge $A = \{\}$ als algebraisch unabhängig über K auf. „Algebraisch abhängig“ bedeutet „nicht algebraisch unabhängig“.

8.2 Lemma. *Sei E/K eine Körpererweiterung und $A \subseteq E$.*

(i) Sei $X_A = \{x_a \,|\, a \in A\}$ eine Menge von Unbekannten und $K[X_A]$ der zugehörige Polynomring. Die Menge A ist genau dann algebraisch unabhängig über K, wenn der Einsetzhomomorphismus $\phi_A : K[X_A] \to K[A]$, $x_a \mapsto a$ injektiv ist.

(ii) Ist $A \subseteq E$ algebraisch unabhängig über K und $b \in E \backslash A$, so ist $A \cup \{b\}$ genau dann algebraisch abhängig über K, wenn b im algebraischen Abschluß von $K(A)$ in E liegt.

Beweis. Teil (i) ist nur eine Umformulierung der Definition. Für Teil (ii) betrachtet man das Minimalpolynom von x über $K(A)$ und multipliziert Nenner heraus, um eine algebraische Relation in $K[A, x]$ zu erhalten. □

Die Elemente einer algebraisch unabhängigen Menge können also nach Lemma 8.2, (i) als Variablen aufgefaßt werden.

8.3 Definition. Sei E/K eine Körpererweiterung. Eine Menge $A \subseteq E$ heißt Transzendenzbasis von E über K bzw. von E/K, wenn A algebraisch unabhängig über K ist und E gleich dem algebraischen Abschluß von $K(A)$ in E ist.

8.4 Satz. *Sei E/K eine Körpererweiterung, $A \subseteq E$ algebraisch unabhängig über K und $C \subseteq E$ mit $E/K(C)$ algebraisch. Dann gibt es eine Transzendenzbasis B von E/K mit $A \subseteq B \subseteq C$.*

Alle Transzendenzbasen von E/K haben die gleiche Kardinalität.

Beweis. Eine über K algebraisch unabhängige Teilmenge B von E mit $A \subseteq B \subseteq C$ ist genau dann eine Transzendenzbasis von E über K, wenn für jedes $x \in C \backslash B$ die Menge $B \cup \{x\}$ algebraisch abhängig über K ist, also wenn B maximal in C bezüglich Inklusion mit der Eigenschaft „algebraisch unabhängig über K“ ist: Sei B eine solche Transzendenzbasis und $x \in C \backslash B$. Dann ist $B \cup \{x\}$ nach Lemma 8.2, (ii) algebraisch abhängig über K. Sei umgekehrt B maximal algebraisch unabhängig über K in C und $x \in C \backslash B$. Dann ist $B \cup \{x\}$ algebraisch abhängig über K und nach Lemma 8.2, (ii) ist x algebraisch über $K(B)$. Daher ist die Erweiterung $K(C)/K(B)$ algebraisch. Mit $E/K(C)$ ist dann auch $E/K(B)$ algebraisch und B eine Transzendenzbasis von E über K.

Die Menge der über K algebraisch unabhängigen Teilmengen B von E mit $A \subseteq B \subseteq C$ ist bezüglich Inklusion induktiv geordnet. Nach dem Zornschen Lemma existiert eine maximale solche Teilmenge B, die nach der Vorbemerkung eine Transzendenzbasis bildet.

Zum Beweis über die Gleichheit der Kardinalität nehmen wir zunächst an, daß B eine endliche Transzendenzbasis von E/K ist und setzen $n = \#B$. Sei C eine weitere Transzendenzbasis von E/K mit $m = \#C$ und $m \geq n$. Wir schreiben $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ und $C = \{c_j \,|\, j \in J\}$. Für beliebiges j gibt es ein i, so daß wir b_i durch c_j austauschen können und die resultierende Menge B' eine Transzendenzbasis bleibt: Nach Voraussetzung gibt es ein Polynom $f \neq 0$ über K mit $f(c_j, b_1, \ldots, b_n) = 0$. Da c_j algebraisch unabhängig über K ist, gibt ein i, so daß $f(c_j, b_1, \ldots, b_n) = \sum_\nu g_\nu(c_j, b_1, \ldots, \hat{b}_i, \ldots, b_n) b_i^\nu = 0$ mit $g_\nu(c_j, b_1, \ldots, \hat{b}_i, \ldots, b_n) \neq 0$ für ein $\nu \geq 1$ ist. Damit ist b_i algebraisch über $K(B')$ für $B' = \{c_j, b_1, \ldots, \hat{b}_i, \ldots, b_n\}$. Mit b_i ist dann auch c_j nicht algebraisch über $K(b_1, \ldots, \hat{b}_i, \ldots, b_n)$ und B' somit eine Transzendenzbasis von E/K.

Durch mehrfache Anwendung der Austauschprozedur erhalten wir, daß C eine Transzendenzbasis B' der Kardinalität n enthält. Es folgt $C = B'$ und $n = m$.

Sind nun B und C unendliche Transzendenzbasen von E/K, so gibt es für jedes $a \in C$ eine endliche Teilmenge $B_a \subseteq B$, so daß a algebraisch über $K(B_a)$ ist. Es folgt $B = \cup_{a \in C} B_a$. Damit ist die Mächtigkeit von B kleiner gleich der Mächtigkeit von C. Dies gilt auch umgekehrt, und B und C besitzen damit die gleiche Mächtigkeit. □

8.5 Definition. Der Transzendenzgrad $\operatorname{trdeg}(E/K)$ einer Körpererweiterung E/K ist die Kardinalität $\#B$ einer Transzendenzbasis B von E/K.

Eine Körpererweiterung E/K heißt rein transzendent, wenn $E = K(B)$ für eine Transzendenzbasis B von E/K gilt.

Eine rein transzendente Erweiterung E/K kann nach Lemma 8.2, (i) als rationaler Funktionenkörper aufgefaßt werden. Wir halten nochmal fest, daß sich jede Körpererweiterung E/K schreiben läßt als eine algebraische Erweiterung E/F eines Zwischenkörpers F von E/K, welcher rein transzendent über K ist.

8.6 Satz. *Sei E/K eine Körpererweiterung und F ein Zwischenkörper. Für Transzendenzbasen B von F/K und B' von E/F gilt $B \cap B' = \{\}$ und $B \cup B'$ ist eine Transzendenzbasis von E/K. Ferner gilt* $\operatorname{trdeg}(E/K) = \operatorname{trdeg}(E/F) + \operatorname{trdeg}(F/K)$.

Beweis. Übung. □

8.7 Korollar. *Sei E/K eine Körpererweiterung, F ein über K rein transzendenter Zwischenkörper von E/K und L ein über K algebraischer Zwischenkörper von E/K. Dann sind F/K und L/K linear disjunkt und FL ist rein transzendent über L. Ist X eine Transzendenzbasis von F über K, so ist X auch eine Transzendenzbasis von FL über L.*

Beweis. Übung. □

Die folgende Definition verwendet algebraische Unabhängigkeit analog wie die Definition von „linear disjunkt“ die lineare Unabhängigkeit benutzt.

8.8 Definition. Seien E/K eine Körpererweiterung und F_1, F_2 Zwischenkörper von E/K. Dann heißen F_1/K und F_2/K algebraisch disjunkt (frei) und F_1 und F_2 algebraisch disjunkt (frei) über K, wenn jede über K algebraisch unabhängige Menge von Elementen von F_1 über F_2 algebraisch unabhängig bleibt.

Es gilt der zu Satz 5.22 analoge Satz. Insbesondere ist die Definition eigentlich symmetrisch. Linear disjunkte Erweiterungen sind auch algebraisch disjunkt. Algebraisch disjunkte Erweiterungen müssen jedoch nicht unbedingt linear disjunkt sein.

8.2 Separable Erweiterungen

In diesem Abschnitt wird die Eigenschaft „separabel“ von algebraischen auf beliebige Körpererweiterungen verallgemeinert. Wir gehen jedoch nur kurz auf die Eigenschaften ein und lassen die Behandlung von Derivationen aus.

8.9 Definition. Eine Transzendenzbasis A der Körpererweiterung E/K heißt separierend, wenn $E/K(A)$ separabel ist. Eine Körpererweiterung E/K heißt separabel erzeugt, wenn sie eine separierende Transzendenzbasis besitzt. Eine Körpererweiterung E/K heißt separabel, wenn für jeden über K endlich erzeugten Zwischenkörper F von E/K die Erweiterung F/K separabel erzeugt ist.

Es ist klar, daß diese Definition für algebraische Erweiterungen E/K mit der bisherigen Definition übereinstimmt. Wir werden dann wieder für verschiedene Körperkonstruktionen zeigen, wie sich die Eigenschaft separabel fortpflanzt. Die Verhältnisse sind aber nicht ganz analog zum Fall algebraischer Erweiterungen.

Mit $K^{p^{-\infty}}$ wird wieder der rein inseparable Abschluß von K für $p = \mathrm{char}(K)$ bezeichnet. Hat K die Charakteristik Null, so soll $K^{p^{-\infty}} = K$ gelten.

8.10 Satz. *Sei E/K eine Körpererweiterung. Dann sind äquivalent.*

(*i*) *E/K ist separabel.*

(*ii*) *E/K und $K^{p^{-\infty}}/K$ sind linear disjunkt.*

Beweis. Für den Fall $p = 0$ ist die Aussage klar. Es gelte also $p > 0$.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Aussage (ii) gilt genau dann, wenn für alle endlich erzeugten Zwischenkörper F von E/K die Erweiterungen F/K und $K^{p^{-\infty}}/K$ linear disjunkt sind. Sei also F ein endlich erzeugter Zwischenkörper von E/K. Da E/K separabel ist, besitzt F/K nach Satz 8.4 eine endliche Transzendenzbasis B, so daß die Erweiterung $F/K(B)$ algebraisch und separabel ist. Da $K^{p^{-\infty}}/K$ algebraisch ist, sind $K(B)/K$ und $K^{p^{-\infty}}/K$ nach Korollar 8.7 linear unabhängig. Da $F/K(B)$ algebraisch und separabel und da $K(B)K^{p^{-\infty}}/K(B)$ nach Satz 5.64 rein inseparabel ist, sind $F/K(B)$ und $K(B)K^{p^{-\infty}}/K(B)$ nach Satz 5.72 linear disjunkt. Nach dem Satz über lineare Disjunktheit in Türmen (Übung) ergibt sich, daß F/K und $K^{p^{-\infty}}/K$ linear disjunkt sind.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei F ein über K endlich erzeugter Zwischenkörper von E/K und $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ ein endliches Erzeugendensystem von F über K. Es gilt also $F = K(B)$. Wir zeigen, daß es eine Teilmenge von B gibt, die eine separierende Transzendenzbasis von F/K bildet. Falls die b_i algebraisch unabhängig über K sind, ist B bereits eine separierende Transzendenzbasis. Andernfalls gibt es ein $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ von minimalem Grad ≥ 1 mit $f(b_1, \ldots, b_n) = 0$. Wegen der Minimalität des Grads ist f irreduzibel.

Wir behaupten, daß f in mindestens einer Variablen x_i separabel ist. Sei dazu $f = \sum_i \lambda_i f_i$ mit Monomen $f_i \in K[x_1, \ldots, x_n]$ und $\lambda_i \in K$. Ist f in keiner Variablen separabel, gibt es wegen der Irreduzibilität von f Monome $g_i \in K[x_1, \ldots, x_n]$ mit $f_i = g_i^p$. Dann gilt $f(b_1, \ldots, b_n)^{1/p} = \sum_i \lambda_i^{1/p} g_i(b_1, \ldots, b_n) = 0$ und die $g_i(b_1, \ldots, b_n)$ sind linear abhängig über $K^{p^{-\infty}}$. Wegen (ii) müssen die $g_i(b_1, \ldots, b_n)$ dann auch linear abhängig über K sein, also muß $g(b_1, \ldots, b_n) = 0$ mit einem $g = \sum_i \mu_i g_i$ und $\mu_i \in K$ gelten. Dies führt zu einem Widerspruch zur Gradminimalität von f. Also gilt die Behauptung.

Sei f ohne Einschränkung in der Variablen x_n separabel. Dann ist die Erweiterung $F/K(b_1, \ldots, b_{n-1})$ algebraisch und separabel. Induktiv erhalten wir eine separierende Transzendenzbasis $B' = \{x_1, \ldots, x_r\}$ mit $r \geq 0$. □

Nach Satz 8.10 können wir (ii) auch als Definition von „separabel" nehmen. Dies hat den hübschen Aspekt, daß es die beiden, nun etwas technisch anmutenden Definitionen von „separabel" vereinheitlicht.

8.11 Satz. *Sei E/K eine Körpererweiterung.*

(i) *Ist E/K separabel und B ein endliches Erzeugendensystem von E/K, so gibt es eine separierende Transzendenzbasis A mit $A \subseteq B$.*

(ii) *Ist E/K separabel erzeugt, so ist E/K separabel.*

(iii) *Ist K vollkommen, so ist E/K separabel.*

(iv) *Ist E/K separabel und F ein Zwischenkörper von E/K, so ist F/K separabel.*

(v) *Ist F ein Zwischenkörper von E/K und sind E/F und F/K separabel, so ist E/K separabel.*

(vi) *Sind F und L über K algebraisch disjunkte Zwischenkörper von E/K und ist F/K separabel, so ist auch FL/L separabel.*

(vii) *Sind F und L über K linear disjunkte Zwischenkörper von E/K und ist FL/L separabel, so ist auch F/K separabel.*

Beweis. (i): Folgt aus dem Beweis von Satz 8.10.

(ii): Aussage (ii) aus Satz 8.10 folgt aus der Annahme analog wie „$\Rightarrow$" im Beweis von Satz 8.10.

(iii): Folgt aus Satz 8.10 wegen $K^{p^{-\infty}} = K$.

(iv): Folgt direkt aus der Definition von „separabel" oder aus Satz 8.10.

(v): Folgt aus Satz 8.10 und der Transitivität von „linear disjunkt" in Körpertürmen.

(vi): Sei G ein endlich erzeugter Zwischenkörper von FL/L. Dann gibt es einen endlich erzeugten Zwischenköper H von F/K mit $G \subseteq HL$. Sei B eine separierende Transzendenzbasis von H/K. Dann ist B wegen der Voraussetzung auch eine separierende Transzendenzbasis von HL/L. Nach (ii) ist HL/L separabel und nach (i) ist G/L separabel.

(vii): Da FL/L separabel ist, sind FL/L und $L^{p^{-\infty}}/L$ und speziell FL/L und $LK^{p^{-\infty}}/L$ nach Satz 8.10 linear disjunkt. Da F/K und L/K nach Voraussetzung linear disjunkt sind, müssen auch FL/K und $LK^{p^{-\infty}}/K$ aufgrund der Transitivität von „linear disjunkt“ in Körpertürmen linear disjunkt sein. Dann sind speziell auch F/K und $K^{p^{-\infty}}/K$ linear disjunkt, so daß F/K nach Satz 8.10 separabel ist. □

Die Aussagen (v) und (vi) implizieren auch, daß ein Kompositum algebraisch disjunkter, separabler Erweiterungen wieder separabel ist.

8.3 Reguläre Erweiterungen

Wir verschärfen nun den Begriff „separabel“ und Satz 8.10.

8.12 Definition. Eine Körpererweiterung E/K heißt regulär, wenn E/K und der algebraische Abschluß K^a/K linear disjunkt sind.

8.13 Satz. *Sei E/K eine Körpererweiterung. Dann sind äquivalent.*

(i) *E/K ist regulär.*

(ii) *K ist algebraisch abgeschlossen in E und E/K ist separabel.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Da E/K und K^a/K linear disjunkt sind, gilt $E \cap K^a = K$ und K ist algebraisch abgeschlossen in E. Außerdem sind dann auch E/K und $K^{p^{-\infty}}/K$ wegen $K^{p^{-\infty}} \subseteq K^a$ linear disjunkt und E/K nach Satz 8.10 somit separabel.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Aus der Voraussetzung folgt $EK^{p^{-\infty}} \cap K^a = K^{p^{-\infty}}$: Die Erweiterung $EK^{p^{-\infty}} \cap K^a/E \cap K^a$ ist mit $K^{p^{-\infty}}/K$ und $EK^{p^{-\infty}}/E$ rein inseparabel. Wegen $E \cap K^a = K$ und der Transitivität von „rein inseparabel“ ist dann $EK^{p^{-\infty}} \cap K^a/K^{p^{-\infty}}$ rein inseparabel. Diese Erweiterung ist nach Satz 5.72 aber auch separabel. Also folgt $EK^{p^{-\infty}} \cap K^a = K^{p^{-\infty}}$.

Die Erweiterung $K^a/K^{p^{-\infty}}$ ist galoissch. Nach Satz 6.13 und der Vorbemerkung sind nun $EK^{p^{-\infty}}/K^{p^{-\infty}}$ und $K^a/K^{p^{-\infty}}$ linear disjunkt. Außerdem sind E/K und $K^{p^{-\infty}}/K$ nach Voraussetzung linear disjunkt. Wegen der Transitivität von „linear disjunkt“ in Türmen ergibt sich damit, daß E/K und K^a/K linear disjkunkt sind, E/K also regulär ist. □

8.14 Satz. *Sei E/K eine Körpererweiterung.*

(*i*) *Ist K algebraisch abgeschlossen, so ist E/K regulär.*

(*ii*) *Ist E/K regulär und F ein Zwischenkörper von E/K, so ist F/K regulär.*

(*iii*) *Ist F ein Zwischenkörper von E/K und sind E/F und F/K regulär, so ist E/K regulär.*

(*iv*) *Sind F und L über K algebraisch disjunkte Zwischenkörper von E/K und ist F/K regulär, so sind F/K und L/K linear disjunkt.*

(*v*) *Sind F und L über K algebraisch disjunkte Zwischenkörper von E/K und ist F/K regulär, so ist auch FL/L regulär.*

Beweis. (*i*) und (*ii*): Folgen direkt aus Satz 8.13.

(*iii*): Folgt aus Satz 8.13 und der Transitivität von „linear disjunkt“ in Körpertürmen.

(*iv*): Wird ausgelassen.

(*v*): Mit F/K und L/K sind auch F/K und L^a/K algebraisch disjunkt. Nach (*iv*) sind F/K und L^a/K dann auch linear disjunkt. Wegen der Transitivität von „linear disjunkt“ in Türmen sind dann auch FL/L und L^a/L linear disjunkt. Also ist FL/L regulär. □

Die Aussagen (*iii*) und (*v*) implizieren auch, daß ein Kompositum algebraisch disjunkter, regulärer Erweiterungen wieder regulär ist.

8.4 Beispiele

Wir betrachten nun Beispiele verschiedener Körper. Jeder Körper fällt unter einen der folgenden Typen.

1. Die Primkörper sind gleich $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{F}_p$ für eine Primzahl p.

2. Endliche Erweiterungen der Primkörper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{F}_p$ liefern Zahlkörper und endliche Körper.

3. Alle weiteren algebraischen Erweiterungskörper der Primkörper sind in den algebraischen Abschlüssen $\mathbb{Q}^a$ und $\mathbb{F}_p^a$ enthalten.

4. Rein transzendente Erweiterungen von Körpern K aus 1-3, also Körper der Form $K(X)$, wobei X eine Menge von Variablen bezeichnet.

5. Endliche und algebraische Erweiterungen E der Körper $K(X)$ in 4, wobei man K je nach Sichtweise beispielsweise als Primkörper von E oder als algebraischen Abschluß des Primkörpers von E in E wählen kann.

Sei $f = t^2 - x^3 - 1 \in \mathbb{Q}(x)[t]$. Durch Adjunktion einer Nullstelle y von f an $\mathbb{Q}(t)$ erhalten wir eine separable Erweiterung $K = \mathbb{Q}(x, y)$ vom Grad zwei von $\mathbb{Q}(x)$. Daher ist x ein separierendes Element (das heißt, $\{x\}$ ist eine separierende Transzendenzbasis). Die Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ ist separabel.

In $\mathbb{F}_p(x)$ ist x^p zwar transzendent und $\{x^p\}$ eine Transzendenzbasis, aber x^p ist nicht separierend. Nach Satz 8.11, (iii) muß es ein separierendes Element geben. Man kann beispielsweise x oder $1/(x+1)$ wählen. Die Erweiterung $\mathbb{F}_p(x)/\mathbb{F}_p$ ist daher ebenfalls separabel.

Eine nicht separable Erweiterung erhält man unter Benutzung von Satz 8.10 wie folgt. Sei $K = \mathbb{F}_p(z, x, y)$ der durch $x^p + y^p + z = 0$ definierte Körper. Da $x^p + y^p + z$ als Polynom über $\mathbb{F}_p(z)$ irreduzibel ist, hat $K/\mathbb{F}_p(z, x)$ den Grad p. Diese Erweiterung ist jedoch nicht linear disjunkt zu $\mathbb{F}_p(z^{1/p})$, da hier wegen $y + x + z^{1/p} = 0$ gilt, daß $K\mathbb{F}_p(z^{1/p})/\mathbb{F}_p(z^{1/p}, x)$ den Grad eins hat. Folglich ist $K/\mathbb{F}_p(z)$ nicht separabel.

Die Erweiterungen $\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q}$ und $K/\mathbb{Q}$ für $K = \mathbb{Q}(x, y)$ wie oben sind Beispiele für reguläre Erweiterungen. Endliche und algebraische Erweiterungen eines Körpers in Charakteristik Null und zum Beispiel die Erweiterung $\mathbb{Q}(x, \sqrt{2})/\mathbb{Q}$ sind separabel aber nach Satz 8.13 nicht regulär, da der Grundkörper nicht algebraisch abgeschlossen ist. Auf der anderen Seite ist $\mathbb{F}_p(z)$ im obigen Beispiel in $K = \mathbb{F}_p(z, x, y)$ zwar algebraisch abgeschlossen, aber die Erweiterung $K/\mathbb{F}_p(z)$ trotzdem nicht regulär, weil sie nicht separabel ist.

Kapitel 9

Moduln II

In diesem Kapitel werden das Tensorprodukt und die Begriffe projektiv, flach und lokal frei behandelt.

9.1 Tensorprodukte

Wir wollen auch kurz etwas zum Tensorprodukt sagen. Tensorprodukte bildet man von R-Moduln oder R-Algebren, und sie sind wieder R-Moduln bzw. R-Algebren. Wir betrachten vornehmlich den ersten Fall. Zur Vereinfachung sei R ein kommutativer Ring und M, N Moduln über R (links und rechts). Dies ist für das folgende keine wesentliche Einschränkung, spart aber ein paar Fälle und etwas Notation. Beim Tensorprodukt $M \otimes_R N$ handelt es sich um einen R-Modul, welcher von formalen Produkten $m \otimes n$ für $m \in M$ und $n \in N$ erzeugt wird. Die Elemente sind also von der Form $\sum_i m_i \otimes n_i$ für $m_i \in M$ und $n_i \in N$. Hierbei soll sich $\otimes$ wirklich wie eine Multiplikation verhalten, nur daß sie nicht „ausgeführt" wird sondern nur generisch ausgeführt wird (also unter Eingabe von m und n eben den „abstrakten Wert" $m \otimes n$ zurückliefert). Entsprechend wird gefordert $(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$ und analog für n_1, n_2. Die Angabe von R soll bedeuten, daß $mr \otimes n = m \otimes rn$ ist. Außerdem gelte $r(m \otimes n) = rm \otimes n = m \otimes rn$. Hier muß man im Nichtkommutativen etwas aufpassen, ob man von links oder rechts oder innen oder außen multiplizieren will. Beim Tensorprodukt von R-Algebren M und N soll per Definition auch noch $(m_1 \otimes n_1) \cdot (m_2 \otimes n_2) = (m_1 m_2) \otimes (n_1 n_2)$ gelten, doch dazu später.

9.1 Definition. Der R-Modul P zusammen mit einer R-bilinearen Abbildung $h : M \times N \to P$ heißt Tensorprodukt von M und N über R, wenn folgendes gilt. Ist g eine R-bilineare Abbildung $M \times N \to Q$ für einen beliebigen, weiteren R-Modul Q, so gibt es genau eine R-lineare Abbildung $f : P \to Q$ mit $g = f \circ h$.

9.2 Satz. *Für alle R-Moduln M und N existiert ein Tensorprodukt von M und N über R. Je zwei Tensorprodukte von M und N über R sind isomorph.*

Beweis. Zunächst zur Existenz. Sei V der von den Paaren $(m,n) \in M \times N$ erzeugte, freie R-Modul und I der Untermodul von V, welcher von den Elementen der Form $(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n)$, $(m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2)$, $(rm, n) - (m, rn)$ und $r(m,n) - (rm, n)$ erzeugt wird. Wir definieren die Abbildung $h : M \times N \to V/I$ durch $h(m,n) = (m,n) + I$. Die R-Bilinearität von h folgt unmittelbar aufgrund der Definition von I. Wir behaupten, daß V/I zusammen mit h ein Tensorprodukt von M und N über R ist.

Da V frei ist, können wir eine vorgegebene, bilineare Abbildung $g : M \times N \to Q$ zu einer linearen Abbildung $f' : V \to Q$ durch $f'((m,n)) = g(m,n)$ machen. Nun gilt $I \subseteq \ker(f')$ und durch Abspalten des Restklassenhomomorphismus $V \to V/I$ erhalten wir $f : V/I \to Q$. Damit gilt $f \circ h = g$, und die Existenz von f ist nachgewiesen. Es gibt aber auch nur einen einzigen Homomorphismus $f : V/I \to Q$ mit $f \circ h = g$, denn das Bild von h ist ein Erzeugendensystem von V/I. Damit ist V/I zusammen mit h tatsächlich ein Tensorprodukt von M und N über R.

Jetzt zur Eindeutigkeit bis auf Isomorphie. Sind B und B' zwei Tensorprodukte von M und N über R mit den zugehörigen bilinearen Abbildungen h und h', so gibt es $f \in \mathrm{Hom}_R(B, B')$ und $f' \in \mathrm{Hom}_R(B', B)$ mit $h' = f \circ h$ und $h = f' \circ h'$, also $h = f' \circ f \circ h$. Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage für B folgt $f' \circ f = \mathrm{id}_B$, und durch Symmetrie $f \circ f' = \mathrm{id}_{B'}$. Also sind B und B' isomorph. □

9.3 Definition. Für je zwei R-Moduln M und N bezeichne $M \otimes_R N$ ein (festgewähltes) Tensorprodukt von M und N über R mit der bilinaren Abbildung $\cdot \otimes \cdot : M \times N \to M \otimes_R N$, $(x,y) \mapsto x \otimes y$.

Die Menge der bilinearen Abbildungen $M \times N \to Q$ bildet einen R-Modul, welcher in natürlicher Weise isomorph zum R-Modul $\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N,Q))$ ist. Aufgrund der Eindeutigkeit von f in Definition 9.1 erhalten wir eine Abbildung $\phi : \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N,Q)) \to \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, Q)$, $g \mapsto f$ mit $g(x,y) = f(x \otimes y)$. Diese ist bijektiv: Sind g_1 und g_2 bilineare Abbildungen und f_1, f_2 die zugehörigen linearen Abbildungen und gilt $f_1 = f_2$, so ergibt sich auch $g_1 = f_1 \circ (\cdot \otimes \cdot) = f_2 \circ (\cdot \otimes \cdot) = g_2$. Also ist ϕ injektiv. Da für jedes lineare f die Abbildung $g = f \circ (\cdot \otimes \cdot)$ bilinear ist, ist ϕ auch surjektiv. Es gilt also $\mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, Q) \cong \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N,Q))$ (in natürlicher Weise als R-Moduln). Die Abbildung $\cdot \otimes \cdot$ ist damit „die universelle", auf $M \times N$ definierte bilineare Abbildung.

Die Elemente von $M \otimes_R N$ wie im Satz konstruiert sind also von der Form $\sum_i m_i \otimes n_i$, wobei $\otimes$ die Axiome einer Multiplikation erfüllt und mit der Multiplikation mit Elementen aus R verträglich ist. Speziell handelt es sich bei der Menge $\{m \otimes n \mid m \in M, n \in N\}$ um ein Erzeugendensystem von $M \otimes_R N$.

Seien nun M_1, M_2, N_1, N_2 Moduln über R und $f_i \in \mathrm{Hom}_R(M_i, N_i)$. Wir erhalten die Produktabbildung $f_1 \times f_2 : M_1 \times M_2 \to N_1 \times N_2$. Durch Komposition mit der bilinearen Abbildung $h_N : N_1 \times N_2 \to N_1 \otimes_R N_2$ ergibt dies eine bilineare Abbildung $M_1 \times M_2 \to N_1 \otimes N_2$, und wir können die bilineare Abbildung $h_M : M_1 \times M_2 \to M_1 \otimes M_2$ abspalten. Dies liefert eine lineare Abbildung $M_1 \otimes M_2 \to N_1 \otimes N_2$, welche mit $T(f_1, f_2)$ und als das Tensorprodukt von f_1 und f_2 bezeichnet wird. Sie ist durch $T(f_1, f_2)(m_1 \otimes m_2) = f_1(m_1) \otimes f_2(m_2)$ eindeutig bestimmt.

Zusammen erhalten wir eine Abbildung $\mathrm{Hom}_R(M_1, N_1) \times \mathrm{Hom}_R(M_2, N_2) \to \mathrm{Hom}_R(M_1 \otimes_R M_2, N_1 \otimes_R N_2)$, $(f_1, f_2) \mapsto T(f_1, f_2)$. Wegen $T(f_1, f_2)(m_1 \otimes m_2) = f_1(m_1) \otimes f_2(m_2)$ und $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ für $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M_i, N_i)$ ist diese Abbildung bilinear, und somit erhalten wir eine lineare Abbildung

$$\mathrm{Hom}_R(M_1, N_1) \otimes_R \mathrm{Hom}_R(M_2, N_2) \to \mathrm{Hom}_R(M_1 \otimes_R M_2, N_1 \otimes_R N_2),$$

welche durch $f_1 \otimes f_2 \mapsto T(f_1, f_2)$ definiert ist. Mittels dieses Homomorphismus können wir $f_1 \otimes f_2$ also stets auch als Element von $\mathrm{Hom}_R(M_1 \otimes_R M_2, N_1 \otimes_R N_2)$ auffassen. Unter Verwendung von Satz 9.4, (*ii*) ist es nicht schwer zu beweisen, daß dies ein Isomorphismus ist, wenn die M_i und N_i beispielsweise endlich erzeugt und frei sind.

Die universelle Eigenschaft der Tensorprodukte und etwas „Diagrammjagd" oder die konkrete Formel $T(f_1, f_2)(m_1 \otimes m_2) = f_1(m_1) \otimes f_2(m_2)$ zeigen die folgende, bifunktorielle Eigenschaft von $T(\cdot, \cdot)$: Sind P_1, P_2 weitere R-Moduln und $g_i \in \mathrm{Hom}_R(N_i, P_i)$, so gilt $T(g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2) = T(g_1, g_2) \circ T(f_1, f_2)$.

Ein wichtiger Spezialfall ist $M_2 = N_2 = P_2 = Q$ und $f_2 = g_2 = \mathrm{id}$. Tensorieren mit Q liefert dann einen Funktor in der Kategorie der R-Moduln, ein Homomorphimus $f : M \to N$ wird auf $T(f, \mathrm{id}) : M \otimes_R Q \to N \otimes_R Q$ mit $T(f, \mathrm{id})(m \otimes q) = f(m) \otimes q$ abgebildet. Dieser wird in Satz 9.4, (*iii*) angewendet.

9.4 Satz. *Seien M, N, P, Q R-Moduln und M_i eine Familie von R-Moduln.*

(*i*) $(M \otimes_R N) \otimes_R P \cong M \otimes_R (N \otimes_R P)$ *unter* $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z)$.

(*ii*) $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$ *unter* $x \otimes y \mapsto y \otimes x$.

(*iii*) $(\coprod_i M_i) \otimes_R N \cong \coprod_i (M_i \otimes_R N)$ *unter* $(\sum_i x_i) \otimes y \mapsto \sum_i (x_i \otimes y)$. *Das Tensorprodukt und die direkte Summenbildung sind also vertauschbar.*

(*iv*) *Ist* $M \to N \to P \to 0$ *eine exakte Sequenz, dann ist auch die zugehörige, mit Q tensorierte Sequenz* $M \otimes_R Q \to N \otimes_R Q \to P \otimes_R Q \to 0$ *exakt.*

Beweis. (*i*): Wir zeigen die Existenz eines Homomorphismus $f : (M \otimes_R N) \otimes_R P \to M \otimes_R (N \otimes_R P)$ mit $(x \otimes y) \otimes z \to x \otimes (y \otimes z)$. Wollen wir dies als Definition für f

nehmen, ergibt sich das Problem, daß wir die Wohldefiniertheit von f nachweisen müssen. Denn implizit extrahieren wir aus $(x \otimes y) \otimes z$ das unter Umständen nicht eindeutig bestimmte Paar (x, y, z) und definieren damit das Bild $x \otimes (y \otimes z)$. Um diesem Problem entgegenzutreten, verwendet man standardmäßig die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts.

Für $z \in P$ starten wir zunächst mit $g_z : M \times N \to M \otimes_R (N \otimes_R P)$, $g_z(x, y) = x \otimes (y \otimes z)$. Dies ist eine wohldefinierte bilineare Abbildung, so daß es $f_x : M \otimes N \to M \otimes_R (N \otimes_R P)$ mit $f_z(x \otimes y) = x \otimes (y \otimes z)$ gibt. Nun sei $g : (M \otimes_R N) \times P \to M \otimes_R (N \otimes_R P)$, $g(x \otimes y, z) = f_z(x \otimes y) = x \otimes (y \otimes z)$. Dies ist ebenfalls eine wohldefinierte, bilineare Abbildung. Damit erhalten wir schließlich den Homomorphismus $f : (M \otimes_R N) \otimes_R P \to M \otimes_R (N \otimes_R P)$ mit $(x \otimes y) \otimes z \to x \otimes (y \otimes z)$.

Analoge Argumente zeigen die Existenz eines Homomorphismus $f' : M \otimes_R (N \otimes_R P) \to (M \otimes_R N) \otimes_R P$ mit $x \otimes (y \otimes z) \to (x \otimes y) \otimes z$. Da es bei den Elementen um Erzeugende der Tensorprodukte handelt, ergibt sich $f \circ f' = \mathrm{id}$ und $f' \circ f = \mathrm{id}$.

Ein im Prinzip gleicher, aber kompakterer Beweis kann mit Hilfe des Lemmas von Yoneda geführt werden (siehe S. 208). Das geht wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_R((M \otimes_R N) \otimes_R P, \cdot) &\cong \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, \mathrm{Hom}_R(P, \cdot)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_R(P, \cdot))) \\
&\cong \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N \otimes_R P, \cdot)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R (N \otimes_R P), \cdot).
\end{aligned}$$

Also gilt auch $(M \otimes_R N) \otimes_R P \cong M \otimes_R (N \otimes_R P)$, und zwar unter $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z)$, was man durch Nachverfolgen der einzelnen Isomorphismen sehen kann.

(ii): Geht analog zu *(i)* (direkt und mit Lemma von Yoneda).

(iii): Wir definieren die bilineare Abbildung $g : (\coprod_i M_i) \times N \to \coprod_i (M_i \otimes N)$ durch $((\sum_i x_i), y) \mapsto \sum_i (x_i \otimes y)$, wobei wir die direkte Summeneigenschaft von $\coprod_i M_i$ verwenden. Daraus erhalten wir den Homomorphismus $f : (\coprod_i M_i) \otimes N \to \coprod_i (M_i \otimes N)$ mit $(\sum_i x_i) \otimes y \mapsto \sum_i (x_i \otimes y)$. Umgekehrt definieren wir die bilineare Abbildung $g_i' : M_i \times N \to (\coprod_i M_i) \otimes N$ durch $(x_i, y) \mapsto x_i \otimes y$ und erhalten den Homomorphismus $f_i' : M_i \otimes N \to (\coprod_i M_i) \otimes N$ mit $x_i \otimes y \mapsto x_i \otimes y$. Die universelle Eigenschaft der direkten Summe angewendet auf die f_i' liefert jetzt einen Homomorphismus $f' : \coprod_i (M_i \otimes N) \to (\coprod_i M_i) \otimes N$ mit $\sum_i (x_i \otimes y) \mapsto (\sum_i x_i) \otimes y$. Die Abbildungsvorschriften für f und f' schreiben die Bilder von Erzeugendensystemen vor. Es ergibt sich $f \circ f' = \mathrm{id}$ und $f' \circ f = \mathrm{id}$.

Die Aussage *(iii)* wird in Satz 9.5 noch einmal in allgemeinerer Form bewiesen.

(iv): Seien $f_1 : M \to N$ und $f_2 : N \to P$ die Homomorphismen aus der exakten Sequenz und $g_1 : M \otimes_R Q \to N \otimes_R Q$ und $g_2 : N \otimes_R Q \to P \otimes_R Q$

die zugehörigen, tensorierten Homomorphismen. Die Aussage $0 \otimes_R Q = 0$ wird in Lemma 9.6, (i) bewiesen.

Wir zeigen zuerst, daß g_2 surjektiv ist. Jedes Element aus $P \otimes_R Q$ ist eine endliche Summe von Elementen der Form $p \otimes q$. Daher genügt es zu zeigen, daß jedes dieser Elemente im Bild von g_2 liegt. Zu $p \in P$ gibt es aber $n \in N$ mit $f_2(n) = p$ nach Voraussetzung. Dann gilt $g_2(n \otimes q) = f(n) \otimes q = p \otimes q$, was zu zeigen war. Dies ergibt die Exaktheit bei $P \otimes_R Q$.

Da das Tensorieren der Nullabbildung die Nullabbildung liefert, folgt wegen $f_2 \circ f_1 = 0$ auch $g_2 \circ g_1 = 0$, also $\mathrm{im}(g_1) \subseteq \ker(g_2)$. Sei nun $I = \mathrm{im}(g_1)$ und $g_2' : N \otimes_R Q/I \to P \otimes_R Q$ der nach dem Homomorphiesatz eindeutig bestimmte Homomorphismus mit $g_2'(n \otimes q + I) = g_2(n \otimes q)$. Zum Nachweis der Exaktheit bei $N \otimes_R Q$ müssen wir beweisen, daß g_2' injektiv ist. Dazu konstruieren wir einen Homomorphismus $h : P \otimes_R Q \to N \otimes_R Q/I$ mit $h \circ g_2' = \mathrm{id}$: Für $p \in P$ und $q \in Q$ sei $n \in N$ mit $f_2(n) = p$. Wir definieren $h' : P \times Q \to N \otimes_R Q/I$ durch $h'(p,q) := n \otimes q + I$. Dies ist wohldefiniert: Für $n_1, n_2 \in N$ mit $f_2(n_1) = f_2(n_2) = p$ gilt $f_2(n_1 - n_2) = 0$, also gibt es $m \in M$ mit $n_1 - n_2 = f_1(m)$. Dann folgt $n_1 \otimes q - n_2 \otimes q = (n_1 - n_2) \otimes q = f_1(m) \otimes q \in I$. Außerdem ist h' bilinear, wie leicht zu sehen ist. Es gibt also einen Homomorphismus $h : P \otimes_R Q \to N \otimes_R Q/I$ mit $h(p \otimes q) = n \otimes q + I$. Nach Konstruktion gilt $h \circ g_2' = \mathrm{id}$ auf der Menge der Elemente der Form $n \otimes q + I$ und damit auch auf ganz $N \otimes_R Q/I$.

Man kann (iv) auch kürzer beweisen. Tensorieren mit Q ist nämlich ein linksadjungierter Funktor des Funktors $\mathrm{Hom}_R(Q, \cdot)$, denn es besteht die natürliche Äquivalenz

$$\mathrm{Hom}_R(\cdot \otimes Q, \cdot) \cong \mathrm{Hom}_R(\cdot, \mathrm{Hom}_R(Q, \cdot)).$$

Aufgrund allgemeiner Überlegungen ist dann Tensorieren mit Q rechtsexakt, es gilt also (iv) (siehe Kapitel 11). □

Bei nicht-kommutativen Ringen macht (ii) wenig Sinn, da man sonst die Multiplikationen von links oder rechts oder innen oder außen umordnen muß und leicht durcheinander kommen kann.

Die Aussage (iii) ist ein Spezialfall der folgenden Aussage für Kolimites von Diagrammen von R-Moduln (siehe Seite 211ff.).

9.5 Satz. *Sei N ein R-Modul und $\mathcal{D}$ ein Diagramm von R-Moduln. Sei $\mathcal{D} \otimes_R N$ das Diagramm, welches aus $\mathcal{D}$ durch Tensorieren der in $\mathcal{D}$ vorkommenden Moduln mit N entsteht. Dann gilt*

$$(\varinjlim \mathcal{D}) \otimes_R N \cong \varinjlim (\mathcal{D} \otimes_R N).$$

Das Tensorprodukt und die Kolimesbildung sind also vertauschbar.

Beweis. Wir zeigen, daß $\varinjlim(\mathcal{D}\otimes_R N)$ ein Tensorprodukt von $\varinjlim \mathcal{D}$ und N ist. Sei $g : (\varinjlim \mathcal{D}) \times N \to Q$ bilinear. Für jedes D_i in $\mathcal{D}$ sei $\iota_i : D_i \to \varinjlim \mathcal{D}$ die Injektion. Zurückziehen entlang ι_i liefert bilineare Abbildungen $g_i : D_i \times N \to Q$, und lineare Abbildungen $f_i : D_i \otimes_R N \to Q$. Da Tensorieren ein Funktor ist, bilden die $D_i \otimes_R N$ das Diagramm $\mathcal{D} \otimes_R N$. Etwas Diagrammjagd und die universelle Eigenschaft von Tensorprodukten zeigt, daß die f_i einen Morphismus $\mathcal{D} \otimes_R N \to Q$ bilden. Die universelle Eigenschaft vom Kolimes zeigt, daß es eine lineare Abbildung $f : \varinjlim(\mathcal{D} \otimes_R N) \to Q$ gibt. Die Konstruktionsschritte von f sind jeder für sich genommen eindeutig umkehrbar, so daß insbesondere f eindeutig durch g bestimmt ist. Für $Q = \varinjlim(\mathcal{D} \otimes_R N)$ erhalten wir die Strukurabbildung $h : (\varinjlim \mathcal{D}) \times N \to \varinjlim(\mathcal{D} \otimes_R N)$ wie in (i) aus der Identität auf $\varinjlim(\mathcal{D} \otimes_R N)$.

Alternativ kann man auch allgemein argumentieren, daß linksadjungierte Funktoren Kolimites in Kolimites überführen. Das geht unter Verwendung von Satz **??** im wesentlichen so:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_R((\varinjlim \mathcal{D}) \otimes_R N, \cdot) &\cong \operatorname{Hom}_R(\varinjlim \mathcal{D}, \operatorname{Hom}_R(N, \cdot)) \\
&\cong \varinjlim \operatorname{Hom}_R(\mathcal{D}, \operatorname{Hom}_R(N, \cdot)) \\
&\cong \varinjlim \operatorname{Hom}_R(\mathcal{D} \otimes_R N, \cdot) \\
&\cong \operatorname{Hom}_R(\varinjlim(\mathcal{D} \otimes_R N), \cdot).
\end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Yoneda schließt man jetzt $(\varinjlim \mathcal{D}) \otimes_R N \cong \varinjlim(\mathcal{D} \otimes_R N)$. □

Hier sind ein paar einfache Formeln, die bei der Berechnung von vorgelegten Tensorprodukten hilfreich sind.

9.6 Lemma. *Seien M, N Moduln über R.*

(i) *Ist $N = Rn$ frei vom Rang eins, so gilt $M \otimes_R N \cong M$ unter $m \otimes rn \mapsto rm$. Ist $N = \{0\}$, so gilt $M \otimes_R N \cong \{0\}$.*

(ii) *Sind die m_i und n_j ein Erzeugendensystem (eine Basis) von M bzw. N, so ist $m_i \otimes n_j$ ein Erzeugendensystem (eine Basis) von $M \otimes_R N$.*

Sind die n_j eine Basis von N, so schreibt sich jedes Element aus $M \otimes_R N$ als Summe $\sum_j x_j \otimes n_j$ mit eindeutig bestimmten $x_j \in M$.

(iii) *Es gilt $(M/I) \otimes_R (N/J) \cong M \otimes_R N/(I \otimes N + M \otimes J)$ für Untermoduln $I \subseteq M$ und $J \subseteq N$ unter $(m+I) \otimes (n+J) \mapsto (m \otimes n) + (I \otimes N + M \otimes J)$.*

(iv) *Es gelte $\sum_i m_i \otimes n_i = 0$ für $m_i \in M$ und $n_i \in N$, wobei die n_i ein Erzeugendensystem von N bilden. Dann gibt es $a_{i,j} \in R$ und $m'_j \in M$ mit $m_i = \sum_j a_{i,j} m'_j$ und $\sum_i a_{i,j} n_i = 0$ für alle j.*

Beweis. (i): Sei $N = Ry$ und $h : M \times N \to M$ die durch $(x, ry) \mapsto rx$ definierte, bilineare Abbildung. Jede bilineare Abbildung $f : M \times N \to P$ liefert mit $x \mapsto f(x, y)$ eine lineare Abbildung $g : M \to P$ mit $f = g \circ h$, wobei g wegen der Surjektivität von h eindeutig bestimmt ist. Die Eindeutigkeit des Tensorprodukts ergibt $M \cong M \otimes_R N$.

Bilineare Abbildungen auf $M \times \{0\}$ sind alles Nullabbildungen, entsprechen also den linearen Abbildungen auf $\{0\}$. Mit der bilinearen Abbildung $h : M \times \{0\} \to \{0\}$ liefert eine ähnliche Schlußweise wie eben $\{0\} \cong M \otimes_R \{0\}$.

(ii): Für $v = \sum_i \lambda_i m_i$ und $w = \sum_j \mu_j n_j$ gilt $v \otimes w = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (m_i \otimes n_j)$. Da jedes Element in $M \otimes_R N$ eine Summe von Elementen der Form $v \otimes w$ ist, folgt die Aussage über die Erzeugendensysteme.

Sei N frei mit Basis n_j. Aus $N = \oplus_j R n_j$ folgt $M \otimes_R N \cong \oplus_j (M \otimes_R R n_j) \cong \oplus_j M$ nach Satz 9.4, (ii) und nach (i). Unter den Isomorphismen wird $\sum_j x_j \otimes n_j$ mit $x_j \in M$ auf das Element von $\oplus_j M$ abgebildet, welches x_j an der j-ten Koordinate enthält. Die x_j sind also durch das Element $\sum_j x_j \otimes n_j$ eindeutig bestimmt. Dies zeigt die zweite Aussage in (ii).

Ferner bilden hier die $m_i \otimes n_j$ eine Basis des j-ten Komponentenmodul M, so daß $m_i \otimes n_j$ für i, j eine Basis von $M \otimes_R N$ ist.

(iii): Ergibt sich durch dreimalige Anwendung von Satz 9.4, (iii): Im folgenden sind die angegebenen „Untermoduln“ geeignet einzubetten. Es gilt $M/I \otimes N/J \cong (M/I \otimes N)/(M/I \otimes J)$ (tensorieren mit $M/I \otimes -$) und $M/I \otimes N \cong (M \otimes N)/(I \otimes N)$ (tensorieren mit $- \otimes N$) und $M/I \otimes J \cong (M \otimes J)/(I \otimes J)$ (tensorieren mit $- \otimes J$). Wir erhalten $M/I \otimes N/J \cong ((M \otimes N)/(I \otimes N))/((M \otimes J)/(I \otimes J)) \cong (M \otimes N)/(I \otimes N + M \otimes J)$, was zu zeigen war.

Eine bilineare Abbildung auf $(M/I) \times (N/J)$ entspricht den bilinearen Abbildungen auf $M \times N$, welche auf $I \times N$ und $M \times J$ Null sind, und diese wiederum entsprechen den linearen Abbildungen auf $M \otimes N$, deren Kern $I \otimes N + M \otimes J$ enthält. Dies verdeutlicht ebenfalls $M/I \otimes N/J \cong M \otimes N/(I \otimes N + M \otimes J)$.

(iv): Gibt es solche Elemente $a_{i,j}$ und m'_i, so folgt $\sum_i m_i \otimes n_i = \sum_i \left(\sum_j a_{i,j} m'_j\right) \otimes n_i = \sum_j m'_j \otimes \left(\sum_i a_{i,j} n_i\right) = 0$.

Für die Rückrichtung sei V frei und $f : V \to N$ surjektiv, so daß $n_i = f(g_i)$ für eine Basis g_i von V gilt. Die Sequenz $U \to V \to N \to 0$ mit $U = \ker(f)$ ist exakt. Aufgrund von Theorem 9.4, (iii) ist damit auch die Sequenz $M \otimes_R U \to M \otimes_R V \to M \otimes_R N \to 0$ exakt. Weil das Element $\sum_i m_i \otimes g_i$ auf Null abgebildet wird, gibt es aufgrund der Exaktheit bei V Elemente $m'_j \in M$ und $y_j \in U$ mit $\sum_i m_i \otimes g_i = \sum_j m'_j \otimes y_j$. Seien $a_{i,j} \in R$ mit $y_j = \sum_i a_{i,j} g_i$. Nach dem Beweis von (ii) folgt aus $\sum_i m_i \otimes g_i = \sum_j m'_j \otimes \left(\sum_i a_{i,j} g_i\right) = \sum_i \left(\sum_j a_{i,j} m'_j\right) \otimes g_i$ durch Koeffizientenvergleich, daß $\sum_j a_{i,j} m'_j = m_j$ ist. Schließlich gilt $0 = f(y_j) = \sum_i a_{i,j} n_i$ für alle j. $\square$

Die Aussage (iv) führt das Rechnen in Tensorprodukten auf lineare Algebra zurück. Die Definition des Tensorprodukts ist dafür nicht besonders geeignet. Die $a_{i,j}$ können nach dem Beweis als „Strukturkonstanten“ gewählt werden.

Ist R ein Ring und I ein Ideal, so gilt $I \otimes_R R \cong I$ nach (i), denn wegen $1 \in R$ ist R ein freier R-Modul vom Rang eins. Nach (iii) ergibt sich damit speziell $(R/I) \otimes_R (R/J) \cong R/(I+J)$ für Ideale I, J von R.

Ein paar Beispiele: $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^3 \cong \mathbb{Z}^6$. Weiter $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nach der eben gemachten Bemerkung. Ähnlich $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \otimes 7\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Es gilt auch $1 \otimes 3 = 3 \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0$. Mit diesen Beispielen und Satz 9.4, (ii) kann man Tensorprodukte von endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen nach Satz 4.27 leicht berechnen.

9.7 Satz. *Sei M ein R-Modul und $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann gilt*

$$(R/I) \otimes_R M \cong M/IM$$

unter der Abbildung $(r+I) \otimes m \mapsto rm + IM$.

Beweis. Wir tensorieren die exakte Sequenz $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ über R mit M und erhalten nach Lemma 9.4, (iii) und Lemma 9.6, (i) die exakte Sequenz $I \otimes_R M \to M \to (R/I) \otimes_R M \to 0$. Das Bild von $I \otimes M$ in M ist hierbei IM. Die Aussage über die Abbildung ergibt sich durch Nachverfolgen der einzelnen Abbildungen in den exakten Sequenzen. □

9.2 Induzierte und koinduzierte Moduln

Ist M ein R-Modul und $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus (also S eine R-Algebra), dann ist S auch ein R-Modul und wir können $S \otimes_R M$ als R-Modul definieren. Durch $s(x \otimes m) = (sx) \otimes m$ können wir $S \otimes_R M$ zu einem S-Modul machen. Dies erlaubt es, den Ring eines Moduls zu wechseln. Eine formalere Begründung dieser Konstruktion lautet wie folgt. Durch $(s_1, s_2, m) \mapsto (s_1 s_2) \otimes m$ wird eine 3-lineare Abbildung $S \times S \times M \to S \otimes_R M$ definiert. Dies liefert eine lineare Abbildung $S \otimes_R (S \otimes_R M) \to S \otimes_R M$ und damit eine bilineare Abbildung $S \times (S \otimes_R M) \to S \otimes_R M$, $(s_1, s_2 \otimes m) \mapsto (s_1 s_2) \otimes m$.

Eine alternative Konstruktion, welche aus M einen S-Modul macht, geht wie folgt: Wir betrachten die abelsche Gruppe $\mathrm{Hom}_R(S, M)$ und machen diese für $f \in \mathrm{Hom}_R(S, M)$ durch $(s \cdot f)(x) := f(sx)$ in einen S-Modul.

Wir bezeichnen $S \otimes_R M$ als den entlang f induzierten Modul von M und $\mathrm{Hom}_R(S, M)$ als den entlang f koinduzierten Modul von M. Die Zuordnungen $M \mapsto S \otimes_R M$ und $M \mapsto \mathrm{Hom}_R(S, M)$ liefern Funktoren der Kategorie der R-Moduln in die Kategorie der S-Moduln.

Wir können beide Prozesse in gewissem Sinne auch wieder rückgängig machen. Ist N ein S-Modul, so können wir N auch als R-Modul mittels $r \cdot x := f(r)x$ für $x \in N$ auffassen. Diesen Modul bezeichnen wir mit $N|_R$. Die Zuordnung $N \mapsto N|_R$ liefert einen Funktor der Kategorie der S-Moduln in die Kategorie der R-Moduln.

9.8 Satz. *Sei $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, M ein R-Modul und N ein S-Modul. Dann gibt es in M und N funktorielle Isomorphieen abelscher Gruppen*

$$\mathrm{Hom}_S(S \otimes_R M, N) \cong \mathrm{Hom}_R(M, N|_R)$$

$$\mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(S, M)) \cong \mathrm{Hom}_R(N|_R, M).$$

Beweis. (Skizze) Die Menge $\mathrm{Hom}_S(S \otimes_R M, N)$ kann als Menge von R-bilinearen Abbildungen $\phi : S \times M \to N$ angesehen werden, für die zusätzlich $\phi(s \times m) = s\phi(1 \times m)$ gilt. So ein ϕ wird allerdings durch die R-lineare Abbildung $\psi(m) = \phi(1 \times m)$ definiert, welche ein Element in $\mathrm{Hom}_R(M, N|_R)$ ist. Diese Zuordung ist auch umkehrbar. Daraus ergibt sich die erste Isomorphie.

Die zweite Isomorphie ist wie folgt gegeben. Sei $f \in \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(S, M))$. Dann ist das isomorphe Bild $g \in \mathrm{Hom}_R(N|_R, M)$ von f durch $g(x) = f(x, 1)$ gegeben. Ist $g \in \mathrm{Hom}_R(N|_R, M)$, so erhalten wir das isomorphe Urbild $f \in \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(S, M))$ von g durch $f(x, s) = g(sx)$. Man prüft leicht nach, daß hierdurch ein Isomorphismus gegeben wird. □

(Der Satz besagt, daß $M \mapsto S \otimes_R M$ linksadjungierter Funktor zum rechtsadjungierten Funktor $N \mapsto N|_R$ ist, und daß $M \mapsto \mathrm{Hom}_R(S, M)$ rechtsadjungierter Funktor zum linksadjungierten Funktor $N \mapsto N|_R$ ist. Speziell ist $M \mapsto S \otimes_R M$ damit rechtsexakt, $M \mapsto \mathrm{Hom}_R(S, M)$ linksexakt und $N \to N|_R$ exakt.)

Sei S eine R-Algebra, M ein S-Modul und N ein R-Modul. Dann wird $M|_R \otimes_R N$ vermöge $s(m \otimes n) := (sm \otimes n)$ zu einem S-Modul, den wir mit $M \otimes_R N$ bezeichnen. Dies ist im allgemeinen ein von $S \otimes_R (M|_R \otimes_R N)$ verschiedener S-Modul.

9.9 Satz. *Sei S eine R-Algebra, M ein S-Modul und N ein R-Modul. Dann gilt*

$$M \otimes_S (S \otimes_R N) \cong M \otimes_R N$$

als S-Moduln unter $m \otimes (s \otimes n) \mapsto (sm) \otimes n$. Die Isomorphie ist zudem funktoriell in M und N.

Beweis. Ähnlich wie bei der Assoziativität des Tensorprodukts. Die Abbildung $(m, s, n) \mapsto (sm) \otimes n$ ist R-bilinear in s und n und S-bilinear in m und s. Daher gibt es den S-Homomorphismus $m \otimes (s \otimes n) \mapsto (sm) \otimes n$. Umgekehrt ist $(m, n) \mapsto$

$m \otimes (1 \otimes n)$ in m und n R-bilinear und in m S-linear. Daher gibt es den S-Homomorphismus $m \otimes n \mapsto m \otimes (1 \otimes n)$. Die beiden S-Homomorphismen sind invers zueinander, was die Isomorphie beweist.

Die Funktorialität in M und N ergibt sich aus der konkreten Form der Isomorphie zusammen mit den funktoriellen Eigenschaften des Tensorprodukt. $\square$

Die Funktoren „Tensorieren" und „Induzieren" vertauschen also in dem im Satz angegebenen Sinn.

Hier ist noch ein Vergleich induzierter und koinduzierter Moduln für R-Algebren S, welche als R-Modul frei von endlichem Rang sind.

9.10 Satz. *Ist die R-Algebra S als R-Modul frei von endlichem Rang und M ein R-Modul, so gibt es eine Isomorphie von S-Moduln*

$$S \otimes_R M \cong \mathrm{Hom}_R(S, M).$$

Beweis. Übung. $\square$

9.3 Lokalisierungen

Sei M ein R-Modul und U eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge mit $1 \in U$ von R. Wir definieren die Lokalisierung $M[U^{-1}]$ genau wie $R[U^{-1}]$ als die Menge der formalen Brüche m/u für $m \in M$ und $u \in U$, wobei $m_1/u_1 = m_2/u_2$ genau dann gelten soll, wenn es ein $v \in U$ mit $vm_1u_2 = vm_2u_1$ gibt. Unter Verwendung der üblichen Bruchrechentechnik wird $M[U^{-1}]$ ein $R[U^{-1}]$-Modul. Die Elemente $u/1$ mit $u \in U$ sind Einheiten in $R[U^{-1}]$, da $(u/1)(1/u) = 1$ gilt. Wir erhalten auch eine R-lineare Abbildung $h : M \to M[U^{-1}]$, $m \mapsto m/1$. Der Kern von h besteht genau aus allen denjenigen $m \in M$, für die es ein $u \in U$ mit $um = 0$ gibt.

9.11 Satz. *Sei M ein R-Modul und $U \subseteq R$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt*

$$R[U^{-1}] \otimes_R M \cong M[U^{-1}]$$

unter der Abbildung $(r/u) \otimes m \mapsto (rm)/u$.

Beweis. Sei $h : R[U^{-1}] \times M \to M[U^{-1}]$ die Multiplikationsabbildung $r/u \times m \mapsto (rm)/u$ und $f : R[U^{-1}] \otimes_R M \to M[U^{-1}]$ der zugehörige R-lineare Homomorphismus (ist auch $R[U^{-1}]$-linear). Es ist offensichtlich, daß h und f surjektiv sind. Zum Beweis der Injektivität von f sei $f(\sum_i (r_i/u_i) \otimes m_i) = 0$ mit $r_i \in R$, $u_i \in U$ und $m_i \in M$ beliebig. Es gibt $u \in U$ und $m \in M$ mit $\sum_i (r_i/u_i) \otimes m_i = (1/u) \otimes m$ ($(r_i/u_i) \otimes m_i = (1/u_i)(1 \otimes r_i m_i)$ schreiben, ausklammern und auf „Hauptnenner" bringen). Da u in $R[U^{-1}]$ eine Einheit ist, folgt aus $f((1/u) \otimes m) = 0$

durch Multiplikation mit u bereits $uf((1/u)(1 \otimes m)) = f(u(1/u)(1 \otimes m)) = f(1 \otimes m) = m/1 = 0$ in $M[U^{-1}]$. Es gibt also $v \in U$ mit $vm = 0$ und daher $v(1 \otimes m) = 1 \otimes (vm) = 1 \otimes 0 = 0$. Da v in $R[U^{-1}]$ eine Einheit ist, gilt $1 \otimes m = 0$ und auch $(1/u) \otimes m = 0$ in $R[U^{-1}] \otimes_R M$. □

Lokalisieren entspricht also dem Tensorieren mit $R[U^{-1}]$ über R und ist damit ein Funktor. Zu einem Homomorphismus $f : M \to N$ gibt es also einen Homomorphismus $g : M[U^{-1}] \to N[U^{-1}]$.

9.12 Satz. *Sei* $0 \to I \to M \to N$ *eine exakte Sequenz. Dann ist auch die zugehörige, lokalisierte Sequenz* $0 \to I[U^{-1}] \to M[U^{-1}] \to N[U^{-1}]$ *exakt.*

Beweis. Seien $f_1 : I \to M$ und $f_2 : M \to N$ die Homomorphismen aus der exakten Sequenz und seien $g_1 : I[U^{-1}] \to M[U^{-1}]$ und $g_2 : M[U^{-1}] \to N[U^{-1}]$ die zugehörigen lokalisierten Homomorphismen.

Wir zeigen zuerst, daß g_1 injektiv und die Sequenz somit bei $I[U^{-1}]$ exakt ist. Ist $m/u \in \ker(g_1)$, so gilt $g_1(m/u) = f_1(m)/u = 0$ und daher gibt es ein $v \in U$ mit $vf_1(m) = 0$. Es folgt $f_1(vm) = 0$ und wegen der Injektivität von f_1 auch $vm = 0$. Somit gilt $m/u = 0$ und die Sequenz ist bei $I[U^{-1}]$ exakt.

Für jeden Monomorphismus $\phi : I \to M$ ist die Sequenz $0 \to I \to M \to M/\phi(M)$ mit der Nullabbildung, ϕ und dem kanonischen Epimorphismus exakt. Nach dem vorhergehenden Absatz überführt Lokalisieren also Monomorphismen in Monomorphismen.

Die Exaktheit bei $M[U^{-1}]$ folgt jetzt allgemein aus der Rechtsexaktheit des Lokalisierens bzw. des Tensorprodukts. Wir können f_2 in der Form $i \circ f_2'$ mit $f_2' : M \to f_2(M)$ und $i : f_2(M) \to N$ schreiben. Seien $g_2' : M[U^{-1}] \to f_2(M)[U^{-1}]$ und $j : f_2(M)[U^{-1}] \to N[U^{-1}]$ die lokalisierten Homomorphismen. Dann gilt wegen der Funktoreigenschaft des Lokalisierens bzw. des Tensorprodukts $g_2 = j \circ g_2'$. Mit i ist auch j nach dem bereits Bewiesenen ein Monomorphismus. Also folgt $\ker(g_2') = \ker(g_2)$.

Die exakte Sequenz $I \to M \to f_2(M) \to 0$ mit f_1, f_2' und der Nullabbildung geht wegen der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts in die exakte Sequenz $I[U^{-1}] \to M[U^{-1}] \to f_2(M)[U^{-1}] \to 0$ mit g_1, g_2' und der Nullabbildung über. Also gilt $\ker(g_2) = \ker(g_2') = \mathrm{im}(g_1)$ und wir erhalten die Exaktheit unserer Ausgangssequenz bei M. □

Satz 9.12 und Satz 9.4, (*iii*) bedeuten, daß Lokalisieren ein exakter Funktor ist. Ein exakter Funktor erhält Kerne und Kokerne.

Hier ist eine Anwendung des Lokalisierens: Nach der obigen Aussage über den Kern der Lokalisierungsabbildung h kann ein torsionsfreier Modul M über einem Integritätsring R in den Vektorraum $\mathrm{Quot}(R) \otimes_R M$ eingebettet werden.

Bei der Untersuchung von solchen Moduln M können wir also bei Bedarf auf einen umgebenden Vektorraum zurückgreifen.

Sei M ein R-Modul und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R. Sei $U = R\backslash\mathfrak{p}$. Wir definieren dann die Lokalisierung von M bei $\mathfrak{p}$ als $M_\mathfrak{p} = M[U^{-1}]$. Dies ist ein $R_\mathfrak{p}$-Modul. Ist N ein weiterer R-Modul und $\phi : M \to N$ ein Homomorphismus, so erhalten wir durch Lokalisieren den Homomorphismus $\phi_\mathfrak{p} : M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$.

Für $f \in R$ sei $U = \{f^i \mid i \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\}$. Wir definieren die Lokalisierung von M an f als $M_f = M[U^{-1}]$. Dies ist ein R_f-Modul, wobei $R_f = R[U^{-1}]$. Ist N ein weiterer R-Modul und $\phi : M \to N$ ein Homomorphismus, so erhalten wir durch Lokalisieren den Homomorphismus $\phi_f : M_f \to N_f$.

9.13 Satz. *Sei M ein R-Modul.*

(i) *Für $m \in M$ ist $m = 0$ genau dann, wenn $m/1 = 0$ in $M_\mathfrak{m}$ für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R gilt.*

(ii) *Es ist $M = 0$ genau dann, wenn $M_\mathfrak{m} = 0$ für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R gilt.*

Sei $\phi : M \to N$ ein Homomorphismus der R-Moduln M und N und sei E eine der Eigenschaften „Isomorphismus“, „Monomorphismus“, „Epimorphismus“. Seien $f_i, g_i \in R$ mit $1 = \sum_i f_i g_i$. Dann sind äquivalent:

(iii) *Der Homomorphismus ϕ besitzt die Eigenschaft E.*

(iv) *Die Homomorphismen ϕ_{f_i} besitzen die Eigenschaft E.*

(v) *Die Homomorphismen $\phi_\mathfrak{m}$ besitzen die Eigenschaft E für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von R.*

Beweis. (i): Das Element $m/1$ ist genau dann Null in $M_\mathfrak{m}$, wenn es ein $u \in R\backslash\mathfrak{m}$ mit $um = 0$ gibt, und dies ist äquivalent zur Bedingung $\mathrm{Ann}_R(m) \not\subseteq \mathfrak{m}$. Nun gilt $m = 0$ genau dann, wenn $\mathrm{Ann}_R(m) = R$ ist, und dieses gilt genau dann, wenn $\mathrm{Ann}_R(m) \not\subseteq \mathfrak{m}$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ gilt.

(ii): Folgt aus (i).

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Klar, da Lokalisieren an f_i ein exakter Funktor ist.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Für jedes $\mathfrak{m}$ gibt es ein f_i mit $f_i \in R\backslash\mathfrak{m}$, da das von den f_i erzeugte Ideal ganz R ist. Sei $\mathfrak{m}'$ das von $\mathfrak{m}$ in R_{f_i} erzeugte, maximale Ideal. Dann gilt $\phi_\mathfrak{m} = (\phi_{f_i})_{\mathfrak{m}'}$ und die Aussage folgt, da Lokalisieren bei $\mathfrak{m}'$ ein exakter Funktor ist.

(v) $\Rightarrow$ (iii): Sei $E =$ „Monomorphismus“. Der Homomorphimus ϕ ist genau dann ein Monomorphismus, wenn $\ker(\phi) = 0$ gilt. Da Lokalisieren Kerne in Kerne überführt, gilt $0 = \ker(\phi_\mathfrak{m}) = \ker(\phi)_\mathfrak{m}$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$, also $\ker(\phi) = 0$ nach (ii).

Sei $E =$ „Epimorphismus“. Der Homomorphimus ϕ ist genau dann ein Epimorphismus, wenn $\mathrm{coker}(\phi) = 0$ gilt. Da Lokalisieren Kokerne in Kokerne überführt, gilt $0 = \mathrm{coker}(\phi_\mathfrak{m}) = \mathrm{coker}(\phi)_\mathfrak{m}$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$, also $\mathrm{coker}(\phi) = 0$ nach (ii).

Die Aussage für $E =$ „Isomorphismus“ folgt aus der für „Monomorphismus“ und „Epimorphismus“. □

9.4 Flache Moduln

Ist $I \subseteq R$ ein Ideal, so motivieren Satz 9.7 und Satz 9.11 auch die Formel $I \otimes_R M \cong IM$, wobei der Isomorphismus durch die Multiplikationsabbildung $i \otimes m \mapsto im$ gegeben sein sollte. Dies ist jedoch im allgemeinen falsch, die Abbildung ist zwar immer surjektiv (wegen der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts, oder auch direkt einsichtig), aber nicht unbedingt injektiv. Für $I = Ra$ gilt zum Beispiel $I \otimes_R (R/I) \cong R \otimes_R (R/I) \cong R/I$, aber $I(R/I) = \{0\}$. Insbesondere ist das Bild von $I \otimes_R (R/I)$ in $R \otimes_R (R/I)$ gleich Null, denn in $R \otimes_R (R/I)$ gilt $ra \otimes x = r \otimes ax = r \otimes 0 = 0$. Man mache sich klar, daß man in $I \otimes_R (R/I)$ so nicht rechnen kann und vergleiche mit dem Kriterium in Lemma 9.6, (iv). Die injektive Abbildung $I \to R$ wurde also durch Tensorierung mit R/I in eine nicht injektive Abbildung überführt (nach Satz 9.4, (iii) kann dies mit surjektiven Abbildungen nicht passieren). Dieses Verhalten wird zum Anlaß der folgenden Definition genommen.

9.14 Definition. Sei M ein R-Modul. Dann heißt M flach, wenn injektive Abbildungen zwischen beliebigen R-Moduln durch Tensorieren mit M wieder in injektive Abbildungen überführt werden.

Anders ausgedrückt: M heißt flach, wenn Tensorieren mit M ein exakter Funktor ist.

Die Äquivalenz der beiden Definitionsvarianten in Definition 9.14 folgt aus der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts.

9.15 Satz. *Ein R-Modul M ist genau dann flach, wenn die Multiplikationsabbildung $i \otimes m \mapsto im$ einen Isomorphismus $I \otimes_R M \cong IM$ für alle Ideale I von R ergibt.*

Beweis. Wird ausgelassen. □

Ein Ausdruck $\sum_i \lambda_i m_i$ in IM mit $\lambda_i \in I$ und $m_i \in M$ soll also genau dann Null sein, wenn dies aufgrund R-bilinearer Relationen der Fall ist. Der Modul IM

soll in diesem Sinn also keine Relationen außer den Relationen der Bilinearität zwischen I und M enthalten. Wir verwenden diesen Satz aber nicht weiter.

Ist U ein Untermodul und direkter Summand des R-Moduls M, so erhalten wir durch Tensorieren der Inklusion $U \to M$ mit einem R-Modul N stets eine Inklusion $U \otimes_R N \to M \otimes_R N$. Denn nach Lemma 9.4, (ii) erhalten wir für V mit $M \cong U \oplus V$ einen Isomorphismus $(U \otimes_R N) \oplus (V \otimes_R N) \to M \otimes_R N$, dessen Einschränkung auf $U \otimes_R N$ gerade unsere Abbildung $U \otimes_R N \to M \otimes_R N$ ergibt.

Grob gesagt verlieren beliebige Monomorphismen $U \to M$ durch Tensorieren mit N ihre Injektivität genau dann, wenn Elemente $x \in U$ durch Einbetten nach M zu Vielfachen $x = ry$ mit $y \in M$ und $r \in R$ werden, wobei y nicht im Bild von U in M und r im Annulator von Elementen n aus N liegt. Genauer sind x, y durch x_i, y_i und r durch eine Matrix $(r_{i,j})_{i,j}$ und n durch n_j zu ersetzen. Vergleiche mit dem Kriterium aus Lemma 9.6, (iv).

9.16 Definition. Ist S eine R-Algebra und ist S als R-Modul flach, so nennen wir S eine flache R-Algebra. Ist $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, so nennen wir f flach, wenn die zugehörige R-Algebra S flach ist.

9.17 Satz. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Für die R-Moduln M_i ist $M = \coprod_i M_i$ genau dann flach, wenn jedes M_i flach ist.*

(ii) *Sind M und N flache R-Moduln, dann ist auch $M \otimes_R N$ ein flacher R-Modul.*

(iii) *Ist S eine R-Algebra und N ein flacher R-Modul, so ist $S \otimes_R N$ ein flacher S-Modul.*

(iv) *Ist S eine flache R-Algebra und N ein flacher S-Modul, so ist $N|_R$ ein flacher R-Modul.*

Beweis. (i): Sei $h : N \to P$ ein Homomorphismus. Durch Tensorieren erhalten wir $f : N \otimes_R M \to P \otimes_R M$ und $f_i : N \otimes_R M_i \to P \otimes_R M_i$. Nach Lemma 9.4, (ii) gilt $N \otimes_R M \cong \coprod_i (N \otimes_R M_i)$ und $P \otimes_R M \cong \coprod_i (P \otimes_R M_i)$. Fassen wir damit die $N \otimes_R M_i$ und $P \otimes_R M_i$ als Untermoduln von $N \otimes_R M$ und $P \otimes_R M$ auf, so stimmen f eingeschränkt auf $N \otimes_R M_i$ und f_i überein. Dann ist f genau dann injektiv, wenn alle f_i injektiv sind, und dies beweist die Aussage.

(ii): Tensorieren mit $M \otimes_R N$ entspricht Tensorieren mit M und anschließend Tensorieren mit N. Da $\cdot \otimes_R M$ und $\cdot \otimes_R N$ exakt sind, ist auch $\cdot \otimes_R (M \otimes_R N)$ exakt.

(iii): Tensorieren über S mit $S \otimes_R N$ ist nach Satz 9.9 das gleiche wie Tensorieren über R mit N. Da N flach ist, ist Tensorieren über R mit N exakt. Also ist Tensorieren über S mit $S \otimes_R N$ ebenfalls exakt.

(iv): Sei M ein R-Modul. Nach Satz 9.9 gilt dann (mit M und N vertauscht) die in M funktorielle Isomorphie $M \otimes_R N \cong (M \otimes_R S) \otimes_S N$ als S-Moduln und somit auch als R-Moduln. Nach Voraussetzung sind $\cdot \otimes_R S$ und $\cdot \otimes_S N$ exakt, also ist auch $\cdot \otimes_R N$ exakt. □

Als Beispiel zu (i) sind alle freien R-Moduln flach, da R als R-Modul flach ist. Ein endlich erzeugter Modul über einem Hauptidealring ist damit nach Satz 4.28, (ii) genau dann flach, wenn er torsionsfrei ist. Nach Satz 9.12 ist eine Lokalisierung $R[U^{-1}]$ als R-Modul stets flach.

Ein R-Modul M heißt endlich präsentiert, wenn es einen Epimorphismus $R^n \to M$ mit $n < \infty$ und endlich erzeugtem Kern gibt.

Sei $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, so daß S eine R-Algebra wird, und seien M, N zwei R-Moduln. Tensorieren mit S über R liefert einen R-Homomorphismus $\mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R M, S \otimes_R N)$ mit $f \mapsto \mathrm{id} \otimes f$. Da der Wertebereich ein S-Modul ist, faktorisiert dieser Homomorphismus nach Satz 9.8 eindeutig durch den S-Homomorphismus $\phi : S \otimes_R \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R M, S \otimes_R N)$ mit $s \otimes f \mapsto s(\mathrm{id} \otimes f)$.

9.18 Satz. *Sei S als R-Modul flach und M endlich präsentiert. Dann liefert ϕ einen Isomorphismus*

$$S \otimes_R \mathrm{Hom}_R(M, N) \cong \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R M, S \otimes_R N).$$

Beweis. Soll noch eingegeben werden. □

Eine spezielle Anwendung des Satzes ergibt sich für $S = R[U^{-1}]$, so daß wir mit ϕ einen Isomorphismus $\mathrm{Hom}_R(M, N)[U^{-1}] \cong \mathrm{Hom}_{R[U^{-1}]}(M[U^{-1}], N[U^{-1}])$ erhalten. Beispielsweise gibt es damit für jeden Homomorphismus $f : M[U^{-1}] \to N[U^{-1}]$ ein $u \in U$ und $g : M \to N$ mit $uf(m) = g(m)$ in $N[U^{-1}]$ für alle $m \in M$. Es kann also aus der Existenz von Homomorphismen lokalisierter Moduln in gewisser Weise auf die Existenz von Homomorphismen der Ausgangsmoduln geschlossen werden.

9.5 Freie Moduln

In diesem Abschnitt diskutieren wir ein paar weitere Aspekte und Eigenschaften freier Moduln.

Satz 4.9, (ii) hatte zum Inhalt, daß die Kardinalitäten beliebiger Basen eines R-Moduls für einen kommutativen Ring R übereinstimmen. Für nicht kommutative Ringe ist dies im allgemeinen nicht richtig. Sei zum Beispiel V ein unendlich dimensionaler K-Vektorraum. Dann gibt es einen Isomorphismus $f : V \oplus V \to V$. Wir bezeichnen mit $\iota_1, \iota_2 : V \to V \oplus V$ die Einbettung in den ersten bzw. zweiten Summand. Wir erhalten Vektorraumisomomorphismen $\mathrm{End}_K(V) \cong \mathrm{Hom}_K(V \oplus V, V)$ durch $g \mapsto g \circ f$ und $\mathrm{Hom}_K(V \oplus V, V) \cong \mathrm{End}_K(V) \times \mathrm{End}_K(V)$ durch $h \mapsto (h \circ \iota_1, h \circ \iota_2)$. Mit $R = \mathrm{End}_K(V)$ liefert dies zusammen einen Vektorraumisomorphismus $\psi : R \to R \times R$. Werden R und $R \times R$ in der natürlichen Weise als R-Moduln aufgefaßt, so ist ψ sogar R-linear: Für $r, g \in R$ gilt $r\psi(g) = (r \circ g \circ f \circ \iota_1, r \circ g \circ f \circ \iota_2) = \psi(rg)$. Somit besitzt R als R-Modul eine einelementige und eine zweielementige Basis („Eilenberg Schwindel“).

Freie Moduln besitzen die folgende Eigenschaft, wie in Satz 4.9, (i) gezeigt wurde: Sei B eine Basis des R-Moduls M und N irgendein weiterer R-Modul. Für jede Abbildung von Mengen $f : B \to N$ gibt es genau ein Element in $\mathrm{Hom}_R(M, N)$, welches f fortsetzt. Ähnlich verhält es sich übrigens auch bei Polynomringen (die „frei“ erzeugten Ringen entsprechen) und dem Einsetzhomomorphismus. Hier sind zwei weitere Eigenschaften, die darauf aufbauen.

9.19 Satz. *Sei N ein R-Modul.*

(i) *Es gibt einen freien R-Modul M und einen Epimorphimus $f : M \to N$, so daß $N \cong M/\ker(f)$.*

(ii) *Ist M ein freier R-Modul und $f : N \to M$ ein Epimorphismus, so gibt es ein $g : M \to N$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_M$.*

Beweis. (i) : Sei B ein Erzeugendensystem von N und $M = \coprod_{b \in B} R$. Wir definieren f durch $f((\lambda_b)_{b \in B}) = \sum_{b \in B} \lambda_b b$. Dies Isomorphie folgt aus dem ersten Isomorphiesatz.

(ii): Für jedes Basiselement $b \in B$ wählen wir ein Urbild $c \in f^{-1}(b)$ und definieren $g_0(b) = c$. Dies liefert $g_0 : B \to N$ und dann $g : M \to N$. □

Hier sind die zu Satz 9.17 analogen Aussagen für „frei“ statt „flach“.

9.20 Satz. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Für die R-Moduln M_i ist $M = \coprod_i M_i$ frei, wenn jedes M_i frei ist.*

(ii) *Sind M und N freie R-Moduln, dann ist auch $M \otimes_R N$ ein freier R-Modul.*

(iii) *Ist S eine R-Algebra und N ein freier R-Modul, so ist $S \otimes_R N$ ein freier S-Modul.*

(*iv*) *Ist S eine freie R-Algebra und N ein freier S-Modul, so ist $N|_R$ ein freier R-Modul.*

Beweis. (*i*): Die Vereinigung der Basen der M_i liefert eine Basis von M.

(*ii*) und (*iii*): Folgen aus Satz 9.4, (*iii*) und Lemma 9.6, (*ii*).

(*iv*): Analog wie im Gradsatz: Sind die n_j eine S-Basis von N und die s_i eine R-Basis von S, so sind die $s_i n_j$ eine R-Basis von N. □

Die Umkehrung der Aussage (*i*) ist im allgemeinen falsch. Es gibt Ringe R und Ideale I, J von R, so daß $R \oplus R \cong I \oplus J$ gilt, aber I und J nicht frei sind. Speziell dürfen I, J hier keine Hauptideale sein. Konkrete Beispiele kommen später.

9.6 Projektive Moduln

Die Definition von „frei“ benötigt explizit Elemente von M. Auf der anderen Seite wird in Satz 9.19, (*ii*) eine nützliche, „elementfreie“ Eigenschaft angegeben. Diese macht somit auch in allgemeinerem kategoriellen Rahmen Sinn und man macht sie zur Grundlage einer weiteren Definition. Wie sich herausstellt, ist diese Eigenschaft echt schwächer als „frei“.

9.21 Definition. Sei M ein R-Modul. Dann heißt M projektiv, wenn es für jeden R-Modul N und Epimorphismus $f : N \to M$ einen Homomorphismus $g : M \to N$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_M$ gibt.

Der Homomorphismus g ist wegen $f \circ g = \mathrm{id}_M$ injektiv.

9.22 Satz. *Sei M ein R-Modul. Dann sind äquivalent.*

(*i*) *M ist projektiv.*

(*ii*) *Es gibt einen R-Modul U und einen freien R-Modul N mit $M \oplus U \cong N$.*

(*iii*) *Es gibt ein Erzeugendensystem B von M und „Koordinatenfunktionale“ $\lambda_b \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$ mit $x = \sum_{b \in B} \lambda_b(x) b$.*

(*iv*) *Seien N_1, N_2 beliebige R-Moduln und $f \in \mathrm{Hom}_R(N_1, N_2)$ ein Epimorphismus. Für jedes $g \in \mathrm{Hom}_R(M, N_2)$ gibt es ein $h \in \mathrm{Hom}_R(M, N_1)$ mit $g = f \circ h$.*

Beweis. (*i*) ⇒ (*ii*): Nach Satz 9.19, (*ii*) gibt es einen freien R-Modul N und einen Epimorphismus $f : N \to M$. Wegen (*i*) gibt es einen Monomorphismus $g : M \to N$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_M$. Für den Untermodul $U = \{x - g(f(x)) \,|\, x \in N\} \subseteq$

$\ker(f)$ gilt dann $g(M) + U = N$ und $g(M) \cap U \subseteq g(M) \cap \ker(f) = \{0\}$, also $N = g(M) \oplus U \cong M \oplus U$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Nach (ii) gibt es einen freien R-Modul N, einen Epimorphismus $f : N \to M$ mit $\ker(f) = U$ und einen Monomorphismus $g : M \to N$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_M$. Seien die a_i eine Basis von N. Dann sind die $b_i = f(a_i)$ ein Erzeugendensystem von M, weil f surjektiv ist. Da die a_i eine Basis bilden, gibt es Koordinatenfunktionale $\mu_i \in \mathrm{Hom}_R(N, R)$ mit $y = \sum_i \mu_i(y)a_i$ für alle $y \in N$. Wir definieren $\lambda_i \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$ durch $\lambda_i(x) = \mu_i(g(x))$. Wegen $g(b_i) - a_i \in \ker(f)$ gilt dann $g(x - \sum_i \lambda_i(x)b_i) \in g(x) - \sum_i \mu_i(g(x))a_i + \ker(f) = \ker(f)$. Wegen $g(M) \cap \ker(f) = \{0\}$ folgt $g(x - \sum_i \lambda_i(x)b_i) = 0$. Da g injektiv ist, ergibt sich $x - \sum_i \lambda_i(x)b_i = 0$ und damit (iii).

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Sei B ein Erzeugendensystem mit Koordinatenfunktionalen λ_b für $b \in B$ wie in (iii). Wir wählen für jedes $b \in B$ ein $y_b \in f^{-1}(g(b))$. Dies ist möglich, da f surjektiv ist. Wir definieren dann $h \in \mathrm{Hom}_R(M, N_1)$ durch $h(x) = \sum_b \lambda_b(x)y_b$. Nach Definition sind die λ_b R-linear und für fast alle $b \in B$ gilt $\lambda_b(x) = 0$. Daher ist h wohldefiniert und ein Element von $\mathrm{Hom}_R(M, N_1)$. Weiter gilt $f(h(x)) = \sum_b \lambda_b(x)f(y_b) = \sum_b \lambda_b(x)g(b) = g(\sum_b \lambda_b(x)b) = g(x)$, also wie gewünscht $f \circ h = g$.

$(iv) \Rightarrow (i)$: Sei $f : N \to M$ der Epimorphismus aus (i) bzw. der Definition 9.21. Wir wenden (iv) mit $N_1 = N$, $N_2 = M$ und $g = \mathrm{id}_M$ an und erhalten direkt Aussage (i). □

Satz 9.22, (iii) ist eine Verallgemeinerung der Aussage für freie Moduln M, daß man einen Homomorphismus $f : M \to N$ durch seine Werte auf einer Basis von M definieren kann.

Ist M ein R-Modul, so ist der Funktor $\mathrm{Hom}_R(M, \cdot)$ linksexakt. Satz 9.22, (iv) läßt sich damit folgendermaßen umformulieren:

9.23 Korollar. *Ein R-Modul M ist genau dann projektiv, wenn der Funktor $\mathrm{Hom}_R(M, \cdot)$ exakt ist.*

Beweis. Da $\mathrm{Hom}_R(M, \cdot)$ linksexakt ist, muß für Exaktheit nur noch nachgewiesen werden, daß surjektive Abildungen in surjektive Abbildungen überführt werden. Das ist aber genau die Aussage von (iv). □

Hier sind die zu Satz 9.17 analogen Aussagen für „projektiv“ statt „flach“.

9.24 Satz. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Für die R-Moduln M_i ist $M = \coprod_i M_i$ genau dann projektiv, wenn jedes M_i projektiv ist.*

(*ii*) *Sind M und N projektive R-Moduln, dann ist auch $M \otimes_R N$ ein projektiver R-Modul.*

(*iii*) *Ist S eine R-Algebra und N ein projektiver R-Modul, so ist $S \otimes_R N$ ein projektiver S-Modul.*

(*iv*) *Ist S eine projektive R-Algebra und N ein projektiver S-Modul, so ist $N|_R$ ein projektiver R-Modul.*

Beweis. (*i*): Folgt direkt aus Satz 9.22, (*ii*) und Satz 9.20, (*i*).

(*ii*) und (*iii*): Folgen aus Satz 9.22, (*ii*), Satz 9.4, (*iii*) und Satz 9.20, (*ii*) und (*iii*).

(*iv*): Ähnlich wie im Gradsatz: Seien die n_j ein Erzeugendensystem von N mit den Koordinatenfunktionalen $\lambda_j \in \mathrm{Hom}_S(N, S)$ und die s_i ein Erzeugendensystem von S mit den Koordinatenfunktionalen $\mu_i \in \mathrm{Hom}_R(S, R)$. Dann sind die $s_i m_j$ ein Erzeugendensystem mit den Koodinatenfunktionalen $\mu_i \circ \lambda_j \in \mathrm{Hom}_R(N, R)$. Nach Satz 9.22, (*iii*) ist N als R-Modul also projektiv. □

9.7 Satz von Cayley-Hamilton und Lemma von Nakayama

Im folgenden bezeichnet R wieder einen kommutativen Ring mit 1.

9.25 Satz (Cayley-Hamilton)**.** *Sei M ein von n Elementen erzeugter R-Modul und I ein Ideal von R. Sei $\phi \in \mathrm{End}_R(M)$ ein Endomorphismus von M. Gilt $\phi(M) \subseteq IM$, so gibt es ein $f = \sum_{i=0}^n \lambda_{n-i} x^i \in R[x]$ mit $\lambda_0 = 1$, $\lambda_i \in I^i$ für $0 \leq i \leq n$ und $f(\phi) = 0$ in $\mathrm{End}_R(M)$.*

Beweis. Seien $m_1, \ldots, m_n$ Erzeuger von M. Nach Voraussetzung existiert ein $A = (a_{i,j})_{i,j} \in I^{n \times n}$ mit $\phi(m_i) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} m_j$ für alle $1 \leq i \leq n$. Vermöge $g(x)m := g(\phi)(m)$ wird M zu einem $R[x]$-Modul. Dann gilt $x(m_1, \ldots, m_n)^t = A(m_1, \ldots, m_n)^t$ und $(xI_n - A)(m_1, \ldots, m_n)^t = 0$. Durch Multiplikation dieser Gleichung von links mit der Pseudoinversen von $xI_n - A$ (siehe Satz 4.10, (*ii*)) erhalten wir $\det(xI_n - A)(m_1, \ldots, m_n)^t = 0$. Setze $f = \sum_{i=0}^n \lambda_{n-i} x^i = \det(xI_n - A) \in R[x]$. Die m_i sind ein Erzeugendensystem von M, es folgt also $fM = 0$ und damit $f(\phi) = 0$ in $\mathrm{End}_R(M)$. Durch direktes Ausrechnen der Koeffizienten λ_i von f mittels der Leibnizregel ergibt sich, daß f in der Tat normiert vom Grad n ist und daß $\lambda_i \in I^i$ gilt. □

9.26 Definition. Das Jacobsonradikal J von R ist der Schnitt aller maximalen Ideale von R. Das Radikal $\mathrm{Rad}(R)$ von R ist der Schnitt aller Primideale von R.

Das Radikal von R wird manchmal auch Nilradikal genannt. Das Jacobsonradikal J und das Radikal $\mathrm{Rad}(R)$ von R sind Ideale von R. Es gilt $J = \{r \in R \mid 1 + rs \in R^\times \text{ für alle } s \in R\}$ und $\mathrm{Rad}(R) = \{r \in R \mid r^n = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}^{\geq 1}\}$.

9.27 Lemma (Nakayama)**.** *Sei M ein endlich erzeugter Modul und I ein Ideal, welches im Jacobsonradikal von R enthalten ist. Gilt $M = N + IM$ für einen Untermodul N von M, dann folgt $M = N$.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage zunächst für $N = 0$, es gelte also $IM = M$. Wir wenden Satz 9.25 auf $\phi = \mathrm{id}_M$ an und erhalten $f(x) = x^n - g(x) \in R[x]$ mit $g \in I[x]$ und $f(1)M = 0$. Für $r = g(1)$ gilt also $r \in I$ und $f(1)M = (1-r)M = 0$. Da r nach Voraussetzung in jedem maximalen Ideal von R enthalten ist, gilt $1 - r \in R^\times$. Es folgt $M = (1 - r)M = 0$.

Sei nun $M = N + IM$. Faktorisieren nach N liefert $M/N = I(M/N)$, also $M/N = 0$ und daher $M = N$. □

Eine mögliche Anwendung von Lemma 9.27 ist die folgende: Sind die Klassen von $n_1, \ldots, n_m \in M$ ein Erzeugendensystem von M/IM, so sind die $n_1, \ldots, n_m$ ein Erzeugendensystem von M. Allerdings darf man bei dieser Schlußweise nicht vergessen, daß M als endlich erzeugt vorauszusetzen ist.

9.8 Beziehungen zwischen den Moduleigenschaften und lokal-global Aussagen

Sei M ein R-Modul. Für $a \in R$ sei $I_a = \{b \in R \mid ab = 0\}$. Dann ist I_a ein Ideal von R und I_aM ist ein Untermodul von M, der durch a annulliert wird. Wir nennen M im wesentlichen torsionsfrei, wenn für jedes $a \in R\backslash\{0\}$ und jedes $x \in M$ aus $ax = 0$ bereits $x \in I_aM$ folgt. Für einen Integritätsring R ist M genau dann im wesentlichen torsionsfrei, wenn M torsionsfrei ist.

9.28 Satz. *Sei M ein R-Modul. Dann gilt*

$$M \text{ frei} \Rightarrow M \text{ projektiv} \Rightarrow M \text{ flach} \Rightarrow M \text{ im wesentlichen torsionsfrei.}$$

Beweis. Die erste Implikation folgt direkt aus Satz 9.22, (*ii*) mit $U = \{0\}$.

Die zweite Implikation folgt aus Satz 9.22, (*ii*) und Satz 9.17, (*i*). Damit ist M als direkter Summand eines freien und damit flachen Moduls selbst flach.

Für die dritte Implikation sei $a \in R$. Dann ist I_a der Kern von $R \to Ra$, $x \mapsto ax$, und es gilt $Ra \cong R/I_a$ und $Ra \otimes_R M \cong R/I_a \otimes_R M \cong M/I_aM$. Tensorieren der exakten Inklusionssequenz $0 \to Ra \to R$ mit M liefert damit die exakte Sequenz $0 \to M/I_aM \to M$ nach Lemma 9.6, (*i*), wobei der rechte

Monomorphismus durch $x + I_a M \mapsto ax$ gegeben ist. Also folgt aus $ax = 0$ bereits $x \in I_a M$, so daß M im wesentlichen torsionsfrei ist. □

Wir wollen die Eigenschaften „frei", „projektiv" und „flach" global und lokal vergleichen.

9.29 Definition. Ein R-Modul M heißt lokal frei, wenn $M_\mathfrak{p}$ ein freier $R_\mathfrak{p}$-Modul für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R ist. Analog definieren wir lokal projektiv und lokal flach.

9.30 Lemma. *Sei M ein R-Modul.*

(i) Ein Modul M ist genau dann lokal frei (projektiv, flach), wenn $M_\mathfrak{m}$ frei (projektiv, flach) für alle maximalen Ideale von R ist.

(ii) Ein freier (projektiver, flacher) Modul M ist lokal frei (projektiv, flach).

Beweis. Wir machen eine Vorbemerkung: Die Aussage (iii) der Sätze 9.20, 9.24 und 9.17 impliziert, daß die Eigenschaften frei, projektiv und flach unter Lokalisieren erhalten bleiben.

(i): Für jedes Primideal gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$, so daß $M_\mathfrak{p}$ nur eine weitere Lokalisierung von $M_\mathfrak{m}$ ist. Aus der Vorbemerkung folgt damit die Aussage.

(ii): Ergibt sich unmittelbar aus der Vorbemerkung. □

9.31 Satz. *Sei R ein lokaler Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gilt*

$$M \text{ ist frei} \Leftrightarrow M \text{ ist projektiv} \Leftrightarrow M \text{ ist flach.}$$

Beweis. Wegen Satz 9.28 ist nur zu zeigen, daß aus M flach bereits M frei folgt.

Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von R und seien $x_1, \ldots, x_n \in M$, so daß die Klassen $\bar{x_i} = x_i + \mathfrak{m}M$ eine Basis des mit M endlich erzeugten $R/\mathfrak{m}$-Vektorraums $M/\mathfrak{m}M$ bilden. Wir zeigen, daß die x_i eine Basis von M sind.

Sei $N = \sum_i Rx_i$. Dann gilt $M = N + \mathfrak{m}M$, und nach dem Lemma 9.27 folgt $M = N$, also sind die x_i ein Erzeugendensystem von M.

Zum Beweis der Basiseigenschaft zeigen wir jetzt, daß für in $M/\mathfrak{m}M$ linear unabhängige, nicht notwendig erzeugende $\bar{x}_i$ die x_i linear unabhängig in M sind.

Wir schicken wir eine Bemerkung voraus. Seien $\lambda_i \in R$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$. Sei $I = \sum_{i=1}^n R\lambda_i$. Dann ist das Bild von $\sum_{i=1}^n \lambda_i \otimes x_i$ unter dem Homomorphismus $I \otimes_R M \to R \otimes_R M = M$ gleich $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$. Da die Inklusion $I \to R$ injektiv und M flach ist, ist dieser Homomorphismus ebenfalls injektiv und es muß bereits $\sum_{i=1}^n \lambda_i \otimes x_i = 0$ gelten. Nach Lemma 9.6, (iv) angewendet für $N = I$ gibt es $a_{i,j} \in R$ und $y_j \in R$ mit $x_i = \sum_{j=1}^m a_{i,j} y_j$ und $\sum_{i=1}^n a_{i,j} \lambda_i = 0$ für alle j.

Um aus dieser Vorbemerkung auf die lineare Unabhängigkeit der x_i zu schließen, verwenden wir Induktion über ihre Anzahl n. Für $n = 1$ gelte $\lambda_1 x_1 = 0$. Nach der Vorbemerkung gilt dann $x_1 = \sum_{j=1}^m a_{1,j} y_j$ und $a_{1,j}\lambda_1 = 0$ für alle j. Wegen $x_1 \notin \mathfrak{m}M$ gibt es ein j mit $a_{1,j} \notin \mathfrak{m}$. Dann gilt $a_{1,j} \in R^\times$ und aus $a_{1,j}\lambda_1 = 0$ folgt $\lambda_1 = 0$.

Sei nun $n > 1$. Nach der Vorbemerkung gilt $x_i = \sum_{j=1}^m a_{i,j} y_j$ und $\sum_{i=1}^n a_{i,j}\lambda_i = 0$ für alle j und mit $y_i \in M$, $a_{i,j} \in R$. Da $x_n \notin \mathfrak{m}M$ ist, gibt es j mit $a_{n,j} \notin \mathfrak{m}$. Also ist $a_{n,j} \in R^\times$ und es gilt $\lambda_n = \sum_{i=1}^{n-1}(-a_{i,j}/a_{n,j})\lambda_i = \sum_{i=1}^{n-1} b_i\lambda_i$ mit $b_i = -a_{i,j}/a_{n,j}$. Dann folgt $0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(x_i + b_i x_n)$. Die $\bar{x}_1 + b_1\bar{x}_n, \ldots, \bar{x}_{n-1} + b_{n-1}\bar{x}_n$ sind linear unabhängig in $M/\mathfrak{m}M$. Nach Induktionsvoraussetzung sind $x_1, \ldots, x_{n-1}$ also linear unabhängig in M. Daraus folgt $\lambda_i = 0$ für $1 \leq i \leq n-1$ und $\lambda_n = \sum_{i=1}^{n-1} b_i\lambda_i = 0$. Damit sind die $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängig. □

Die Voraussetzung an die endliche Erzeugung ist notwendig: Für $R = \mathbb{Z}_{(p)}$ ist R zwar lokal und $M = \mathbb{Q}$ als R-Modul flach, aber M ist nicht frei.

Der folgende Satz enthält den lokal-global Vergleich für die Eigenschaft „flach“.

9.32 Satz. *Sei M ein R-Modul.*

(i) *M ist genau dann flach, wenn M lokal flach ist.*

(ii) *Ist M endlich erzeugt, so ist M genau dann flach, wenn M lokal frei ist.*

Beweis. (i): Die Implikation $\Rightarrow$ folgt aus Lemma 9.30. Für die Implikation $\Leftarrow$ sei M lokal flach. Sei $\phi : N \to P$ ein Monomorphismus und $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Sei $\phi_1 : N \otimes_R M \to P \otimes_R M$. Nach Voraussetzung ist $M_\mathfrak{p}$ flach über $R_\mathfrak{p}$. Da $R_\mathfrak{p}$ flach über R ist, ist $M_\mathfrak{p}$ nach Satz 9.17, (ii) auch flach über R. Daher ist $\phi_2 : N \otimes_R M_\mathfrak{p} \to P \otimes_R M_\mathfrak{p}$ ein Monomorphismus. Mit Satz 9.4, (i) und (ii) erhalten wir daraus den Monomorphismus $\phi_3 : (N \otimes_R M) \otimes_R R_\mathfrak{p} \to (P \otimes_R M) \otimes_R R_\mathfrak{p}$, welcher durch Tensorieren von ϕ_1 mit $R_\mathfrak{p}$ entsteht. Da $\mathfrak{p}$ beliebig war, ist ϕ_1 nach Satz 9.13 ein Monomorphismus. Also ist M flach.

(ii): Ergibt sich aus (i) und Satz 9.31. □

Wir wollen noch einen lokal-global Vergleich der Eigenschaft „projektiv“ angeben und eine Verbindung zwischen „projektiv“ und „lokal frei“ herstellen. Dazu müssen wir voraussetzen, daß M nicht nur endlich erzeugt, sondern sogar endlich präsentiert ist.

Zur Erinnerung: Ein R-Modul M heißt endlich präsentiert, wenn es ein $n \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ und einen Epimorphismus $\phi : R^n \to M$ mit endlich erzeugtem Kern gibt.

9.33 Lemma. *Sei M ein endlich präsentierter R-Modul. Für jedes $m \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ und jeden Epimorphismus $\psi : R^m \to M$ ist dann* $\ker(\psi)$ *endlich erzeugt.*

Ist R noethersch und M endlich erzeugt, so ist M endlich präsentiert.

Ist M endlich präsentiert und U eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R mit $1 \in U$, so ist auch $M[U^{-1}]$ als $R[U^{-1}]$-Modul endlich präsentiert.

Beweis. Sei $\phi : R^n \to M$ ein Epimorphismus mit $\ker(\phi)$ endlich erzeugt und sei $\psi : R^m \to M$ ein weiterer Epimorphismus. Seien $(\lambda_{i,j})_j \in R^m$ mit $\phi(e_i) = \psi((\lambda_{i,j})_j)$ und $(\mu_{j,i})_i \in R^n$ mit $\phi((\mu_{j,i})_i) = \psi(e_j)$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$. Seien $(u_{s,i})_i \in R^n$ für endlich viele s ein Erzeugendensystem von $\ker(\phi)$. Dann bilden die $((u_{s,i})_i, 0) \in R^n \times R^m$ zusammen mit den $((\mu_{j,i})_i, e_j) \in R^n \times R^m$ ein endliches Erzeugendensystem U von $K = \{(x,y) \in R^n \times R^m \,|\, \phi(x) = \psi(y)\}$. Für jeden Erzeuger $u \in U$ gibt es ein $v_u \in \ker(\psi)$, so daß sich u als R-Linearkombination der $(e_i, (\lambda_{i,j})_j) \in K$ und von $(0, v_u) \in K$ schreiben läßt. Die $(e_i, (\lambda_{i,j})_j)$ zusammen mit den $(0, v_u)$ für jedes u liefern damit ein anderes, endliches Erzeugendensystem V von K. Für $y \in \ker(\psi)$ können keine $(e_i, (\lambda_{i,j})_j)$ in den Darstellungen von $(0,y) \in K$ in V auftreten. Also bilden die v_u ein endliches Erzeugendensystem von $\ker(\psi)$.

Sei R noethersch und M endlich erzeugt. Da M endlich erzeugt ist, gibt es einen Epimorphismus $\psi : R^n \to M$. Da R noethersch ist, muß $\ker(\psi)$ nach Satz 4.14, (*iii*) und Satz 4.13 endlich erzeugt sein. Also ist M endlich präsentiert.

Ist M endlich präsentiert, so haben wir eine exakte Sequenz $R^s \to R^n \to M \to 0$. Durch Lokalisieren geht diese in die exakte Sequenz $R[U^{-1}]^s \to R[U^{-1}]^n \to M[U^{-1}] \to 0$ über, also ist $M[U^{-1}]$ endlich präsentiert. □

9.34 Lemma. *Sei M ein endlich präsentierter R-Modul. Dann ist M ist genau dann lokal frei, wenn es für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R ein $f \in R\backslash\mathfrak{p}$ gibt, so daß $M[f^{-1}]$ bereits ein freier $R[f^{-1}]$-Modul ist.*

Beweis. Das Lemma ist für $M = \{0\}$ richtig, da M frei ist und dies auch für alle Lokalisierungen gilt. Es gelte also $M \neq \{0\}$.

„$\Leftarrow$“: Ist klar, da nur weiter lokalisiert werden muß.

„$\Rightarrow$“: Mit M ist $M_\mathfrak{p}$ endlich erzeugt, so daß $M_\mathfrak{p}$ eine endliche Basis besitzt. Sei $m_1, \ldots, m_k$ eine Basis von $M_\mathfrak{p}$ mit $m_i \in M$. Jeder Erzeuger v_j von M kann aufgrund der Annahme in der Form $u_j v_j = \sum_{i=1}^k \lambda_{i,j} m_i$ mit $u_j \in R\backslash\mathfrak{p}$ und $\lambda_{i,j} \in R$ geschrieben werden. Sei $f = \prod_j u_j$. Dann gilt $f \in R\backslash\mathfrak{p}$ und $v_j = \sum_{i=1}^k (\lambda'_{i,j}/f) m_i$ in $M[f^{-1}]$ mit geeigneten $\lambda'_{i,j} \in R$. Die m_i bilden also ein Erzeugendensystem von $M[f^{-1}]$.

Aus $\sum_i (\mu_i/u_i) m_i = 0$ in $M_\mathfrak{p}$ für beliebige $\mu_i \in R$ und $u_i \in R\backslash\mathfrak{p}$ folgt $\mu_i/u_i = 0$ für alle i nach Voraussetzung, also gibt es für jedes i ein $v_i \in R\backslash\mathfrak{p}$ mit $v_i\mu_i = 0$ in R. Der $R_\mathfrak{p}$-Modul aller solcher Tupel $(\mu_i/u_i)_i \in R_\mathfrak{p}^k$ ist nach Lemma 9.33 endlich erzeugt, da $M_\mathfrak{p}$ mit M endlich präsentiert ist. Wir multiplizieren an f die endlich vielen, auftretenden v_i (für jeden Erzeuger des Tupelraums sind das k Elemente

v_i). Jedes Tupel wird dann also durch koordinatenweise Multiplikation mit f annulliert, ist also Null in $R[f^{-1}]^k$. Die m_i sind daher auch linear unabhängig in $M[f^{-1}]$. □

Der Satz ist falsch, wenn auf die Voraussetzung der endlichen Erzeugung verzichtet wird. Sei zum Beispiel $R = \mathbb{Z}$ und M der von $\{a/p \,|\, a \in \mathbb{Z}, p \text{ Primzahl}\}$ erzeugte $\mathbb{Z}$-Untermodul von $\mathbb{Q}$. Dann sind die $M_\mathfrak{p}$ für $\mathfrak{p} = \mathbb{Z}p$ isomorph zu den von $1/p$ erzeugten R-Untermoduln von $\mathbb{Q}$, also frei. Wegen der unbeschränkten Nenner kann es aber kein einziges f wie im Lemma geben.

Torsion bleibt lokal nicht unbedingt erhalten. Siehe $R = K \times K$ und $M = R$. Dann ist M nicht torsionsfrei, aber alle Lokalisierungen an Primidealen sind isomorph zu K, also torsionsfrei.

Der folgende Satz enthält den angestrebten lokal-global Vergleich für „projektiv“.

9.35 Satz. *Sei M ein endlich präsentierter R-Modul. Dann sind äquivalent:*

(i) *M ist projektiv.*

(ii) *M ist flach.*

(iii) *M ist lokal frei.*

(iv) *Es gibt $f_1, \ldots, f_n \in R$ mit $R = \sum_{i=1}^n Rf_i$, so daß $M[f_i^{-1}]$ frei über $R[f_i^{-1}]$ für alle $1 \le i \le n$ ist.*

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Folgt aus Satz 9.28. $(ii) \Rightarrow (iii)$: Folgt aus Satz 9.32.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Nach Lemma 9.34 gibt es für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ ein $f_\mathfrak{m} \in R\backslash\mathfrak{m}$, so daß $M[f_\mathfrak{m}^{-1}]$ ein freier $R[f_\mathfrak{m}^{-1}]$-Modul ist. Sei N der von den $f_\mathfrak{m}$ erzeugte R-Untermodul von R und $i : N \to R$ der Inklusionsmonomorphismus. Da jedes $f_\mathfrak{m}$ in $R_\mathfrak{m}$ eine Einheit ist, ist der lokalisierte Monomorphismus $i' : N_\mathfrak{m} \to R_\mathfrak{m}$ ein Isomorphismus. Nach Satz 9.13 ist damit i ein Isomorphismus, es gilt also $N = R$. Wegen $1 \in N$ gibt es endlich viele f_i unter den $f_\mathfrak{m}$ und $g_i \in R$ mit $1 = \sum_i g_i f_i$. Es ergibt sich (iv).

$(iv) \Rightarrow (i)$: Mit M ist jedes $M[f_i^{-1}]$ endlich erzeugt, besitzt also eine endliche Basis. Für jedes i seien $m_{i,j} \in M$ für endlich viele j, so daß die Bilder der $m_{i,j}$ in $M[f_i^{-1}]$ eine Basis von $M[f_i^{-1}]$ bilden. Seien $\mu_{i,j} \in \mathrm{Hom}_{R[f_i^{-1}]}(M[f_i^{-1}], R[f_i^{-1}])$ die Koordinatenfunktionale bezüglich der $m_{i,j}$, so daß $m/f_i^r = \sum_j \mu_{i,j}(m/f_i^r) m_{i,j}$ in $M[f_i^{-1}]$ für alle $m \in M$, $r \in \mathbb{Z}^{\ge 0}$ und i gilt.

Nach Satz 9.18 gibt es $\lambda_{i,j} \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$ und $k_{i,j} \in \mathbb{Z}^{\ge 1}$ mit $f_i^{k_{i,j}} \mu_{i,j}(m/f_i^r) = \lambda_{i,j}(m)/f_i^r$ in $R[f_i^{-1}]$ für alle $m \in M$ und $r \in \mathbb{Z}^{\ge 0}$. Sei $k = \max_{i,j} k_{i,j}$. Wir ersetzen $\lambda_{i,j}$ durch $f_i^{k-k_{i,j}} \lambda_{i,j}$, so daß nun speziell $f_i^k \mu_{i,j}(m) = \lambda_{i,j}(m)$ in $R[f_i^{-1}]$

und $f_i^k m = \sum_j \lambda_{i,j}(m) m_{i,j}$ in $M[f_i^{-1}]$ für alle $m \in M$ gilt. Da M endlich erzeugt ist, gilt $f_i^k m = \sum_j \lambda_{i,j}(m) m_{i,j}$ auch in M, wenn wir zuvor k groß genug wählen.

Potenzieren wir beide Seiten der Gleichung $1 = \sum_i g_i f_i$ mit einer ausreichend großen ganzen Zahl, erhalten wir einen Ausdruck $1 = \sum_i h_i f_i^k$ mit $h_i \in R$.

Es ergibt sich $m = (\sum_i h_i f_i^k) m = \sum_{i,j} (h_i \lambda_{i,j}(m)) m_{i,j}$ in M für alle $m \in M$. Wir erhalten also Erzeuger $m_{i,j}$ und Koordinatenfunktionale $m \mapsto h_i \lambda_{i,j}(m)$, so daß M nach Satz 9.22 projektiv ist. $\square$

Kapitel 10

Ringe II

In diesem Kapitel werden das Tensorprodukt von Algebren, ganze Ringerweiterungen, gebrochene und invertierbare Ideale, Dedekindringe und die Faktorisierung in Dimension 1 und Kodimension 1 behandelt.

10.1 Tensorprodukt von Algebren

Wir kommen nun auf das Tensorprodukt von (kommutativen) R-Algebren S_1, S_2 zu sprechen. Die Multiplikation in $S_1 \otimes_R S_2$ wird durch $(x_1 \otimes_R y_1) \cdot (x_2 \otimes_R y_2) = (x_1x_2) \otimes (y_1y_2)$ definiert. Formal bekommen wir durch $(x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto S_1 \otimes_R S_2$, $(x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto (x_1x_2) \otimes_R (y_1y_2)$ eine 4-lineare Abbildung. Diese faktorisiert durch $S_1 \otimes_R S_2 \otimes_R S_1 \otimes_R S_2$ und zieht sich zu einer bilinearen Abbildung auf $(S_1 \otimes_R S_2) \times (S_1 \otimes_R S_2)$ zurück, welche die Multiplikation definiert.

Sei T eine R-Algebra und $g_i : S_i \to T$ zwei R-lineare Ringhomomorphismen. Dann definieren wir eine bilineare Abbildung $g : S_1 \times S_2 \to T$ durch $g(x, y) = xy$, und diese faktorisiert eindeutig durch eine R-lineare Abbildung $f : S_1 \otimes_R S_2 \to T$, welche aufgrund der Definitionen ebenfalls ein Ringhomomorphismus ist. Daher erfüllt $S_1 \otimes_R S_2$ die universelle Eigenschaft einer direkten Summe in der Kategorie der R-Algebren (deren Morphismen R-lineare Ringhomomorphismen sind).

Der vollständigkeit halber noch der folgende Satz.

10.1 Satz. *Für ein Diagramm $\mathcal{D}$ von R-Algebren existieren $\varprojlim \mathcal{D}$ und $\varinjlim \mathcal{D}$ als R-Algebren.*

Beweis. Die Aussage für $\varprojlim \mathcal{D}$ wird ganz analog zu der für Moduln wie in Satz 11.5 gezeigt. Für $\varinjlim \mathcal{D}$ verwendet man eine ring- statt modultheoretische Konstruktion wie in Satz 9.2. Insbesondere betrachtet man eingeschränkte Tensorprodukte, deren Elemente $\cdots \otimes 1 \otimes a_i \otimes \cdots \otimes a_j \otimes 1 \otimes \cdots$ an fast allen Stellen eine 1 haben. Die Prinzipien sind ähnlich wie in Satz 11.5 und wir lassen die Details aus. $\square$

Sind S_1 und S_2 R-Algebren und X ein Menge von Variablen, so gilt $S_1[X] \otimes_R \mathcal{S}_2 \cong (S_1 \otimes_R S_2)[X]$. Ist $S_1 = R[X]/J$ für eine Menge von Variablen X und ein Ideal J, so gilt $S_1 \otimes_R S_2 = S_2[X]/J$. Speziell ergibt sich $R[X] \otimes_R R[Y] \cong R[X \cup Y]$ und $(R[X]/I) \otimes_R (R[Y]/J) \cong R[X \cup Y]/\langle I, J\rangle$ für Y eine weitere Menge von Variablen mit $X \cap Y = \{\}$. Diese Aussagen sind analog zu denen für Moduln.

Die Charakterisierung linear disjunkter Körpererweiterungen E_1/K und E_2/K in einem Erweiterungskörper C zeigt, daß $E_1 \otimes_K E_2 \cong E_1E_2$ unter Verwendung der Multiplikationsabbildung genau dann gilt, wenn E_1 und E_2 linear disjunkt über K sind.

10.2 Gebrochene und invertierbare Ideale, Primidealfaktorisierung

Sei R ein Integritätsring. Der Homomorphismus $R \to \mathrm{Quot}(R)$, $r \mapsto r/1$ ist injektiv. Daher fassen wir R im folgenden als Teilring von $\mathrm{Quot}(R)$ auf.

10.2 Definition. Ein R-Untermodul I von $\mathrm{Quot}(R)$ heißt gebrochenes Ideal von R, wenn es ein $a \in R\backslash\{0\}$ mit $aI = \{ax \,|\, x \in I\} \subseteq R$ gibt.

Die Ideale von R sind dann auch gebrochene Ideale von R. Zur Unterscheidung nennen wir die Ideale von R auch ganze Ideale von R.

10.3 Lemma. *Seien $I, J \neq 0$ gebrochene Ideale von R. Die Isomorphismen $\phi : I \to J$ sind genau von der Form $\phi(x) = ax$ für ein eindeutig bestimmtes $a \in \mathrm{Quot}(R)\backslash\{0\}$ mit $aI = J$.*

Beweis. Sei I ein gebrochenes Ideal, $a \in \mathrm{Quot}(R)\backslash\{0\}$ und $J = aI$. Dann ist J ein gebrochenes Ideal, denn mit $bI \subseteq R$ und $a = r/u$ für $b, r, u \in R\backslash\{0\}$ gilt $bu \in R\backslash\{0\}$ und $(bu)J = r(aI) \subseteq rR \subseteq R$. Durch $x \mapsto ax$ wird dann ein Isomorphismus $\phi : I \to J$ definiert.

Sei umgekehrt $\phi : I \to J$ ein Isomorphimus und $U = R\backslash\{0\}$. Wir zeigen zuerst, daß sich ϕ zu einem $\mathrm{Quot}(R)$-Isomorphismus $\psi : \mathrm{Quot}(R) \to \mathrm{Quot}(R)$ fortsetzen läßt. Es gilt $I[U^{-1}] \cong \mathrm{Quot}(R) \otimes_R I \cong \mathrm{Quot}(R)I = \mathrm{Quot}(R)$, da $\mathrm{Quot}(R)$ über R flach und $I \neq 0$ ist. Zusammen erhalten wir den Isomorphismus $f : I[U^{-1}] \to \mathrm{Quot}(R)$ mit $f(x/u) = x/u$. Außerdem kommutieren die Einbettungen $I \to I[U^{-1}]$ und $I \to \mathrm{Quot}(R)$ mit f, wie man unmittelbar sieht. Für J bekommen wir analog $g : J[U^{-1}] \to \mathrm{Quot}(R)$ mit $g(x/u) = x/u$. Ist $\phi' : I[U^{-1}] \to J[U^{-1}]$ der lokalisierte Isomorphismus, so erhalten wir schließlich $\psi = g^{-1} \circ \phi' \circ f$ mit den gewünschten Eigenschaften.

Da $\psi : \mathrm{Quot}(R) \to \mathrm{Quot}(R)$ ein $\mathrm{Quot}(R)$-linearer Isomorphismus und 1 eine Basis von $\mathrm{Quot}(R)$ ist, folgt $\psi(x/u) = (x/u)\psi(1) = ax/u$ mit $a := \psi(1) \in$

$\mathrm{Quot}(R)\backslash\{0\}$ für alle $x \in R$ und $u \in U$. Speziell folgt $\phi(x) = \psi(x) = ax$ für alle $x \in I$. Aus $ax = bx$ für alle $x \in I$ folgt $a = b$, da $I \neq 0$ und R nullteilerfrei ist. $\square$

Ein gebrochenes Ideal ist also per Definition immer isomorph zu einem ganzen Ideal von R.

10.4 Definition. Sind I, J gebrochene Ideale von R, so definieren wir $IJ = \{xy \,|\, x \in I, y \in J\}$. Ist $I \neq 0$, so definieren wir $(I : J) = \{x \in \mathrm{Quot}(R) \,|\, xI \subseteq J\}$ und $I^{-1} = (I : R)$.

Ein gebrochenes Ideal I von R heißt invertierbar, wenn es ein gebrochenes Ideal J von R mit $IJ = R$ gibt. Dann heißt J das inverse Ideal von I.

Hier sind IJ und $(I : J)$ wieder gebrochene Ideale. Denn aus $aI \subseteq R$ und $bJ \subseteq R$ folgt $(ab)IJ \subseteq R$, und für jedes $x \in I\backslash\{0\}$ gilt $bx(I : J) \subseteq bJ \subseteq R$.

Nach Lemma 10.3 gilt $(I : J) \cong \mathrm{Hom}_R(I, J)$. als abelsche Gruppen und $(I : I) \cong \mathrm{Hom}_R(I, I)$ als Ringe.

Weiter gilt $(IJ)K = I(JK)$, $IJ = JI$ und $IR = RI = I$ für gebrochene Ideale I, J, K. Damit bilden die gebrochenen Ideale eine abelsche Halbgruppe mit Einselement R.

Für invertierbare Ideale gilt notwendigerweise $I \neq 0$. Aufgrund der Definition von I^{-1} gilt $II^{-1} \subseteq R$. Ist I invertierbar mit inversem Ideal J, so gilt desweiteren $J \subseteq I^{-1}$. Daraus ergibt sich $R = IJ \subseteq II^{-1} \subseteq R$, also $II^{-1} = R$. Da Inverse in Halbgruppen mit 1 eindeutig bestimmt sind, folgt $I^{-1} = J$.

Ist I invertierbar, so gilt $(I : J) = I^{-1}J$. Die Inklusion $\supseteq$ ist klar und gilt auch für nicht-invertierbares I. Auf der andere Seite gilt $(I : J)I \subseteq J$, also folgt durch Multiplikation mit I^{-1} wie gewünscht $(I : J) \subseteq I^{-1}J$.

Die einfachsten invertierbaren Ideale sind die Hauptideale $\neq 0$.

Multiplikation mit invertierbaren Idealen erhält Inklusionen: Ist I invertierbar und sind J und K gebrochene Ideale, so gilt $J \subseteq K \Leftrightarrow JI \subseteq KI$ und $J = K \Leftrightarrow JI = KI$.

Sind I, J gebrochene Ideale, so sind auch $I + J$ und $I \cap J$ gebrochene Ideale.

10.5 Definition. Seien I, K gebrochene Ideale von R und J ein ganzes Ideal von R. Gilt $IJ = K$, so sagen wir, daß K durch I teilbar und daß I ein Teiler von K ist. Wir schreiben $I \,|\, K$.

Sind I, J, K wie in der Definition, dann gilt $I \supseteq IJ = K$, also $I \supseteq K$. Hiervon gilt auch die Umkehrung, wenn I invertierbar ist:

10.6 Lemma. *Seien I und K gebrochene Ideale und sei I invertierbar. Dann gilt $I \,|\, K$ genau dann, wenn $I \supseteq K$ ist.*

Seien I, J, K gebrochene Ideal mit $IJ = K$ und sei K invertierbar. Dann sind auch I und J invertierbar.

Seien $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ invertierbare Primideale mit $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}$. Dann gilt $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$.

Beweis. Aus $I \mid K$ folgt $I \supseteq K$, wie vor dem Lemma bemerkt. Sind umgekehrt I und K gebrochene Ideale mit $I \supseteq K$ und ist I invertierbar, so folgt $R = II^{-1} \supseteq KI^{-1}$. Mit $J = KI^{-1}$ gilt also $IJ = IKI^{-1} = II^{-1}K = K$, und K wird von I geteilt.

Aus $IJ = K$ folgt $I(JK^{-1}) = J(IK^{-1}) = R$, also sind I und J invertierbar (allgemein sind in einer Halbgruppe mit 1 Teiler von Einheiten wieder Einheiten).

Wir nehmen $\mathfrak{p} \neq 0$ an. Dann gibt es ein ganzes Ideal I mit $\mathfrak{q}I = \mathfrak{p}$. Gilt $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$, so folgt $I \subseteq \mathfrak{p}$, da $\mathfrak{p}$ Primideal ist. Dann folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}I \subseteq \mathfrak{q}\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}\mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ invertierbar ist, folgt $R = \mathfrak{q}$ im Widerspruch zur Annahme. Also gilt $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. □

10.7 Satz. *Sei I ein ganzes invertierbares Ideal von R und seien $\mathfrak{p}_i$ Primideale von R mit $I = \prod_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$. Die $\mathfrak{p}_i$ sind dann bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.*

Beweis. Es gelte nun $I = \prod_{i=1}^n \mathfrak{p}_i = \prod_{j=1}^m \mathfrak{q}_j$ mit anderen Primidealen $\mathfrak{q}_j$ und $m \geq n$. Die $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{q}_j$ sind nach Lemma 10.6 invertierbar. Nach Umordnung erhalten wir $\mathfrak{p}_n \supseteq \mathfrak{q}_m$ aus der Primidealeigenschaft von $\mathfrak{p}_n$ und $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{q}_m$ nach Lemma 10.6. Multiplikation mit $\mathfrak{p}_n^{-1}$ liefert $\prod_{i=1}^{n-1} \mathfrak{p}_i = \prod_{j=1}^{m-1} \mathfrak{q}_j$. Induktiv gelangen wir zu $R = \prod_{j=1}^{m'} \mathfrak{q}_j$. Wegen $R \supset \mathfrak{q}_1 \supseteq \prod_{j=1}^{m'} \mathfrak{q}_j$ für $m' \geq 1$ folgt schließlich $m' = 0$. □

10.8 Satz. *Sei R ein noetherscher Integritätsring und $\mathcal{I}$ eine Menge von ganzen, invertierbaren Idealen von R, die bezüglich der Idealmultiplikation abgeschlossen ist und für die $R \in \mathcal{I}$ gilt. Dann sind äquivalent:*

(i) *Jedes Ideal aus $\mathcal{I}$ läßt sich in Primideale aus $\mathcal{I}$ faktorisieren.*

(ii) *Für jedes Ideal $I \in \mathcal{I}$ mit $I \neq R$ gibt es ein invertierbares Primideal $\mathfrak{p}$ von R mit $\mathfrak{p} \supseteq I$ und $\mathfrak{p}^{-1}I \in \mathcal{I}$.*

Sei $\mathcal{I}$ eine Menge von ganzen, invertierbaren Idealen von R, die diese Eigenschaften erfüllt. Dann sind die Faktorisierungen in (i) eindeutig und die Primideale aus $\mathcal{I}$ erzeugen bezüglich der Idealmultiplikation und Idealinversion eine freie abelsche Gruppe von invertierbaren Idealen von R.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $I \in \mathcal{I}$. Für $I = R$ ist nichts zu zeigen. Sei also $I \neq R$. Es gilt $I = \prod_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ mit invertierbaren Primidealen $\mathfrak{p}_i \in \mathcal{I}$ und $n \geq 1$. Wegen $\mathfrak{p}_1 \supseteq \prod_{i=1}^n \mathfrak{p}_i = I$ und $\mathfrak{p}_1^{-1}I = \prod_{i=2}^n \mathfrak{p}_i \in \mathcal{I}$ aufgrund der multiplikativen Abgeschlossenheit erfüllt $\mathcal{I}$ die Eigenschaft (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$: Falls nicht alle Ideale aus $\mathcal{I}$ eine Faktorisierung in invertierbare Primideale aus $\mathcal{I}$ zulassen, gibt es ein bezüglich Inklusion maximales Ideal $I \in \mathcal{I}$ mit dieser Eigenschaft, da R nach Voraussetzung noethersch ist. Es gilt $I \neq R$, weil R das leere Produkt ist. Nach (ii) existiert ein invertierbares Primideal $\mathfrak{p}$ von R mit $\mathfrak{p} \supseteq I$ und $\mathfrak{p}^{-1}I \in \mathcal{I}$. Da I invertierbar ist, gilt $I \supset \mathfrak{p}I$, denn sonst hätten wir $R = \mathfrak{p}$ nach Multiplikation mit I^{-1}. Multiplikation mit $\mathfrak{p}^{-1}$ liefert nun $R \supseteq \mathfrak{p}^{-1}I \supset I$. Nach Konstruktion gibt es invertierbare Primideale $\mathfrak{p}_i \in \mathcal{I}$ mit $\mathfrak{p}^{-1}I = \prod_i \mathfrak{p}_i$. Daraus folgt $I = \mathfrak{p} \prod_i \mathfrak{p}_i$. Außerdem ergibt sich $\mathfrak{p} = I(\prod_i \mathfrak{p}_i)^{-1} \in \mathcal{I}$.

Die Faktorisierungen sind nach Satz 10.7 eindeutig bestimmt. Daraus und aus der Invertierbarkeit ergibt sich auch die letzte Aussage. □

10.9 Definition. Ist I eine Menge von ganzen, invertierbaren Idealen mit den Eigenschaften aus Satz 10.8, dann sagen wir, daß I die Primidealfaktorisierungseigenschaft besitzt.

Ein noetherscher Integritätsring, für den jedes Ideal $\neq 0$ invertierbar ist, heißt Dedekindring.

10.10 Korollar. *In einem Dedekindring läßt sich jedes Ideal $\neq 0$ eindeutig in Primideale faktorisieren.*

Beweis. Die Menge aller Ideale $\neq 0$ besitzt die Primidealfaktorisierungseigenschaft, so daß die Behauptung aus Satz 10.8 folgt. □

Beim einem Dedekindring handelt es sich also um einen bestmöglichen Ring, was die Primidealfaktorisierung in invertierbare Primideale angeht. Es ist jetzt interessant, nach anderen Kriterien für Ringe und Ideale zu suchen, mit denen die Eigenschaft in Satz 10.8 und speziell die Dedekindringeigenschaft überprüft werden kann.

10.3 Lokale Charakterisierungen invertierbarer Ideale

Wir untersuchen zunächst das Verhalten unter Lokalisierung.

10.11 Lemma. *Sei R ein Integritätsring und U eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R mit $1 \in U$.*

(i) Für jedes gebrochene (ganze) Ideal I von R ist $I[U^{-1}]$ ein gebrochenes (ganzes) Ideal von $R[U^{-1}]$.

(ii) Für gebrochene Ideale I, J von R gelten die Gleichungen $(IJ)[U^{-1}] = I[U^{-1}] \cdot J[U^{-1}]$, $(I^{-1})[U^{-1}] = (I[U^{-1}])^{-1}$ und $(I : J)[U^{-1}] = (I[U^{-1}] : J[U^{-1}])$.

(iii) *Für ein invertierbares Ideal I von R ist $I[U^{-1}]$ invertierbar.*

(iv) *Ist $\mathcal{I}$ eine Menge von Idealen mit Primfaktorisierungseigenschaft und ist $\mathcal{I}[U^{-1}] := \{I[U^{-1}] \mid I \in \mathcal{I}\}$, so besitzt $\mathcal{I}[U^{-1}]$ ebenfalls die Primidealfaktorisierungseigenschaft.*

(v) *Für einen Dedekindring R ist $R[U^{-1}]$ ebenfalls ein Dedekindring.*

Beweis. (i): Sei I ein gebrochenes Ideal von R und $a \in R \backslash \{0\}$ mit $aI \subseteq R$. Dann gilt auch $a(I[U^{-1}]) = (aI)[U^{-1}] \subseteq R[U^{-1}]$, also ist $I[U^{-1}]$ ein gebrochenes Ideal von $R[U^{-1}]$. Die Aussage über das ganze Ideal ist auch klar.

(ii): Sei $(\sum_i x_i y_i)/u \in (IJ)[U^{-1}]$ mit $x_i \in I$, $y_i \in J$ und $u \in U$. Dann gilt $(\sum_i x_i y_i)/u = \sum_i (x_i/u)(y_i/u) \in I[U^{-1}]J[U^{-1}]$, also $(IJ)[U^{-1}] \subseteq I[U^{-1}]J[U^{-1}]$. Sei $\sum_i (x_i/u_{1,i})(y_i/u_{2,i}) \in I[U^{-1}]J[U^{-1}]$ mit $x_i \in I$, $y_i \in J$ und $u_{1,i}, u_{2,i} \in U$. Indem wir diesen Ausdruck auf Hauptnenner bringen, erhalten wir $x_i' \in I$, $y_i' \in J$ und $u \in U$ mit $\sum_i (x_i/u_{1,i})(y_i/u_{2,i}) = (\sum_i x_i' y_i')/u \in (IJ)[U^{-1}]$, also $I[U^{-1}]J[U^{-1}] \subseteq (IJ)[U^{-1}]$.

Die Aussage für I^{-1} ist ein Spezialfall von der für $(I : J)$ wegen $I^{-1} = (I : R)$.

Für $x/u_1 \in (I : J)[U^{-1}]$ mit $x \in (I : J)$ und $u_1 \in U$ gilt $(x/u_1)(y/u_2) = (xy)/(u_1 u_2) \in J[U^{-1}]$ für alle $y \in I$ und $u_2 \in U$, also folgt $(I : J)[U^{-1}] \subseteq (I[U^{-1}] : J[U^{-1}])$. Ist umgekehrt $x/u \in (I[U^{-1}] : J[U^{-1}])$ mit $x \in R$ und $u \in U$, so gilt $xy = (x/u)(uy) \in J[U^{-1}]$ für alle $y \in I$, also $xy \in J$. Daraus folgt $(I[U^{-1}] : J[U^{-1}]) \subseteq (I : J)[U^{-1}]$.

(iii): Nach (ii) gilt $I[U^{-1}](I[U^{-1}])^{-1} = I[U^{-1}](I^{-1})[U^{-1}] = (II^{-1})[U^{-1}] = R[U^{-1}]$.

(iv): Folgt aus (ii), (iii) und Satz 2.69, da Lokalisieren einer Primidealfaktorisierung wie in Satz 10.8, (i) wieder eine solche liefert (unter Umständen mit weniger Primidealen, falls Primideale zu $R[U^{-1}]$ lokalisieren).

(v): Die Ideale von $R[U^{-1}]$ sind nach Satz 2.69 von der Form $I[U^{-1}]$ für ein Ideal I von R. Für $I \neq 0$ ist nach Voraussetzung $II^{-1} = R$ und $I[U^{-1}]$ nach (iii) invertierbar. □

10.12 Satz. *Sei R ein Integritätsring. Jedes invertierbare Ideal I von R ist endlich erzeugt. Für ein gebrochenes Ideal $I \neq 0$ von R sind äquivalent:*

(i) *I ist invertierbar.*

(ii) *I ist projektiv.*

(iii) *I ist lokal frei vom Rang 1.*

Beweis. Zur endlichen Erzeugung: Sei J das inverse Ideal von I. Wegen $IJ = R$ gibt es $x_i \in I$ und $y_i \in J$ mit $1 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Sei $x \in I$ beliebig. Dann gilt $x = x \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n (xy_i)x_i$, wobei $xy_i \in R$ für alle $1 \leq i \leq n$ ist. Also sind die x_i ein Erzeugendensystem von I.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Sei I invertierbar und die x_i, y_i wie eben. Wir definieren $\lambda_i \in \mathrm{Hom}_R(I, R)$ durch $x \mapsto xy_i$. Dann sind die λ_i Koordinatenfunktionale bezüglich der Erzeuger x_i und I ist nach Satz 9.22 projektiv.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei nun I projektiv. Dann gibt es nach Satz 9.22 ein Erzeugendensystem x_i (vielleicht unendlich) und Koordinatenfunktionale $\lambda_i \in \mathrm{Hom}_R(I, R)$. Nach den Betrachtungen hinter Definition 10.2 gibt es $y_i \in \mathrm{Quot}(R)$ mit $\lambda_i(x) = xy_i$ für alle $x \in I$. Sei $x \in I \backslash \{0\}$. Dann gilt $x = \sum_i \lambda_i(x)x_i = \sum_i (xy_i)x_i$, wobei die Summe endlich ist. Division durch x ergibt $1 = \sum_i y_i x_i$. Wegen $xy_i \in R$ für alle $x \in I$ gilt $y_i \in I^{-1}$. Also folgt $1 \in II^{-1}$ und somit $II^{-1} = R$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Ist I projektiv, so ist es nach dem bereits Bewiesenen invertierbar und endlich erzeugt. Nach Satz 9.35 ist I lokal frei. Nach Lemma 10.3 können wir annehmen, daß I ein ganzes Ideal von R ist. Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales von R. Da $I_\mathfrak{m}$ ein Ideal und $R_\mathfrak{m}$-Untermodul von $R_\mathfrak{m}$ ist und daher keine zwei Elemente linear unabhängig sein können, folgt, daß $I_\mathfrak{m}$ frei vom Rang 1 ist.

Hier ist noch ein anderer, direkter Beweis für $(i) \Rightarrow (iii)$: Sei I invertierbar. Wegen $II^{-1} = R$ gibt es $x_i \in I$ und $y_i \in I^{-1}$ mit $1 = \sum_i x_i y_i$. Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von R. Dann gibt es ein i mit $x_i y_i \in R_\mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m} R_\mathfrak{m}$, also $x_i y_i \in R_\mathfrak{m}^\times$. Es folgt $(x_i y_i)^{-1} x_i \in I_\mathfrak{m}$ und $y_i((x_i y_i)^{-1} x_i) = 1$, also $y_i I_\mathfrak{m} = R_\mathfrak{m}$. Daraus ergibt sich $I_\mathfrak{m} = R_\mathfrak{m} y_i^{-1}$, also ist $I_\mathfrak{m}$ frei vom Rang 1.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Wir betrachten den Inklusionshomomorphismus $\phi : II^{-1} \to R$. Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R bekommen wir unter Verwendung von Lemma 10.11 den lokalisierten Monomorphismus $\phi_\mathfrak{m} : I_\mathfrak{m} I_\mathfrak{m}^{-1} \to R_\mathfrak{m}$. Da $I_\mathfrak{m}$ frei vom Rang 1 ist, gibt es $a \in \mathrm{Quot}(R_\mathfrak{m})$ mit $I_\mathfrak{m} = aR_\mathfrak{m}$. Aus der Definition von $I_\mathfrak{m}^{-1}$ folgt $I_\mathfrak{m}^{-1} = a^{-1} R_\mathfrak{m}$. Es ergibt sich $I_\mathfrak{m} I_\mathfrak{m}^{-1} = R_\mathfrak{m}$, also ist $\phi_\mathfrak{m}$ surjektiv und nach Satz 9.13 ist ϕ ein Isomorphismus und daher $II^{-1} = R$. □

Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Die Länge der echt aufsteigenden Kette $\mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$ von Primidealen $\mathfrak{p}_i$ von R ist n. Die Dimension $\dim(R)$ von R ist das Supremum über die Länge aller echt aufsteigenden Ketten von Primidealen von R.

Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal, so nennen wir $\dim(R/\mathfrak{p})$ die Dimension und $\dim(R_\mathfrak{p})$ die Kodimension von R.

Ist R ein Integritätsring mit $\dim(R) = 0$, so ist R ein Körper. Denn $\{0\}$ ist ein Primideal, und wegen $\dim(R) = 0$ ist es das einzige Primideal von R. Daher ist es maximal und jedes Element $\neq 0$ eine Einheit.

Ist R ein Integritätsring mit $\dim(R) = 1$, so ist $\{0\}$ ein Primideal und jedes weitere Primideal ist $\neq 0$ und maximal.

Für einen Integritätsring R ist Bedingung $\dim(R) \leq 1$ also äquivalent dazu, daß jedes Primideal $\neq 0$ von R maximal ist.

Zum Beispiel ist die Dimension des Polynomrings $k[x_1, \ldots, x_n]$ über dem Körper k gleich n.

Jeder Körper K ist ein Dedekindring, denn K ist das einzige Ideal $\neq 0$ und K ist invertierbar. Für einen Dedekindring R gilt $\dim(R) \leq 1$. Denn entweder ist $\{0\}$ maximales Ideal und R ein Körper, oder jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq 0$ ist invertierbar und wegen Lemma 10.6 maximal.

10.13 Definition. Ein diskreter Bewertungsring ist ein lokaler Hauptidealring der Dimension 1.

Ist R ein diskreter Bewertungsring, so gibt genau ein maximales Ideal $\mathfrak{m} = \pi R \neq 0$ von R. Dann ist $\mathfrak{m}$ das einzige Primideal $\neq 0$, und π ist ein Primelement. Da R auch faktoriell ist, gibt es zu jedem $a \in R\backslash\{0\}$ genau ein $u \in R^\times$ und $e \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ mit $a = u\pi^e$. Die Zuordnung $v : R \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ mit $v(a) = e$ und $v(0) = \infty$ liefert eine surjektive, diskrete Bewertung (siehe Algebra 1).

10.14 Lemma. *Ist R ein Integritätsring mit $\dim(R) = 1$ und $\mathfrak{p} \neq 0$ ein Primideal von R, dann gilt $\dim(R_\mathfrak{p}) = 1$.*

Beweis. Zunächst ist $R_\mathfrak{p}$ lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. Die Abbildung $I \mapsto IR_\mathfrak{p} = I_\mathfrak{p}$ ist nach Satz 2.69 invers zur Abbildung $J \mapsto J \cap R$ für Ideale I von R und J von $R_\mathfrak{p}$. Wegen $\mathfrak{p} \neq 0$ folgt daraus $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \neq 0$. Für jedes Primideal $\mathfrak{q}'$ von $R_\mathfrak{p}$ gilt $\mathfrak{q}' \subseteq \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}' \cap R$ ist ein Primideal von R mit $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. Es folgt $\mathfrak{q} = \{0\}$ oder $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ und daraus $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}R_\mathfrak{p} = \{0\}$ oder $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. Also gilt $\dim(R_\mathfrak{p}) = 1$. □

10.15 Satz. *Ein noetherscher Integritätsring R der Dimension 1 ist genau dann ein Dedekindring, wenn $R_\mathfrak{p}$ für jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq 0$ ein diskreter Bewertungsring ist.*

Beweis. $\Rightarrow$: Sei R ein Dedekindring. Dann ist $R_\mathfrak{p}$ lokal und es gilt $\dim(R_\mathfrak{p}) = 1$ nach Lemma 10.14. Sei $J \neq 0$ ein Ideal von $R_\mathfrak{p}$. Wir setzen $I = J \cap R$. Dann gilt $I \neq 0$ und $I_\mathfrak{p} = J$. Da R ein Dedekindring ist, ist I invertierbar. Nach Satz 10.12 ist dann $J = I_\mathfrak{p}$ ein Hauptideal.

$\Leftarrow$: Sei $I \neq 0$ ein Ideal von R. Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R ist $I_\mathfrak{p}$ ein Hauptideal, da $R_\mathfrak{p}$ ein Hauptidealring ist. Nach Satz 10.12 ist I damit invertierbar. □

Dedekindringe treten beispielsweise als Maximalordnungen von Zahlkörpern und als Koordinatenringe nicht-singulärer algebraischer Kurven auf. Wir wollen die Aussage von Satz 10.15 noch etwas detaillierter und allgemeiner untersuchen. Der folgende und nächste Satz kann zum Beispiel auf beliebige Ordnungen von Zahlkörpern und auf die Koordinatenringe algebraischer Varietäten angewendet werden.

10.16 Lemma. *Ein noetherscher Integritätsring R ist genau dann ein diskreter Bewertungsring, wenn R ein lokaler Ring mit* $\dim(R) = 1$ *und das maximale Ideal* $\mathfrak{m}$ *ein Hauptideal ist.*

Ein Ring R ist genau dann ein diskreter Bewertungsring, wenn R ein lokaler faktorieller Ring mit $\dim(R) = 1$ *ist.*

Sei R ein faktorieller Ring. Dann ist $\mathfrak{p}$ genau dann ein Primideal von R mit $\dim(R_\mathfrak{p}) = 1$*, wenn $\mathfrak{p} = R\pi$ für ein Primelement π von R gilt.*

Beweis. Zur ersten Aussage: $\Rightarrow$ ist klar. Für $\Leftarrow$ sei nun $\mathfrak{m} = \pi R$ mit $\pi \neq 0$ wegen $\dim(R) = 1$. Für $x \in R\backslash\{0\}$ gibt es ein maximales $e \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ und $u \in R$ mit $x = u\pi^e$, da R noethersch und nullteilerfrei ist. Wegen der Maximalität von e folgt $u \in R\backslash\pi R = R^\times$. Ist I ein Ideal von R und $a \in I$ mit minimalem Exponenten e, dann gilt $a \mid b$ für alle $b \in I$, also $I = aR$.

Zur zweiten Aussage: $\Rightarrow$ ist klar. Für $\Leftarrow$ sei π ein Primelement von R, welches wegen $\dim(R) = 1$ existiert. Dann ist $R\pi$ ein Primideal und wegen $\dim(R) = 1$ ist $R\pi$ das maximale Ideal von R. Aus der ersten Aussage folgt, daß R ein diskreter Bewertungsring ist.

Zur dritten Aussage: Wir machen eine allgemeine Vorbemerkung. Ist R ein faktorieller Ring und U eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge, so ist $R[U^{-1}]$ ebenfalls faktoriell. Sind die π_i ein vollständiges Vertretersystem von Primelementen modulo Assoziation, so liefern die π_i, die nicht zu Einheiten in $R[U^{-1}]$ werden, ein vollständiges Vertretersystem von Primelementen von $R[U^{-1}]$ modulo Assoziation. Hier ist die Begründung: Für $x \in R$ ist $x \in R[U^{-1}]^\times$ genau dann, wenn es $y \in R$ und $u \in U$ mit $x(y/u) = 1$ gibt, also wenn $xy = u$ und $x \mid u$ gilt. Ist π_i ein Primelement, welches kein Element aus U teilt, so ist π_i ein Primelement in $R[U^{-1}]$. Denn aus $\pi_i(c/w) = (a/u)(b/v)$ mit $a, b, c \in R$ und $u, v, w \in U$ folgt $\pi_i cuv = abw$, und daraus folgt $\pi_i \mid a$ oder $\pi_i \mid b$ nach Voraussetzung. Also teilt π_i auch a/u oder b/v und ist damit ein Primelement von $R[U^{-1}]$. Jedes Element aus $R[U^{-1}]$ kann als Potenzprodukt der π_i geschrieben werden, da dies bereits in R möglich ist. Sind π_i und π_j assoziiert in $R[U^{-1}]$, so gibt es $u, v \in U$ mit $u\pi_i = \pi_j v$. Da π_i und π_j weder u noch v teilen, folgt $\pi_i = \pi_j$ nach Voraussetzung.

„$\Rightarrow$“: Wegen $\dim(R_\mathfrak{p}) = 1$ ist $R_\mathfrak{p}$ ein lokaler faktorieller Ring der Dimension 1 mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \neq 0$ und nach der zweiten Aussage des Lemmas ein diskreter Bewertungsring. Nach der obigen Vorbemerkung gibt es ein Primelement π von R, welches kein Element von $U = R\backslash\mathfrak{p}$ teilt und für welches $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} = \pi R_\mathfrak{p}$

gilt. Aus $x = (y/u)\pi \in R$ beziehunsgweise $ux = y\pi$ für $x, y \in R$ mit $x \neq 0$ und $u \in U$ folgt $\pi \mid x$. Daher ergibt sich $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \cap R = \pi R$ mit Satz 2.69.

„$\Leftarrow$“: Da π Primelement ist, ist $\mathfrak{p} \neq 0$ ein Primideal. Ferner ist $R_\mathfrak{p}$ ein lokaler faktorieller Ring mit $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \neq 0$. Daraus folgt $\dim(R_\mathfrak{p}) = 1$. $\square$

Die erste Aussage des Lemmas trifft für alle Primideale $\neq 0$ eines Dedekindrings zu. Unter Beachtung von Lemma 9.27 heißt das nichts anderes, als daß $\dim(R_\mathfrak{m}) \cong \dim_{R/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ für alle maximalen Primideale von R gilt. Man sagt, daß die lokalen Ringe $R_\mathfrak{m}$ regulär seien.

10.17 Satz. *Sei R ein noetherscher Integritätsring und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R.*

(*i*) *Ist $\mathfrak{p}$ invertierbar, so ist $R_\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring.*

(*ii*) *Ist $R_\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring und $R_\mathfrak{m}$ faktoriell für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R mit $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}$, so ist $\mathfrak{p}$ invertierbar.*

Beweis. (*i*): Ist $\mathfrak{p}$ invertierbar, so gilt $\mathfrak{p} \neq 0$ und $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \neq 0$. Es folgt $\dim(R_\mathfrak{p}) = 1$. Weiter ist $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ nach Satz 10.12 ein Hauptideal. Nach der ersten Aussage von Lemma 10.16 ist $R_\mathfrak{p}$ dann auch ein diskreter Bewertungsring.

(*ii*): Nach Satz 10.12 genügt es zu beweisen, daß $\mathfrak{p}$ lokal ein Hauptideal ist. Dazu können wir uns auf Lokalisierungen für maximale Ideale beschränken. Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von R mit $\mathfrak{m} \not\supseteq \mathfrak{p}$, so gilt $\mathfrak{p}R_\mathfrak{m} = R_\mathfrak{m}$, also ist $\mathfrak{p}$ hier frei. Sei $\mathfrak{m}$ also ein maximales Ideal mit $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}$. Dann ist $R_\mathfrak{m}$ nach Voraussetzung faktoriell und wir wollen zeigen, daß $\mathfrak{p}R_\mathfrak{m}$ ein Hauptideal ist. Zur Vereinfachung der Notation und da $R_\mathfrak{p}$ nur eine weitere Lokalisierung von $R_\mathfrak{m}$ ist, können wir annehmen: R ist faktoriell, $\mathfrak{p}$ ist ein Primideal von R und $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ ist ein Hauptideal. Aus der dritten Aussage von Lemma 10.16 folgt, daß $\mathfrak{p}$ wie gewünscht ein Hauptideal ist. $\square$

Die Voraussetzung in (*iii*), daß $R_\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring sein soll, könnten wir also wegen der zweiten Aussage von Lemma 10.16 auch durch $\dim(R_\mathfrak{p}) = 1$ ersetzen.

Ist I ein Ideal von R, welches lokal frei vom Rang 1 ist, so nennen wir I auch ein lokales Hauptideal.

10.18 Satz. *Sei R ein noetherscher Integritätsbereich. Sei $\mathcal{S}$ die Menge der maximalen Ideale von R, für die $R_\mathfrak{m}$ nicht faktoriell ist, und sei $\mathcal{I}$ die Menge der lokalen Hauptideale $I \neq 0$, für die $I_\mathfrak{m} = R_\mathfrak{m}$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \in \mathcal{S}$ gilt. Dann besitzt $\mathcal{I}$ die Primidealfaktorisierungseigenschaft.*

Beweis. Zunächst gilt $R \in \mathcal{I}$ und jedes Ideal aus $\mathcal{I}$ ist ganz und nach Satz 10.12 invertierbar. Außderdem ist $\mathcal{I}$ nach Lemma 10.11 multiplikativ abgeschlossen.

Wir wollen die Eigenschaft (ii) in Satz 10.8 nachrechnen. Sei I ein lokales Hauptideal von R. Für $I = R$ ist nichts zu zeigen. Für $I \neq R$ gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{n} \notin \mathcal{S}$ mit $I_\mathfrak{n} \neq R_\mathfrak{n}$, wobei $R_\mathfrak{n}$ faktoriell ist.

Da $I_\mathfrak{n}$ ein Hauptideal ist, gibt es $x \in R$ mit $I_\mathfrak{n} = xR_\mathfrak{n}$. Wegen $I_\mathfrak{n} \neq R_\mathfrak{n}$ ist x keine Einheit in $R_\mathfrak{n}$ und es gibt ein Element $\pi \in R$, welches in $R_\mathfrak{n}$ ein Primelement mit $\pi \,|\, x$ ist. Sei $\mathfrak{p} = \pi R_\mathfrak{n} \cap R$. Dann ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R mit $\mathfrak{p} \supseteq I$.

Nach Konstruktion gilt $\mathfrak{p}R_\mathfrak{n} = \pi R_\mathfrak{n}$ und $R_\mathfrak{p}$ ist ein diskreter Bewertungsring nach der ersten Aussage in Lemma 10.16. Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}$ gilt $\mathfrak{m} \notin \mathcal{S}$ und $R_\mathfrak{m}$ ist ein faktorieller Ring nach Voraussetzung. Denn für $\mathfrak{m} \in \mathcal{S}$ gilt $I_\mathfrak{m} = R_\mathfrak{m}$, und daraus folgt $I_\mathfrak{p} = R_\mathfrak{p}$, was hier nicht der Fall ist. Nach Satz 10.17, (ii) ist $\mathfrak{p}$ daher invertierbar. Schließlich sind $\mathfrak{p}^{-1}$ und $\mathfrak{p}^{-1}I$ nach Satz 10.12 und Lemma 10.11 invertierbar und lokale Hauptideale, deren Lokalisierung bei $\mathfrak{m} \in \mathcal{S}$ gleich $R_\mathfrak{m}$ ist. Also gilt $\mathfrak{p}^{-1}I \in \mathcal{I}$. Damit erfüllt $\mathcal{I}$ die Primidealfaktorisierungseigenschaft. □

Die Menge $\mathcal{S}$ kann als Menge singulärer Punkte von R aufgefaßt werden. Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal (oder ein Primideal) und gilt $I_\mathfrak{m} \neq R_\mathfrak{m}$, so sagen wir, $\mathfrak{m}$ sei im Träger von I. Im Satz 10.18 wird also gefordert, daß die Ideale aus $\mathcal{I}$ keine singulären Punkte in ihren Trägern haben sollen.

Wir wollen die beiden voranstehenden Sätze hauptsächlich für $\dim(R) = 1$ anwenden. Hier ist ein $\dim(R) = 2$ Beispiel: Der Polynomring $k[x, y]$ über einem Körper ist faktoriell. Das maximale Ideal $\mathfrak{m} = Rx + Ry$ ist wegen $\dim(R_\mathfrak{m}) = 0$ nicht invertierbar. Jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R mit $\dim(R_\mathfrak{p}) = 1$ ist ein Hauptideal und invertierbar.

10.4 Ganze Ringerweiterungen

Seien S ein Ring und R ein Teilring von S. Dann nennen wir S auch einen Erweiterungsring von R und $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung. Gemäß unseren Konventionen gilt $1_R = 1_S$.

Ist $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung, können wir S auch als R-Algebra und R-Modul auffassen. Dann heißt S von endlichem Typ über R, wenn S als R-Algebra endlich erzeugt ist, wenn es also $x_1, \ldots, x_n \in S$ mit $S = R[x_1, \ldots, x_n]$ gibt. Weiter heißt S endlich über R, wenn S als R-Modul endlich erzeugt ist, wenn es also $y_1, \ldots, y_m \in S$ mit $S = Ry_1 + \cdots + Ry_m$ gibt.

Ein Element $x \in S$ heißt ganz über R, wenn es ein normiertes Polynom $f \in R[t]$ mit $f(x) = 0$ gibt. Die Ringerweiterung $R \subseteq S$ heißt ganz, wenn jedes

$x \in S$ ganz über R ist. Der ganze Abschluß von R in S ist $\mathrm{Cl}(R,S) = \{x \in S \mid x \text{ ganz über } R\}$. Der Ring R heißt ganz abgeschlossen (normal) in S, wenn $\mathrm{Cl}(R,S) = R$ gilt. Ist R ein Integritätsring, dann heißt R ganz abgeschlossen (normal), wenn R ganz abgeschlossen in $S = \mathrm{Quot}(R)$ ist.

10.19 Lemma. *Sei $R \subseteq S$ eine Ringerweiterung und $x \in S$. Dann sind äquivalent:*

(i) *x ist ganz über R.*

(ii) *$R[x]$ ist endlich über R.*

(iii) *Es gibt einen über R endlich erzeugten $R[x]$-Modul M mit $\mathrm{Ann}_{R[x]}(M) = \{0\}$.*

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $f(x) = 0$ mit $f = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i t^i$ und $\lambda_i \in R$, $\lambda_n = 1$. Dann gilt $0 = f(x) = x^n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x^i$, also $x^n = \sum_{i=0}^{n-1} (-\lambda_i) x^i$. Daher bilden $1, x, \ldots, x^{n-1}$ ein endliches Erzeugendensystem von $R[x]$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Sei $M = R[x]$. Nach Voraussetzung ist M endlich erzeugt über R und wegen $1 \in M$ folgt aus $zM = \{0\}$ für $z \in R[x]$ bereits $z \cdot 1 = z = 0$. Also gilt $\mathrm{Ann}_{R[x]}(M) = \{0\}$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Sei $x \in R$ und $\phi \in \mathrm{End}_{R[x]}(M)$ mit $\phi(m) = xm$. Nach Satz 9.25 angewendet auf M, $I = R$ und ϕ gibt es ein normiertes $f \in R[t]$ mit $f(\phi) = 0$, also $f(x)M = \{0\}$. Wegen $\mathrm{Ann}_{R[x]}(M) = \{0\}$ folgt $f(x) = 0$. □

10.20 Satz. *Seien $R \subseteq S$ und $S \subseteq T$ Ringerweiterungen.*

(i) *Ist S endlich über R, so ist S ganz über R.*

(ii) *Wenn T endlich über S und S endlich über R ist, so ist T endlich über R. Ist T endlich über R, so ist T endlich über S.*

(iii) *Sind die $x_1, \ldots, x_n \in S$ ganz über R, so ist $R[x_1, \ldots, x_n]$ endlich über R.*

(iv) *T ist genau dann ganz über R, wenn T ganz über S und S ganz über R ist.*

(v) $\mathrm{Cl}(R,S)$ *ist ein Erweiterungsring von R.*

(vi) $\mathrm{Cl}(R,S)$ *ist ganz abgeschlossen in S. abgeschlossen.*

Beweis. (i): Folgt aus Lemma 10.19, (iii) mit $M = S$.

(ii): Sind die x_i ein Erzeugendensystem von T über S und die y_j ein Erzeugendensystem von S über R, so sind die $x_i y_j$ ein Erzeugendensystem von T über R, was die erste Aussage beweist.

Sind die x_i ein Erzeugendensystem von T über R, so sind die x_i auch ein Erzeugendensystem von T über S, was die zweite Aussage beweist.

(*iii*): Aus Lemma 10.19, (*ii*) und der zweiten Aussage in (*ii*) folgt, daß $R[x_1,\ldots,x_i]$ endlich über $R[x_1,\ldots,x_{i-1}]$ ist. Aus der ersten Aussage in (*ii*) mehrfach angewendet ergibt sich damit, daß $R[x_1,\ldots,x_n]$ endlich über R ist.

(*iv*): „$\Rightarrow$" folgt direkt aus der Definition von „ganz". Für „$\Leftarrow$" sei $x\in T$ und $f=\sum_{i=0}^n \lambda_i t^i \in S[t]$ mit $\lambda_n=1$ und $f(x)=0$. Nach (*iii*) und (*ii*) ist $R[\lambda_1,\ldots,\lambda_n,x]$ endlich über R und wegen (*i*) dann auch ganz über R. Also ist speziell x ganz über R.

(*v*): Es gilt $R\subseteq \mathrm{Cl}(R,S)$, da R ganz über R ist. Für $x,y\in\mathrm{Cl}(R,S)$ ist $R[x,y]$ nach (*iii*) und (*i*) ganz über R. Wegen $x+y,xy\in R[x,y]$ sind dann auch $x+y$ und xy ganz über R, also gilt $x+y,xy\in\mathrm{Cl}(R,S)$.

(*vi*) $\mathrm{Cl}(R,S)$ ist nach (*iv*) ganz abgeschlossen in S. □

10.21 Satz. *Jeder faktorielle Ring R ist ganz abgeschlossen.*

Beweis. Seien $x/u\in\mathrm{Quot}(R)$ mit $x,u\in R$ teilerfremd und $\lambda_i\in R$ mit $(x/u)^n+\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i(x/u)^i=0$. Multiplikation mit u^n liefert $x^n+\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i u^{n-i}x^i=0$. Wegen $i\le n-1$ ist x^n durch u teilbar, im Widerspruch zur Annahme. □

Ist $R\subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung und $f:S\to T$ ein Homomorphismus, so ist $S'=\phi(S)$ ganz über $R'=\phi(R)$: Für $y\in S'$ gibt es $x\in S$ mit $\phi(x)=y$. Ist $f\in R[t]$ normiert mit $f(x)=0$, so ist $\phi(f)\in R'[t]$ normiert und es gilt $\phi(f)(y)=\phi(f)(\phi(x))=\phi(f(x))=0$. Also ist y ganz über R'.

10.22 Satz. *Sei $R\subseteq S$ eine Ringerweiterung und U eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R mit $1\in U$.*

(*i*) *Ist $R\subseteq S$ ganz, so ist auch $R[U^{-1}]\subseteq S[U^{-1}]$ ganz.*

(*ii*) *Es gilt* $\mathrm{Cl}(R,S)[U^{-1}]=\mathrm{Cl}(R[U^{-1}],S[U^{-1}])$.

(*iii*) *R ist genau dann ganz abgeschlossen in S, wenn $R_\mathfrak{m}$ für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R ganz abgeschlossen in $S_\mathfrak{m}=S[(R\backslash\mathfrak{m})^{-1}]$ ist.*

Beweis. (*i*): Die Aussage folgt aus der Bemerkung vor dem Satz.

(*ii*): Nach (*i*) ist $\mathrm{Cl}(R,S)[U^{-1}]$ ganz über $R[U^{-1}]$, es folgt also $\mathrm{Cl}(R,S)[U^{-1}]\subseteq\mathrm{Cl}(R[U^{-1}],S[U^{-1}])$.

Sei $x/u\in\mathrm{Cl}(R[U^{-1}],S[U^{-1}])$ mit $x\in S$ und $u\in U$. Für $x/u\in\mathrm{Cl}(R,S)[U^{-1}]$ müssen wir zeigen, daß es ein $v\in U$ mit xv ganz über R gibt. Sei $(x/u)^n+\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda_i/u_i)(x/u)^i=0$ mit $\lambda_i\in R$ und $u_i\in U$. Sei $v=\prod_{i=0}^{n-1}u_i$. Multiplikation mit $(uv)^n$ liefert $(xv)^n+\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda_i u^{n-i}v^{n-i}/u_i)(xv)^i=0$, wobei $\lambda_i u^{n-i}v^{n-i}/u_i\in R$ wegen $i\le n-1$ gilt. Also ist xv ganz über R und es folgt $\mathrm{Cl}(R[U^{-1}],S[U^{-1}])\subseteq\mathrm{Cl}(R,S)[U^{-1}]$.

(*iii*): Wir betrachten den Inklusionshomomorphismus $\phi : R \to \mathrm{Cl}(R,S)$ und die Lokalisierungen $\phi_{\mathfrak{m}} : R_{\mathfrak{m}} \to \mathrm{Cl}(R,S)_{\mathfrak{m}}$. Wegen $\mathrm{Cl}(R,S)_{\mathfrak{m}} = \mathrm{Cl}(R_{\mathfrak{m}}, S_{\mathfrak{m}})$ nach (*ii*) sind die $\phi_{\mathfrak{m}}$ genau dann Isomorphismen, wenn $R_{\mathfrak{m}}$ für alle $\mathfrak{m}$ ganz abgeschlossen in $S_{\mathfrak{m}}$ ist. Ebenso ist ϕ genau dann ein Isomorphismus, wenn R ganz abgeschlossen in S ist. Die Äquivalenz dieser Aussagen folgt nun aus Satz 9.13. □

Die Aussage (*iii*) gilt dann natürlich auch wieder für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R anstelle der maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von R.

10.5 Globale Charakterisierung von Dedekindringen

Sei M ein R-Modul. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R mit $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(m)$ für ein $m \in M$, so heißt $\mathfrak{p}$ ein assoziiertes Primideal von M. Wegen $\mathfrak{p} \neq R$ folgt hier $m \neq 0$. Es gilt $\mathfrak{p} \supseteq \mathrm{Ann}_R(M)$.

10.23 Satz. *Sei $M \neq 0$ ein R-Modul.*

(*i*) *Sei J ein maximales Ideal in der Menge*

$$\mathcal{I} = \{I \mid I \textit{ Ideal von } R \textit{ mit } I = \mathrm{Ann}_R(m) \textit{ für ein } m \in M\backslash\{0\}\}.$$

Dann ist I ein Primideal.

(*ii*) *Jeder noethersche R-Modul $M \neq 0$ besitzt ein assoziiertes Primideal.*

Beweis. (*i*): Sei $m \in M\backslash\{0\}$ mit $J = \mathrm{Ann}_R(m)$. Zunächst gilt $J \neq R$, da $m \neq 0$. Seien $x, y \in R$ mit $xy \in J$ und $x \notin J$. Dann ist $xm \neq 0$ und $(Ry + J)(xm) = \{0\}$. Wegen der Maximalität von J folgt $J = Ry + J$, also $y \in J$. Daher ist J ein Primideal.

(*ii*): Wegen $M \neq 0$ gilt $\mathcal{I} \neq \emptyset$. Es gilt zum Beispiel $\{0\} \in \mathcal{I}$. Da M noethersch ist, gibt es in $\mathcal{I}$ ein maximales Ideal J, welches nach (*i*) ein Primideal ist. □

10.24 Lemma. *Sei R ein lokaler noetherscher Integritätsring R der Dimension* 1. *Dann sind äquivalent:*

(*i*) *R ist ganz abgeschlossen.*

(*ii*) *$(I : I) = R$ für jedes Ideal $I \neq 0$ von R.*

(*iii*) *R ist ein diskreter Bewertungsring.*

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Wegen $RI = I$ gilt $(I : I) \supseteq R$. Da R noethersch ist, ist I ein endlich erzeugter R-Modul. Da R ein Integritätsring und $I \neq 0$ ist, folgt $\mathrm{Ann}_R(I) = \{0\}$. Nach Satz 10.19, (iii) sind die Elemente aus $(I : I)$ ganz über R. Da R ganz abgeschlossen ist, folgt $(I : I) \subseteq R$, also $(I : I) = R$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Sei $\mathfrak{p}$ das maximale Ideal von R. Es gilt $R \subseteq \mathfrak{p}^{-1}$ und daher ist $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p}$ ein Ideal von R mit $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p} \subseteq R$. Da $\mathfrak{p}$ maximal ist, gilt $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p} = R$.

Wir nehmen $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ an. Da R Dimension 1 hat, ist $\mathfrak{p} \neq 0$. Nach (ii) gilt dann $\mathfrak{p}^{-1} \subseteq R$. Nach Satz 10.23 gibt es zu $x \in \mathfrak{p}\backslash\{0\}$ ein assoziiertes Primideal $\mathfrak{q} \subseteq R$ von R/Rx. Wegen $\mathfrak{q} \supseteq \mathrm{Ann}_R(R/Rx) = Rx \neq 0$ und da R Dimension 1 hat, folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Nach der Definition von assoziiertem Primideal gibt es also $y \in R\backslash Rx$ mit $y\mathfrak{p} \subseteq Rx$. Es gilt also $(y/x)\mathfrak{p} \subseteq R$ und $y/x \notin R$. Daraus folgt $\mathfrak{p}^{-1} \not\subseteq R$. Also ist $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ nicht möglich, es gilt $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p} = R$. Damit ist $\mathfrak{p}$ invertierbar, und nach Satz 10.17, (i) ist R ein diskreter Bewertungsring.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Jeder diskrete Bewertungsring ist auch ein faktorieller Ring. Nach Satz 10.21 ist R ganz abgeschlossen. □

10.25 Satz. *Sei R ein noetherscher Integritätsring R der Dimension 1. Dann sind äquivalent:*

(i) *R ist ganz abgeschlossen.*

(ii) *$(I : I) = R$ für jedes Ideal $I \neq 0$ von R.*

(iii) *R ist ein Dedekindring.*

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Nach Satz 10.22, (iii) ist $R_\mathfrak{p}$ ganz abgeschlossen für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R. Nach Lemma 10.24 gilt damit $(I_\mathfrak{p} : I_\mathfrak{p}) = R_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p}$. Nach Satz 9.13 und Lemma 10.11, (ii) folgt $(I : I) = R$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von R und jedes Ideal J von $R_\mathfrak{p}$ ist $I = J \cap R$ ein Ideal von R mit $I_\mathfrak{p} = J$. Wegen $(I : I) = R$ gilt $(J : J) = (I_\mathfrak{p} : I_\mathfrak{p}) = R_\mathfrak{p}$ nach Lemma 10.11, (ii). Nach Lemma 10.24 ist $R_\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring für alle $\mathfrak{p}$. Nach Satz 10.15 ist R dann ein Dedekindring.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Nach Satz 10.15 ist $R_\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von R. Nach Lemma 10.24 ist $R_\mathfrak{p}$ ganz abgeschlossen für alle $\mathfrak{p}$. Nach Satz 10.22, (iii) ist damit R ganz abgeschlossen. □

Der Satz 10.25 enthält Lemma 10.24 als Spezialfall, wenn man R lokalisiert. Die Äquivalenz von (i) und (ii) gilt auch ohne die Voraussetzung $\dim(R) = 1$, und (iii) wird durch die Aussage ersetzt, daß für jedes zu R/Rx mit $x \neq 0$ assoziierte Primideal $\mathfrak{p}$ der lokale Ring $R_\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring ist. Dazu beweist man eine Version von Satz 9.13 unter der Voraussetzung R noethersch, in der nur für solche assoziierte Primideale lokalisiert werden muß. Dann tauchen im Beweis von Satz 10.25 nur noch zu R/Rx mit $x \neq 0$ assoziierte Primideale $\mathfrak{p}$ auf. Speziell wird Lemma 10.24 im Beweis von Satz 10.25 nur für $R_\mathfrak{p}$ mit zu $R_\mathfrak{p}/xR_\mathfrak{p}$ assoziierten Primidealen $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ angewendet. Der Beweis von Lemma 10.24 basiert dann direkt auf dieser Eigenschaft und benötigt die Voraussetzung $\dim(R) = 1$ nicht mehr.

Für einen ganz abgeschlossenen, noetherschen Integritätsring R und ein Primideal $\mathfrak{p}$ von R mit $\dim(R_\mathfrak{p}) = 1$ ist $R_\mathfrak{p}$ nach Satz 10.22, (*iii*) ganz abgeschlossen und daher nach Lemma 10.24 ein diskreter Bewertungsring. Ist dann noch $R_\mathfrak{m}$ faktoriell für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}$, so ist $\mathfrak{p}$ nach Satz 10.17 invertierbar. Damit R nicht singulär im Sinn der Bemerkung nach Satz 10.18 ist ($R_\mathfrak{m}$ faktoriell für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R), muß R also notwendigerweise ganz abgeschlossen sein. Für $\dim(R) = 1$ ist dies nach Satz 10.25 auch hinreichend, weil jedes Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\dim(R_\mathfrak{p}) = 1$ maximal ist. Für $\dim(R) \geq 2$ gibt es Beispiele, in denen R ganz abgeschlossen ist und es dennoch singuläre maximale Ideale $\mathfrak{m}$ von R gibt (also $R_\mathfrak{m}$ nicht faktoriell).

Die Aussage (*ii*) von Satz 10.25 kann für die Berechnung von $\mathrm{Cl}(R, \mathrm{Quot}(R))$ genutzt werden. Für invertierbare Ideale I gilt stets $(I : I) = I^{-1}I = R$. Durch das Aufspüren geeigneter, nicht invertierbarer Ideale I und die Bestimmung der Erweiterungsringe $(I : I)$ von R können wir R sukzessive zu $\mathrm{Cl}(R, \mathrm{Quot}(R))$ erweitern. Ist zum Beispiel $\mathfrak{p}$ ein Primideal $\neq 0$ mit $R_\mathfrak{p}$ nicht ganz abgeschlossen, so gilt $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \cap R = \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^{-1} \not\subseteq R$ nach dem Beweis von Lemma 10.24. Daraus folgt, daß $(\mathfrak{p} : \mathfrak{p})$ ein über R ganzer Erweiterungsring von R mit $(\mathfrak{p} : \mathfrak{p}) \neq R$ ist.

Im folgenden Satz wird das leere Produkt für $I = R$ mit eingerechnet.

10.26 Satz. *Sei R ein Integritätsring mit der Eigenschaft, daß jedes Ideal ein Produkt von Primidealen ist. Dann ist R ein Dedekindring.*

Beweis. Ist zwar nicht so schwer und lang, lassen wir aber aus. □

Die klassische Zusammenfassung der äquivalenten Eigenschaften eines Dedekindrings liefert nun der folgende Satz.

10.27 Satz. *Für einen Integritätsring R sind äquivalent:*

(*i*) *R ist ein Dedekindring.*

(*ii*) *Jedes Ideal läßt sich bis auf die Reihenfolge auf genau eine Weise als Produkt von Primidealen von R schreiben.*

(*iii*) *R ist noethersch und $R_\mathfrak{p}$ ist ein diskreter Bewertungsring für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \neq 0$ von R.*

(iv) R ist ganz abgeschlossen und noethersch, und jedes Primideal von R ist maximal.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Satz 10.8.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Satz 10.26.
$(i) \Leftrightarrow (iii)$: Satz 10.15.
$(i) \Leftrightarrow (iv)$: Satz 10.25. □

Hier ist eine weitere Eigenschaft von Dedekindringen (vgl. das Diagramm auf Seite 27).

10.28 Satz. *Ein noetherscher Integritätsbereich R ist genau dann ein Hauptidealring, wenn R ein Dedekindring und faktoriell ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Da Hauptideale $\neq 0$ invertierbar sind, ist diese Aussage klar.
„$\Leftarrow$“: Sei $\mathfrak{p} \neq 0$ ein Primideal von R und $x \in \mathfrak{p}\backslash\{0\}$. Sei $Rx = \prod_i \mathfrak{p}_i$ die Faktorisierung in Primideale mit $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$. Sei $x = \prod_j \pi_j$ eine Faktorisierung in Primelemente. Die Ideale $R\pi_j$ sind dann Primideale und es gilt $Rx = \prod_j R\pi_j$. Wegen der Eindeutigkeit der Faktorisierung folgt $\mathfrak{p} = R\pi_j$ für ein j. Also ist $\mathfrak{p}$ ein Hauptideal. Da $\mathfrak{p}$ beliebig war, sind alle Primideale und damit alle Ideale von R Hauptideale. □

10.6 Beispiele

Beispiele für freie Moduln sind die R-Moduln R^n.

Ein Beispiel für einen projektiven, aber nicht freien Modul ist $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ und das Ideal $M = 2R + (1 + \sqrt{-5})R$. Der Beweis dieser Tatsache fällt in die algebraische Zahlentheorie (R ist ganzalgebraisch abgeschlossen, also ein Dedekindring, und M ist kein Hauptideal. Die Klassenzahl von R ist 2).

Hier sind weitere Details zu diesem Beispiel. Sei $\rho = \sqrt{-5}$. Dann gilt $6 = 2 \cdot 3 = (1+\rho)(1-\rho)$. Man kann zeigen, daß 2, 3, $1+\rho$ und $1-\rho$ irreduzible Elemente in R sind. Also ist R ein Ring, in dem es keine eindeutige Faktorisierung in Primelemente mehr gibt. Zur Abhilfe wurden von Kummer in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts „ideale Zahlen“ eingeführt, mit denen dann eine eindeutige Faktorisierung möglich sein sollte (vergleichbar mit dem Übergang von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}$, so daß jede Zahl in $\mathbb{Z}$ invertierbar wird). Bei diesen handelt es sich schlicht um (invertierbare) Ideale von R. Das geht dann wie folgt: Sei $\mathfrak{p} = 2R + (1+\rho)R$, $\mathfrak{q}_1 = 3R + (1+\rho)R$ und $\mathfrak{q}_2 = 3R + (1-\rho)R$. Dann sind $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_1$ Primideale. (Ein Beweis dieser Tatsache kann im Prinzip wie folgt gehen: Sei p eine Primzahl und $f = t^2 + 5 \in \mathbb{Z}[t]$ Dann gilt $R \cong \mathbb{Z}[t]/(f)$. Wir betrachten die natürlichen Homomorphismen $\phi : R \mapsto R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$ und $\psi : R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p[t]/(g)$, wobei $g \in \mathbb{F}_p[t]$

die Reduktion von $f \in \mathbb{Z}[t]$ ist. Nach einer Übungsaufgabe wissen wir, daß ψ ein Isomorphismus ist. Der Homomorphismus ϕ ist surjektiv und hat den Kern pR. Die Verknüpfung $\psi \circ \phi$ ist gerade der kanonische Epimorphismus. Damit entsprechen sich die Primideale $\mathfrak{p}$ von R mit $p \in \mathfrak{p}$ und die Primideale von $R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$ eineindeutig. Mit Hilfe des chinesischen Restsatzes können wir die Primideale von $\mathbb{F}_p[t]/(g)$ bestimmen, dann ihre Urbilder unter ψ und ihre Urbilder unter ϕ. Die Primideale von $\mathbb{F}_p[t]/(g)$ werden von den irreduziblen Faktoren von g erzeugt.) Weiter gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}^2 &= 2R, \quad \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2 = 3R \\ \mathfrak{p}\mathfrak{q}_1 &= (1+\rho)R, \quad \mathfrak{p}\mathfrak{q}_2 = (1-\rho)R. \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Faktorisierung von 6:

$$\begin{aligned} 6R &= 2R \cdot 3R = \mathfrak{p}^2\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2 \\ 6R &= (1+\rho)R \cdot (1-\rho)R = \mathfrak{p}\mathfrak{q}_1\mathfrak{p}\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{p}^2\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2. \end{aligned}$$

Man sieht hier schön, wie durch die Hinzunahme der Primideale die Elementsituation ergänzt wird. Speziell sind $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ keine Hauptideale, denn sonst gäbe es ja Primelemente, welche 2, 3, $1+\rho$ und $1-\rho$ teilen würden und 2, 3, $1+\rho$ und $1-\rho$ könnten nicht irreduzibel sein.

Wegen $\mathfrak{p}^2 = 2R$ und $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2 = 3R$ sind diese Ideale invertierbare Ideale, da $2R$ und $3R$ invertierbar sind. Damit sind sie auch projektiv. Sie sind aber nicht frei, denn sonst müßten sie ja Hauptideale sein.

Typische Beispiele für flache, aber nicht projektive R-Moduln kann man aus den Moduln $M[U^{-1}]$, aufgefaßt als R-Moduln, erhalten. Sei $R = M = \mathbb{Z}$, $U = \langle 3 \rangle$ und $M[U^{-1}] = \mathbb{Z}[1/3]$. Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}[1/3]$ ist einerseits nicht endlich erzeugt, denn sonst wären die auftretenden Nenner in $\mathbb{Z}[1/3]$ beschränkt, andererseits sind aber je zwei Elemente aus $\mathbb{Z}[1/3]$ über $\mathbb{Z}$ linear abhängig. Insbesondere kann es keine Einbettung von $\mathbb{Z}[1/3]$ in einen freien $\mathbb{Z}$-Model geben, da in einem freien $\mathbb{Z}$-Modul Elemente nicht beliebig durch Potenzen von 3 teilbar sind, was aber in $\mathbb{Z}[1/3]$ der Fall ist. Nach Satz 9.22, (ii) ist $\mathbb{Z}[1/3]$ daher nicht projektiv. Ein weiteres Beispiel für diesen Effekt ist $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}$-Modul.

Torsionsfreie, aber nicht flache Moduln sind zum Beispiel das maximale Ideal M von $R = k[[x_1, x_2]]$ als R-Modul, oder $M = \mathbb{Z}[(1+\sqrt{5})/2]$ als $R = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$-Modul.

Kapitel 11

Kategorien

Wir wollen in diesem Kapitel ein paar Worte über Kategorien und die Begriffe direkte Summe und direktes Produkt sagen, ohne allzusehr auf die Details einzugehen. Mit Hilfe von Kategorien kann man gängige mathematische Konstrukte und Situationen gebietsübergreifend und allgemein behandeln. Das ist für sich genommen interessant und manchmal in konkreten Anwendungen auch nützlich.

11.1 Allgemeine Bemerkungen

Unter eine Kategorie versteht man eine Ansammlung von mathematischen Objekten gleichen Typs und ihre strukturerhaltenden Abbildungen, welche Morphismen genannt werden. Beispiele sind Gruppen und Homomorphismen, Ringe und Ringhomomorphismen, topologische Räume und stetige Abbildungen, Mannigfaltigkeiten und differenzierbare Funktionen, Mengen und Abbildungen und eben auch Moduln über einem Ring R und R-lineare Abbildungen, an denen wir hauptsächlich interessiert sind. Für solche Objekte gibt es immer wiederkehrende Konstruktionen wie direkte Summen und Produkte. In der Kategorientheorie werden unter anderem solche Gemeinsamkeiten und Prinzipien herausgearbeitet und abstrakt, häufig losgelöst von speziellen Typen mathematischer Objekte, untersucht.

In vielen Fällen handelt es sich bei den Objekten einer Kategorie nicht einmal um Mengen mit Elementen, sondern beispielsweise wieder um Abbildungen (zum Beispiel Funktoren, siehe unten). Entsprechend müssen die Morphismen keine Abbildungen sein. Trotzem sollen Morphismen einen „Definitionsbereich“ und einen „Bildbereich“ haben und es soll möglich sein, Morphismen zu „verknüpfen“ und auf Gleichheit zu testen, was man eben von echten Abbildungen erwarten würde.

Eine Abbildung zwischen zwei Kategorien, welche Objekte auf Objekte und

Morphismen auf Morphismen abbildet, mit Homomorphieeigenschaft bezüglich der Verknüpfung von Morphismen, heißt ein Funktor. Ein Beispiel ist der Vergißfunktor von der Kategorie der R-Moduln in die Kategorie der Mengen, der jedem Modul seine unterliegende Menge und jedem Homomorphismus die entsprechende Abbildung von Mengen zuordnet. Ein anderes Beispiel ist die Fixgruppenabbildung $\mathcal{G}_{E/K}$ aus der Galoistheorie, welche Körper und Inklusionsabbildungen nach Gruppen und umgekehrte Inklusionsabbildungen abbildet.

Ein Funktor stellt also eine Beziehung zwischen zwei Kategorien dar. Man kann einen Funktor zum Beispiel dazu benutzen, die Kategorie des Definitionsbereichs mit Hilfe der Kategorie des Bildbereichs zu untersuchen. Ein wichtiges Beispiel hierfür ist die Galoistheorie, wo Körper mit Hilfe von Gruppen untersucht werden. Ähnlich kann man auch gewissen topologischen Räumen ihre Fundamentalgruppen zuordnen und anhand dieser Gruppen Rückschlüsse auf die topologischen Räume ziehen.

Im folgenden wird eine Kurzzusammenfassung bzw. ein Glossar gängiger kategorientheoretischer Begriffe gegeben. Im allgemeinen müßten wir noch etwas auf mengentheoretische Probleme achten (siehe „Menge aller Mengen"), aber das soll uns hier nicht weiter stören.

11.2 Definitionen

Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus einer Klasse $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ von Objekten und einer Klasse $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ von Morphismen mit den folgenden Eigenschaften. Jeder Morphismus $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ besitzt genau ein Objekt $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ als „Definitionsbereich" und genau ein Objekt $B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ als „Wertebereich". Die Morphismen $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ mit Definitionsbereich A und Wertebereich B bilden eine Menge, die mit $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ bezeichnet wird. Wir schreiben auch $f : A \to B$. Es gibt Verknüpfungen $\circ : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,C)$ und ausgezeichnete Elemente $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,A)$ mit $f \circ \mathrm{id}_A = f$, $\mathrm{id}_A \circ f = f$ und $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ für beliebige $f, g, h \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$, deren Definitions- und Wertebereiche entsprechend zusammenpassen.

Unser Standardbeispiel ist $\mathcal{C} = (R\text{-Moduln})$, die Kategorie der R-Moduln, für einen Ring R mit 1. Hier schreiben wir $\mathrm{Hom}_R(A,B)$ statt $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$. Man kann als weitere, abstrakte Beispiele aber auch geeignete, gerichtete Graphen heranziehen, wo die Ecken die Objekte und die Pfeile die Morphismen darstellen.

Eine Teilkategorie $\mathcal{D}$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ erfüllt definitionsgemäß $\mathrm{Obj}(\mathcal{D}) \subseteq \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ und $\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(A,B) \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ für alle $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ und heißt voll, wenn hier speziell $\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(A,B) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ gilt.

Ein Morphismus $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ heißt Isomorphismus, wenn es $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,A)$

mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$ gibt. Zwei Objekte A und B heißen isomorph, wenn es einen Isomorphismus $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ gibt. Ein Morphismus $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ heißt Monomorphismus, wenn für alle Objekte C und $g_1, g_2 \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, A)$ aus $f \circ g_1 = f \circ g_2$ bereits $g_1 = g_2$ folgt. Ein Morphismus $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ heißt Epimorphismus, wenn für alle Objekte C und $g_1, g_2 \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ aus $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ bereits $g_1 = g_2$ folgt.

Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ordnet jedem Objekt $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ genau ein Objekt $F(A) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ und jedem Morphismus $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ genau einen Morphismus $F(f) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ zu, so daß folgendes gilt: Für $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ gilt $F(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$, außerdem $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ für beliebige Morphismen $f, g \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ mit passendem Definitions- und Wertebereichen und $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ für alle Objekte $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Speziell nennt man F auch einen kovarianten Funktor. Einen kontravarianten Funktor erhalten wir, wenn $F(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$ statt $F(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ und die entsprechenden Anpassungen gelten (wenn F also die „Pfeilrichtung" umkehrt). Den identischen Funktor auf $\mathcal{C}$ bezeichen wir mit $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt voll bzw. treu, wenn $F : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(F(A), F(B))$ surjektiv bzw. injektiv ist.

Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, so erhalten wir eine neue Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, die zu $\mathcal{C}$ duale Kategorie, indem wir „alle Pfeile" umdrehen. Wir notieren einen Morphismus $f : A \to B$ dann einfach formal als $f^{\mathrm{op}} : B \to A$, ansonsten bleibt alles beim alten. Ein Funktor $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ ist dann im wesentlichen nichts anderes als ein kontravarianter Funktor von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$. Es gilt $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}$. Ein Beispiel für einen kontravarianten Funktor ist die Fixgruppenabbildung aus der Galoistheorie.

Eine natürliche Transformation $\phi : F \to G$ zweier Funktoren $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus den folgenden Daten: Für jedes $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ ist $\phi_A : F(A) \to G(A)$ ein Morphismus in $\mathcal{D}$ mit der Eigenschaft, daß für jeden Morphismus $f : A \to B$ in $\mathcal{C}$ die Gleichung $G(f) \circ \phi_A = \phi_B \circ F(f)$ gilt (man zeichne das zugehörige, kommutative Diagramm). Speziell ist beispielsweise die identische natürliche Transformation $\phi = \mathrm{id}_F$ durch $\phi_A = \mathrm{id}_{F(A)}$ gegeben.

Eine natürliche Äquivalenz besteht aus zwei natürlichen Transformationen $\phi : F \to G$ und $\psi : G \to F$ mit $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_G$ und $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_F$. Wir schreiben dann $F \cong G$. Zwei Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ heißen äquivalent, wenn es Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ mit $F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ und $G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ gibt.

Als Beispiel betrachten wir die Kategorie $\mathcal{C}$ der endlich dimensionalen k-Vektorräume (k ein Körper). Die Zuordnung $V \mapsto V^*$ eines Vektorraums V zu seinem Dualraum liefert einen Funktor $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$. In der linearen Algebra wird gezeigt, daß es eine „kanonische" oder „natürliche" Isomorphie $V^{**} \cong V$ gibt. Mit der eingeführten Terminologie heißt das genauer, daß es einen Isomorphismus

$\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to F^2$ in $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ gibt. Also liefert F auch eine Äquivalenz von Kategorien.

Das kartesische Produkt $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ zweier Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ besitzt als Objekte und Morphismen Paare $(A, B) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ und $(f, g) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$. Ein Bifunktor der Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ in eine Kategorie $\mathcal{E}$ ist ein Funktor $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$. Ein Bifunktor verhält sich also in beiden Argumenten funktoriell.

11.3 Funktorkategorien und Lemma von Yoneda

Funktoren F, $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zweier Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ und ihre natürlichen Transformationen $\phi : F \to G$ bilden die Objekte und Morphismen einer Kategorie $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, welche die Funktorkategorie von $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ genannt wird. Die Eigenschaften einer Kategorie sind hierbei mit den naheliegenden Operationen leicht verifiziert. Eine natürliche Äquivalenz zweier Funktoren $F, G \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}))$ entspricht also einem Isomorphismus in $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, was mit der Schreibweise $F \cong G$ zusammenpaßt.

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Mit (Mengen) sei die Kategorie der Mengen und Abbildungen bezeichnet. Zwei besonders interessante Funktoren, genannt Hom-Funktoren, ergeben sich wie folgt. Für $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ sei $h_X(B) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, B)$ und $h'_X(A) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, X)$. Für $f : A \to B$ sei $h_X(f) : h_X(A) \to h_X(B)$ gegeben durch $g \mapsto f \circ g$ und $h'_X(f) : h'_X(B) \to h'_X(A)$ gegeben durch $g \mapsto g \circ f$. Man beachte, daß h'_X die Pfeilrichtung umkehrt. Es ist leicht einsichtig, daß h_X ein Funktor von $\mathcal{C}$ nach (Mengen) und h'_X ein Funktor von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ nach (Mengen) ist. Wir schreiben manchmal $h_X = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$ und $h'_X = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, X)$.

Die injektive Zuordnung $X \mapsto h_X$ liefert einen Funktor $h : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C},$ (Mengen)). Die Beziehung von $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ und $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},(\mathrm{Mengen}))}(h_X, h_Y)$ ist Inhalt des folgenden Lemmas, Aussage (*ii*).

11.1 Lemma (Yoneda)**.** *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.*

(*i*) *Für $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ und $F \in \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, (Mengen))$ gilt*

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},(Mengen))}(h_X, F) \cong F(X)$$

unter der Abbildung $i : \mathrm{Mor}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},(Mengen))}(h_X, F) \to F(X)$, $\phi \mapsto \phi_X(\mathrm{id}_X)$ und ihrer Inversen $j : F(X) \to \mathrm{Mor}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},(Mengen))}(h_X, F)$, $x \mapsto \phi$ mit $\phi_Y(f) = F(f)(x)$.

(*ii*) *Der Funktor $h : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, (Mengen))$ liefert eine Äquivalenz von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ mit einer vollen Unterkategorie von $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, (Mengen))$.*

Beweis. (i): Für $\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},(\mathrm{Mengen}))}(h_X, F)$ ist $\phi_X : h_X(X) \to F(X)$. Da $\mathrm{id}_X \in h_X(X) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$, gilt $\phi_X(\mathrm{id}_X) \in F(X)$ und die Abbildung i ist wohldefiniert.

Für $x \in F(X)$, $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ und $f \in h_X(Y) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ist $\phi_Y : h_X(Y) \to F(Y)$ mit $\phi_Y(f) = F(f)(x) \in F(Y)$ eine wohldefinierte Abbildung. Haben wir $g : Y \to Z$, so gilt

$$\begin{aligned}(F(g) \circ \phi_Y)(f) &= F(g)(\phi_Y(f)) = F(g)(F(f)(x)) = (F(g) \circ F(f))(x) \\ &= F(g \circ f)(x) = \phi_Z(g \circ f) = \phi_Z(h_X(g)(f)) = (\phi_Z \circ h_X(g))(f).\end{aligned}$$

Daraus folgt $F(g) \circ \phi_Y = \phi_Z \circ h_X(g)$ und $\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},(\mathrm{Mengen}))}(h_X, F)$. Also ist j wohldefiniert.

Sei $\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},(\mathrm{Mengen}))}(h_X, F)$ und $x = \phi_X(\mathrm{id}_X)$. Mit $f \in h_X(Y)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}j(i(\phi))_Y(f) &= F(f)(x) = F(f)(\phi_X(\mathrm{id}_X)) = (F(f) \circ \phi_X)(\mathrm{id}_X) \\ &= (\phi_Y \circ h_X(f))(\mathrm{id}_X) = \phi_Y(h_X(f)(\mathrm{id}_X)) = \phi_Y(f \circ \mathrm{id}_X) = \phi_Y(f),\end{aligned}$$

also $j \circ i = \mathrm{id}$, da Y und f beliebig waren. Sei $x \in F(X)$ und $\phi = j(x)$. Dann ergibt sich

$$i(j(x)) = i(\phi) = \phi_X(\mathrm{id}_X) = F(\mathrm{id}_X)(x) = x,$$

also $i \circ j = \mathrm{id}$, da x beliebig war. Damit sind i und j zueinander inverse, bijektive Abbildungen, was zu zeigen war.

(ii): h ist ein Funktor mit injektiver Zuordnung $X \mapsto h_X$. Die Aussage folgt damit aus (i) angewendet für den Fall $F = h_Y$ für $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. □

Nach (ii) können wir Objekte X aus $\mathcal{C}$ also auch durch Funktorobjekte h_X und Morphismen f aus $\mathcal{C}$ durch natürliche Transformationen $h_X(f)$ in der unter Umständen größeren Kategorie $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, (\mathrm{Mengen}))$ ohne Informationsverlust darstellen. Dies bringt manchmal Vorteile mit sich (siehe Beispiel unten).

Ein Funktor $F \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, (\mathrm{Mengen})))$ heißt darstellbar, wenn es ein $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ und eine Isomorphie $F \cong h_X$ gibt. Das Objekt X ist dann bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Denn ist $f : h_X \to h_Y$ ein Isomorphismus, so ist auch $h^{-1}(f) : X \to Y$ aufgrund der Funktoreigenschaft von h und der Bijektion in Lemma 11.1, (i) ein Isomorphismus.

11.2 Beispiel. Um ein Beispiel zu geben sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie (Morphismen können addiert werden, siehe Abschnitt unten) mit genau einem Objekt X. Die Axiome einer additiven Kategorie machen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$ mit $+$ und $\circ$ zu einem Ring R mit 1. Ist umgekehrt R ein Ring mit 1, so ist die Kategorie $\mathcal{C}$, welche als einziges Objekt die Menge $X = R$ und als Morphismen die Multiplikationen

$m_a : R \to R$, $x \mapsto ax$ mit $a \in R$ besitzt, aufgrund der Ringaxiome eine additive Kategorie. Ferner sind diese beiden Konstruktionen invers zueinander.

Für eine additive Kategorie sind h_X und F additive Funktoren (F wird so gewählt, also sind die Funktoren verträglich mit der Addition von Morphismen), so daß das Lemma 11.1 mit der Kategorie (Abelsche Gruppen) statt (Mengen) richtig bleibt. Wir können X bzw. $R = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$ dann auch als h_X bzw. $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},(\text{Abelsche Gruppen}))}(h_X, h_X) \cong R$ in $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, (\text{Abelsche Gruppen}))$ darstellen. Aber worum handelt es sich bei $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, (\text{Abelsche Gruppen}))$? Jedes $F \in \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, (\text{Abelsche Gruppen}))$ ist bereits durch die abelsche Gruppe $F(X)$ eindeutig bestimmt, da $\mathcal{C}$ nur das Objekt X besitzt. Wegen der Additivität und Funktoreigenschaft von F bekommen wir einen Ringhomomorphismus $F : R = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X) \to \mathrm{Mor}_{(\text{Abelsche Gruppen})}(F(X), F(X))$, so daß $F(X)$ zu einem R-Modul wird. Jedes F definiert also einen R-Modul $F(X)$, und damit ist die Kategorie $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, (\text{Abelsche Gruppen}))$ die Kategorie der R-Moduln.

Das Lemma von Yoneda reduziert sich in dieser Situation zu der Aussage $M \cong \mathrm{Hom}_R(R, M)$ über koinduzierte Moduln (vgl. Satz 9.8).

Wenn wir in $\mathcal{C}$ mehrere Objekte betrachten, erhalten wir eine Verallgemeinerung des Ringbegriffs, und $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, (\text{Abelsche Gruppen}))$ liefert dann eine Verallgemeinerung des Modulbegriffs. Mit der Methode des Beispiels kann man allgemein eine additive Kategorie in eine abelsche Kategorie einbetten.

Die obigen (kovarianten) Aussagen über h_X besitzen analoge (kontravariante) Aussagen für h'_X (die wir hier der Klarheit halber angeben, obwohl das eigentlich aus Symmetriegründen überflüssig ist).

11.3 Lemma (Yoneda'). *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.*

(*i*) *Für $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ und $F \in \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, (\mathit{Mengen}))$ gilt*

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},(\mathit{Mengen}))}(h'_X, F) \cong F(X)$$

unter der Abbildung $i : \mathrm{Mor}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},(\mathit{Mengen}))}(h'_X, F) \to F(X)$, $\phi \mapsto \phi_X(\mathrm{id}_X)$ und ihrer Inversen $j : F(X) \to \mathrm{Mor}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},(\mathit{Mengen}))}(h'_X, F)$, $x \mapsto \phi$ mit $\phi_Y(f) = F(f)(x)$.

(*ii*) *Der Funktor $h : \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, (\mathit{Mengen}))$ liefert eine Äquivalenz von $\mathcal{C}$ mit einer vollen Unterkategorie von $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, (\mathit{Mengen}))$.*

Beweis. Folgt direkt aus Lemma 11.1, wenn wir Lemma 11.1 mit $\mathcal{D} = \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ anwenden und beachten, daß h'_X in $\mathcal{C}$ der gleiche Funktor wie h_X in $\mathcal{D}$ ist (wir identifizieren X in $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ und in $\mathrm{Obj}(\mathcal{D})$). □

Ein kontravarianter Funktor $F : \mathcal{C} \to$ (Mengen) heißt darstellbar, wenn es ein $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ mit $F \cong h'_X$ gibt (das haben wir genau genommen noch nicht definiert). Das Objekt X ist dann wieder bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Die Zuordnung $\mathrm{op} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ liefert im übrigen einen kontravarianten Funktor, welcher die Objekte und Morphismen bijektiv abbildet. Daher entsprechen die kontravarianten Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ eineindeutig den (kovarianten) Funktoren $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ nach $\mathcal{D}$. Man kann so in jeder Situation bzw. Aussage „die Pfeile umdrehen“ und eine entsprechende, duale Situation bzw. Aussage erhalten.

11.4 Limites und Kolimites

In diesem Abschnitt betrachten wir Limites und Kolimites am Beispiel der Kategorie der R-Moduln. Es handelt sich hierbei um allgemeine Formen der Begriffe direktes Produkt und direkte Summe, aber auch Kern und Kokern.

Die kategorielle Definition des direkten Produkts lautet wie folgt: Seien A_1,A_2, B Moduln und $\pi_i \in \mathrm{Hom}_R(B, A_i)$ (Projektionen). Dann heißt B ein direktes Produkt von A_1 und A_2, wenn für jeden Modul C und $g_i \in \mathrm{Hom}_R(C, A_i)$ genau ein $f \in \mathrm{Hom}_R(C, B)$ existiert mit $\pi_i \circ f = g_i$. Es ist wieder günstig, sich ein graphisches Bild der Situation zu malen. Ein direktes Produkt ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt: Ist B' mit π'_i ein weiteres direktes Produkt, so gibt es $f \in \mathrm{Hom}_R(B', B)$ und $f' \in \mathrm{Hom}_R(B, B')$ mit $\pi'_i = \pi_i \circ f$ und $\pi_i = \pi'_i \circ f'$, also $\pi'_i = \pi'_i \circ f' \circ f$. Aufgrund der Eindeutigkeitsbedingung für B folgt $f' \circ f = \mathrm{id}_B$. Analog ergibt sich $f \circ f' = \mathrm{id}_{B'}$. Man zeigt nun, daß direkte Produkte existieren (dies muß nicht in jeder Kategorie der Fall sein), und zwar in Form der bekannten Konstruktion $B = A_1 \times A_2$. In der Kategorie der Mengen stimmt das direkte Produkt mit dem Schnitt überein.

Bei der direkten Summe geht man genau andersherum vor. Seien A_1, A_2, B Moduln und $\iota_i \in \mathrm{Hom}_R(A_i, B)$ (Injektionen). Dann heißt B eine direkte Summe von A_1 und A_2, wenn für jeden Modul C und $g_i \in \mathrm{Hom}_R(A_i, C)$ genau ein $f \in \mathrm{Hom}_R(B, C)$ existiert mit $f \circ \iota_i = g_i$. Es ist günstig, sich ein graphisches Bild der Situation zu malen. Eine direkte Summe ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt: Ist B' mit π'_i eine weitere direkte Summe, so gibt es $f \in \mathrm{Hom}_R(B, B')$ und $f' \in \mathrm{Hom}_R(B', B)$ mit $\iota'_i = f \circ \iota_i$ und $\iota_i = f' \circ \iota'_i$, also $f' \circ f \circ \iota_i = \iota_i$. Aufgrund der Eindeutigkeitsbedingung für B folgt $f' \circ f = \mathrm{id}_B$. Analog ergibt sich $f \circ f' = \mathrm{id}_{B'}$. Man zeigt nun, daß direkte Summen existieren (dies muß nicht in jeder Kategorie der Fall sein), und zwar in Form der bekannten Konstruktion $B = A_1 \oplus A_2$. In der Kategorie der Mengen stimmt die direkte Summe mit der disjunkten Vereinigung überein.

Die Definition wird üblicherweise auf beliebige Familien von Moduln A_i verallgemeinert. Notationsweise schreibt man $\prod_i A_i$ für das direkte Produkt und $\coprod_i A_i$ für die direkte Summe, weil die direkte Summe das „umgekehrte“ direkte Produkt ist. Direkte Summen werden daher auch Koprodukte genannt. Dahinter steckt ein allgemeines Prinzip der Kategorientheorie, daß man durch Umkehrung der Morphismen (Pfeile) zu dualen Definitionen und Sätzen gelangt. Solche dualen Konstruktionen werden mit dem Präfix „Ko“ versehen.

Produkte und Koprodukte sind noch nicht die allgemeinste Definition, die man treffen kann. Zum Beispiel kann man beim Produkt zu A_1, A_2 noch einen Modul A_3 und Morphismen $h_i \in \operatorname{Hom}_R(A_i, A_3)$ für $i \in \{1, 2\}$ betrachten. Man definiert das Faserprodukt als Modul B zusammen mit $\pi_j \in \operatorname{Hom}_R(B, A_j)$, so daß für jeden Modul C und Abbildungen $g_j \in \operatorname{Hom}_R(C, A_j)$ für $j \in \{1, 2, 3\}$ mit $g_3 = h_i \circ g_i$ für $i \in \{1, 2\}$ ein eindeutig bestimmter Morphismus $f \in \operatorname{Hom}_R(C, B)$ mit $g_j = \pi_j \circ f$ für $j \in \{1, 2, 3\}$ existiert. Entsprechend wird Fasersumme bzw. Faserkoprodukt definiert.

Allgemein betrachtet man ganze Diagramme von A_i und Morphismen zwischen den A_i. Unter einem Diagramm $\mathcal{A}$ von R-Moduln versteht man einfach eine Teilkategorie der Kategorie der R-Moduln. Unter einem Morphismus g von B nach $\mathcal{A}$ verstehen wir eine Sammlung von Morphismen $g_i \in \operatorname{Hom}_R(B, A_i)$ von B zu den A_i in $\mathcal{A}$, so daß folgendes gilt. Für alle Objekte A_i, A_j und Morphismen $h \in \operatorname{Hom}_R(A_i, A_j)$ in $\mathcal{A}$ gelte $g_j = h \circ g_i$. Analog wird ein Morphismus von $\mathcal{A}$ nach B definiert. Für einen Funktor F ist $F(\mathcal{A})$ wieder ein Diagramm.

11.4 Definition. Der Limes des Diagramms $\mathcal{A}$ ist ein R-Modul B zusammen mit einem Morphismus π von B nach $\mathcal{A}$ derart, daß es für jeden R-Modul C und Morphismus g von C nach $\mathcal{A}$ genau ein $f \in \operatorname{Hom}_R(C, B)$ mit $g = \pi \circ f$ gibt. Man schreibt $B = \varprojlim \mathcal{A}$.

Der Kolimes des Diagramms $\mathcal{A}$ ist ein R-Modul B zusammen mit einem Morphismus ι von $\mathcal{A}$ nach B derart, daß es für jeden R-Modul C und Morphismus g von $\mathcal{A}$ nach C genau ein $f \in \operatorname{Hom}_R(B, C)$ mit $g = f \circ \iota$ gibt. Man schreibt $B = \varinjlim \mathcal{A}$.

Andere Namen für Limes und Kolimes sind projektiver Limes und induktiver Limes, oder inverser und direkter Limes. Wir nennen die π Projektionen und die ι_i Injektionen (die Projektionen müssen aber nicht unbedingt surjektiv und die Injektionen injektiv sein).

11.5 Satz. *Limes und Kolimes von Diagrammen existieren in der Kategorie der R-Moduln und sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt wie bei direkten Produkten und Koprodukten. Für die Existenz des Limes gehen wir wie folgt vor. Wir bilden das direkte Produkt

$\prod_i A_i$ der Objekte im Diagramm $\mathcal{A}$ mit der Projektion $\pi' : \prod_i A_i \to \mathcal{A}'$, wobei $\mathcal{A}'$ das Diagramm ist, welches nur aus den A_i und keinen Morphismen besteht. Ist $g : C \to \mathcal{A}$, so gibt es ein $f' \in \mathrm{Hom}_R(C, \prod_i A_i)$ mit $g = \pi' \circ f'$. Für $h \in \mathrm{Hom}_R(A_i, A_j)$ gilt $g_j(x) = h(g_i(x))$ für alle $x \in C$. Sei $B = \{(z_i)_i \in \prod_i A_i \mid h(z_i) = z_j$ für alle $h \in \mathrm{Hom}_R(A_i, A_j)$ in $\mathcal{A}$ und alle $i, j\}$. Das Bild von C in $\prod_i A_i$ ist also in B enthalten. Die Projektion π wird durch Einschränkung von π' auf B definiert. Wegen der Bedingungen für B gilt $\pi : B \to \mathcal{A}$. Dies zeigt, daß $B = \varprojlim \mathcal{A}$ ist.

Für die Existenz des Kolimes gehen wir wie folgt vor. Wir bilden die direkte Summe $\coprod_i A_i$ der Objekte im Diagramm $\mathcal{A}$ mit der Injektion $\iota' : \mathcal{A}' \to \coprod_i A_i$, wobei $\mathcal{A}'$ wieder das Diagramm ist, welches nur aus den A_i und keinen Morphismen besteht. Ist $g : \mathcal{A} \to C$, so gibt es ein $f' \in \mathrm{Hom}_R(\coprod_i A_i, C)$ mit $g = f' \circ \iota'$. Für $h \in \mathrm{Hom}_R(A_i, A_j)$ gilt $g_j(h(x)) = g_i(x)$ für alle $x \in C$. Was die Werte von g und f' angeht, braucht man also nicht zwischen x und $h(x)$ zu unterscheiden. In $\coprod_i A_i$ definieren wir U als den durch $\{\iota'_j(h(x)) - \iota'_i(x) \mid x \in A_i, h \in \mathrm{Hom}_R(A_i, A_j)$ in $\mathcal{A}$ und alle $i, j\}$ erzeugten Untermodul. Dann ist U im Kern von f' enthalten. Sei $B = \coprod_i A_i/U$. Die Injektion ι wird durch ι' gefolgt vom Restklassenhomomorphismus $\coprod_i A_i \to B$ definiert. Wegen der Bedingungen für B gilt $\iota : \mathcal{A} \to B$. Dies zeigt, daß $B = \varinjlim \mathcal{A}$ ist. $\square$

Sei p eine Primzahl. Als Beispiel betrachten wir das Diagramm $\mathcal{A}$ mit $A_i = \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ und den Abbildungen $h_{i,j} : A_i \to A_j$, $x \bmod p^i \mapsto x \bmod p^j$ für $i \geq j$. Die Elemente von $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathcal{A}$ sind „Zahlen“, die modulo beliebig hoher Primpotenzen bestimmt sind (zu vergleichen mit $\mathbb{R}$, dessen Zahlen in Dezimalentwicklung modulo beliebig hoher Potenzen von 10^{-1} definiert sind). Man kann den Limes statt für Moduln auch für Ringe bilden. Mengenmäßig bleibt $\mathbb{Z}_p$ gleich, wird aber zum Ring und heißt Ring der p-adischen ganzen Zahlen.

11.5 Universelle Konstruktionen und adjungierte Funktoren

Noch einzugeben.

11.6 Exaktheit

Noch einzugeben.