TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN Sommer 09
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. F. Heß
WM: G. Möhlmann
`www.math.tu-berlin.de/~hess/algebra1-ss2009`

11. Übung Algebra I

1. Aufgabe

Zeigt die Isomorphie der Ringe $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]_{\{0\}}$ und $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$, wobei der erste Ring der Lokalisierung von $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ an der Menge $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \setminus \{0\}$ entspricht.

(5 Punkte)

2. Aufgabe

Seien R ein Ring und $U \subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlosse Menge mit $1 \in U$. Der Abschluß $\overline{I}$ eines Ideals I von R ist definiert durch $\overline{I} := \{r \in R \mid \text{es gibt } u \in U \text{ mit } ur \in I\}$. I heißt abgeschlossen, wenn $\overline{I} = I$ gilt. Zeigt, dass der Abschluß $\overline{I}$ eines I Ideals von R ein Ideal mit $I \subseteq \overline{I}$ ist. Zeigt weiterhin, dass der Abschluß eines Ideals abgeschlossen ist.

(5 Punkte)

3. Aufgabe

Sei R ein kommutativer Ring und U eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R mit $1 \in U$ und $0 \notin U$. Zeigt die folgenden Aussagen:

(a) Ist R ein Hauptidealring, so ist auch $R[U^{-1}]$ ein Hauptidealring.

(b) Ist R noethersch, so ist auch $R[U^{-1}]$ noethersch.

(5 Punkte)

4. Aufgabe

Sei R ein kommutativer Ring und $f(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0 \in R[t]$. Ist a_0 eine Einheit in R und sind $a_1, \ldots a_n$ nilpotente Elemente, dann ist f invertierbar.

(5 Punkte)