TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN Sommer 09
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. F. Heß
WM: G. Möhlmann
www.math.tu-berlin.de/˜hess/algebra1-ss2009

10. Übung Algebra I

1. Aufgabe

Es sei R ein faktorieller Ring. Zeigt folgenden Aussagen:

(a) Jedes $x \in R\backslash\{0\}$ ist nur in endlich vielen Hauptidealen von R enthalten.

(b) Jede aufsteigende Kette von Hauptidealen wird stationär.

(5 Punkte)

2. Aufgabe

(a) Sei $f : R \to S$ eine Ringepimorphismus der Ringe R und S und sei R ein Ring, bei dem jedes Ideal ein Hauptideal ist. Zeigt, dass dann auch jedes Ideal von S ein Hauptideal ist.

(b) Gilt diese Aussage auch, wenn f nur ein Ringhomomorphismus ist?

(c) Gebt 17 nicht isomorphe Hauptidealringe an? Gibt es noch mehr als diese 17?

(5 Punkte)

3. Aufgabe

Zeigt, dass der Ring $\mathbb{Z}$ zusammen mit der Abbildung $v : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^{\geq 0},\ x \mapsto x^2$ ein euklidischer Ring ist. Gebt eine Abbildung $w : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^{\geq 0}$ an, die $\mathbb{Z}$ nicht zu einem euklidischen Ring macht.

(3 Punkte)

4. Aufgabe

(a) Eine Abbildung $|\cdot|: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ mit den Eigenschaften

(i) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(iii) $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$

für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ nennt man **Bewertung**. Zeigt, dass $R := \{x \in \mathbb{Q} \mid |x| \leq 1\}$ ein lokaler Ring ist und gebt das maximale Ideal an. Man nennt den Ring R **Bewertungsring**.

(b) Für eine feste Primzahl $p \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ bezeichne $\nu_p(x) \in \mathbb{Z}$ den p-Anteil von x, d.h. $x = p^{\nu_p(x)} \frac{a}{b}$ mit $p \nmid ab$ und $a, b \in \mathbb{Z}$. Zeigt, dass

$$|\cdot|_p: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}, \quad |x|_p := \begin{cases} 0 \text{ für } x = 0 \\ p^{-v(x)} \text{ sonst} \end{cases}$$

eine Bewertung ist. Bestimmt für $p \in \mathbb{N}$ den Bewertungsring und das maximale Ideal. Wie sehen die Elemente des Bewertungsringes und des maximalen Ideals aus?

(7 Punkte)