TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN Sommer 09
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. F. Heß
WM: G. Möhlmann
`www.math.tu-berlin.de/~hess/algebra1-ss2009`

9. Übung Algebra I

1. Aufgabe

Sei $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5}\}$. Wie wissen, dass wir jedes Element α von R eindeutig als $\alpha = a + b\sqrt{-5}$ schreiben können mit $a, b \in \mathbb{Z}$. Definiere

$$N : R \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad a + b\sqrt{-5} \longmapsto a^2 + 5b^2.$$

Man nennt N die Normfunktion von R. Zeigt:

(a) N ist multiplikativ, also ein Homomorphismus zwischen den Monoiden $(R, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}, \cdot)$.

(b) $R^\times = \{1, -1\}$.

(c) Die Elemente $(4 + \sqrt{-5}),\ (4 - \sqrt{-5}),\ (1 + 2\sqrt{-5})$ und $(1 - 2\sqrt{-5})$ sind irreduzibel, aber nicht prim.

(5 Punkte)

2. Aufgabe

Beweist oder widerlegt: Wenn R ein noetherscher Ring ist und $\phi : R \longrightarrow R$ ein Epimorphismus, so ist ϕ injektiv.

(5 Punkte)

3. Aufgabe

Findet alle Primideale, alle maximalen Ideale und alle Hauptideale in $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

(5 Punkte)

4. Aufgabe

Sei R ein kommutativer Ring und seien A und B zwei verschiedene maximale Ideale. Zeigt, dass dann $AB = A \cap B$ gilt.

(5 Punkte)