TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN Sommer 09
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. F. Heß
WM: G. Möhlmann
www.math.tu-berlin.de/~hess/algebra1-ss2009

8. Übung Algebra I

1. Aufgabe

Es sei $M(u,v) := \begin{pmatrix} u & v \\ -\overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix}$ und $Q = \{M(u,v) \mid u,v \in \mathbb{C}\}$ der Schiefkörper der Quaternionen. Wir definieren

$$I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K := IJ = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und } 1_Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigt, dass sich jedes Element $A \in Q$ in der Form $A = M(u,0) + M(v,0)J$ darstellen lässt.

(b) Zeigt, dass sich jedes Element $A \in Q$ durch eine $\mathbb{R}$-Linearkombination von $1_Q, I, J$ und K darstellen lässt.

(c) Stellt das Produkt von $x := \xi_o 1_Q + \xi_1 I + \xi_2 J + \xi_3 K$ und $y := \eta_o 1_Q + \eta_1 I + \eta_3 J + \eta_4 K$ wieder als $\mathbb{R}$-Linearkombination von $1_Q, I, J$ und K dar.

(d) Zeigt, dass in Q die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ unendlich viele Lösungen hat.

(6 Punkte)

2. Aufgabe

Zeigt für die Eulersche phi-Funktion

$$\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad z \longmapsto \sharp\{n \in \mathbb{N} \mid ggT(n,z) = 1 \text{ und } 1 \leq n \leq z\}$$

folgende Eigenschaft: Ist für $n \in \mathbb{N}$ die Faktorisierung in Primzahlen durch $n = \prod_{i=1}^{l} p_i^{e_i}$ gegeben ($p_i \neq p_j$ für $i \neq j$), so gilt

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^{l} (p_i - 1) p_i^{e_i - 1}.$$

Es bietet sich an, in diesem Zusammenhang den chinesischen Restsatz zu verwenden.

(5 Punkte)

3. Aufgabe

Gebt die Charakteristik folgender Ringe an:

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^{2\times 2} \quad \text{und} \quad \prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

(4 Punkte)

4. Aufgabe

Schreibt einen Algorithmus in KASH, der nach Eingabe von teilerfremden Zahlen $n_i \in \mathbb{Z}$ und beliebigen Zahlen $x_i \in \mathbb{Z}$ für $1 \leq i \leq r$ eine Zahl $x \in \mathbb{Z}$ bestimmt, welche

$$x \equiv x_i \bmod n_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq r$$

erfüllt. Benutz dazu das sogenannte Newtonverfahren, welches zum Beispiel in der Übung vorgestellt wurde. Auf der Homepage findet sich eine Datei, in der eine Methode steht, die ihr benutzen könnt und in der sich ein paar Beispiele finden.

(6 Punkte)