TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN Sommer 09
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. F. Heß
WM: G. Möhlmann
www.math.tu-berlin.de/~hess/algebra1-ss2009

7. Übung Algebra I

1. Aufgabe

Sei $f : R \to S$ ein Homomorphismus von Ringen. Beweist folgende Aussagen:

(a) Urbild und Bild von Unterringen von R und S bezüglich f sind wieder Unterringe.

(b) Ist J ein Ideal von S, so ist $f^{-1}(J)$ ein Ideal von R. Ist f ein Epimorphismus und I ein Ideal von R, so ist $f(I)$ ein Ideal von S.

(c) $\ker(f)$ ist ein Ideal von R.

(d) Der Schnitt von Idealen ist wieder ein Ideal

(e) Ist I Ideal von R und $I \cap R^\times \neq \emptyset$, so folgt $I = R$.

(f) Ist U ein Unterring von R und I ein Ideal von R, so ist $U + I$ ein Unterring von R.

(6 Punkte)

2. Aufgabe

Seien R und S kommutative Ringe und seien I und J Ideale von S.

(a) Sei nun $\phi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Beweist oder widerlegt die folgenden Aussagen:

  (i) $\phi^{-1}(IJ) \supseteq \phi^{-1}(I) \cap \phi^{-1}(J)$.

  (ii) $\mathrm{Rad}(S)$ ist ein Ideal von S und es gilt $\mathrm{Rad}(\mathrm{Rad}(S)) = \mathrm{Rad}(S)$.

  (iii) $\phi^{-1}(\mathrm{Rad}(S)) = \mathrm{Rad}(\phi^{-1}(S))$ wobei hier einmal das Radikal des Rings und ein das des Ideals gemeint ist.

(b) Für den Ring $S := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{e_i}$, wobei $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ gilt, berechne man $\mathrm{Rad}(S)$ und S^{red}.

(6 Punkte)

3. Aufgabe

(a) Zeigt, daß

$$K := \mathbb{Q} + \sqrt{5}\mathbb{Q} = \left\{ m + n\sqrt{5} \,|\, m, n \in \mathbb{Q} \right\}$$

ein Unterring von $\mathbb{R}$ ist und daß es für jedes $a \in K$ mit $a \neq 0$ ein $b \in K$ mit $ab = 1$ gibt.

(b) Zeige, daß mit $d = (1 + \sqrt{5})/2$ die Menge $\mathbb{Z} + d\mathbb{Z} = \{m + nd \,|\, m, n \in \mathbb{Z}\}$ ein Unterring von K ist.

(4 Punkte)

4. Aufgabe

Ein Element a eines Ringes R heißt idempotent, wenn $a^2 = a$ gilt. Bestimmt die ganzen Zahlen n für die $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nur zwei idempotente Elemente besitzt.

(4 Punkte)