TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN Sommer 09
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. F. Heß
WM: G. Möhlmann
`www.math.tu-berlin.de/~hess/algebra1-ss2009`

6. Übung Algebra I

1. Aufgabe

Sei G eine Gruppe der Ordnung 200. Zeigt, dass G einen nicht-trivialen abelschen Normalteiler besitzt.

(5 Punkte)

2. Aufgabe

Gebt eine 2-Sylowgruppe der S_4 an.

(2 Punkte)

3. Aufgabe

Eine Gruppe G heißt Quaternionengruppe, wenn G von zwei Elementen a, b erzeugt wird und wenn gilt

$$ord(a) = 4,\ a^2 = b^2,\ ba = a^3b.$$

(a) Zeigt, dass jedes Element in G von der Form $a^ib^j,\ 0 \leq i < 4,\ 0 \leq j < 2$ ist.

(b) Zeigt, dass G aus genau 8 Elementen besteht.

(c) Zeigt, dass G nicht abelsch ist.

(d) Zeigt, dass es bis auf Isomorphie maximal eine Quaternionengruppe gibt.

(e) Zeigt, dass es mindestens eine Quaternionengruppe gibt, nämlich die von

$$a := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.

(f) Zählt die Elemente der Ordnung 4 in G.

(8 Punkte)

4. Aufgabe

Zeigt, dass es bis auf Isomorphie genau zwei nicht-abelsche Gruppen der Ordnung 8 gibt. Zu diesem tollen Resultat führen verschiedene Wege, einer könnte wie folgt aussehen:

Wir haben schon zwei nicht abelsche Gruppen der Ordnung 8, die D_4 und die Quaternionengruppe Q_8. (Warum sind sie nicht isomorph?) Es gilt also zu zeigen, dass jede nicht-abelsche Gruppe G mit acht Elementen zu einer der beiden isomorph ist. Wir wissen weiterhin, dass die D_4 und die Q_8 eindeutig durch die Erzeuger und Relationen bestimmt sind, müssen also nur zeigen, dass G Elemente a, b mit bestimmten Eigenschaften besitzt. Dafür können die folgenden Überlegungen nützlich sein:

(a) Gruppen, bei denen jedes Element die Ordnung zwei hat, sind abelsch.

(b) Untergruppen vom Index zwei sind normal.

(5 Punkte)