

5. Übung Algebra I

1. Aufgabe

Eine Gruppe G operiert k -fach transitiv auf der G -Menge X , wenn für alle paarweise verschiedenen $x_1, \dots, x_k \in X$ und paarweise verschiedenen $y_1, \dots, y_k \in X$ ein $g \in G$ mit $gx_i = y_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ existiert. Wievielfach transitiv operiert die A_n auf der Menge $\{1, \dots, n\}$?

(5 Punkte)

2. Aufgabe

Sei $p \in \mathbb{P}$ und G eine Gruppe mit $\#G = p^2$. Zeigt, dass G abelsch ist. Verwendet dazu euer Wissen über das Zentrum einer Gruppe.

(5 Punkte)

3. Aufgabe

Konstruiert bitte je eine Gruppe G_i mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) G_1 hat 8 Elemente der Ordnung 3 und ist eine 3-Gruppe.
- (b) G_2 hat 8 Elemente der Ordnung 3 und ist keine 3-Gruppe.
- (c) G_3 hat 8 Elemente der Ordnung 3 und ist weder eine 3-Gruppe noch abelsch.

Kann es Gruppen G_4 und G_5 mit den folgenden Eigenschaften geben?

- (a) G_4 hat 8 Elemente der Ordnung 3 und ist eine 7-Gruppe.
- (b) G_5 hat 8 Elemente der Ordnung 3 und ist zyklisch.

(5 Punkte)

4. Aufgabe

Sei G eine Gruppe der Ordnung 55 und X eine Menge mit $\#X = 39$. Zeigt, dass G nicht fixpunktfrei auf X operieren kann.

(5 Punkte)