TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN Sommer 09
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. F. Heß
WM: G. Möhlmann
`www.math.tu-berlin.de/~hess/algebra1-ss2009`

4. Übung Algebra I

1. Aufgabe

Rechnet nach, dass es sich bei dem semidirekten Produkt $N \rtimes_\psi U$ von zwei Gruppen N und U und einem Homomorphismus $\psi : U \to \mathrm{Aut}(N)$ um eine Gruppe handelt.

(5 Punkte)

2. Aufgabe

Gegeben sei die folgende exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Gebt zwei nicht isomorphe Gruppen an, die für A in Frage kommen. Sagt jeweils wie die Abbildungen definiert sind.

(5 Punkte)

3. Aufgabe

Sei G eine Gruppe und seien N_1, N_2 Normalteiler von G mit endlichem Index. Zeigt, dass dann auch der Index von $N_1 \cap N_2$ endlich ist. Man könnte zunächst mit Hilfe der Isomorphiesätze beweisen, dass

$$G/N_1 \cong (G/N_1 \cap N_2)/(N_1N_2/N_2)$$

gilt.

(5 Punkte)

4. Aufgabe

(a) Seien G, H, K und L Gruppen mit $G \cong H$ und $K \cong L$. Zeigt, dass dann

$$G \times K \cong L \times H$$

gilt.

(b) Seien N und U zwei Normalteiler einer Gruppe G mit $G = NU$. Zeigt, dass für $K = N \cap U$ die Isomorphie

$$G/K \cong N/K \times U/K$$

gilt.

(5 Punkte)