TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN Sommer 09
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. F. Heß
WM: G. Möhlmann
www.math.tu-berlin.de/~hess/algebra1-ss2009

3. Übung Algebra I

1. Aufgabe

Sei $\{1\} \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow G_n \longrightarrow \{1\}$ eine endliche exakte Sequenz von endlichen Gruppen. Beweist oder widerlegt die folgende Behauptung.

$$\prod_{i=1}^{n} (\#G_i)^{(-1)^i} = 1$$

(5 Punkte)

2. Aufgabe

Seien G und G' Gruppen und $\phi : G \longrightarrow G'$ ein Epimorphismus mit $\ker \phi = N$. Ferner sei

$$L := \{H \mid H \leq G \text{ mit } N \subseteq H\} \quad \text{und} \quad L' := \{H' \mid H' \leq G'\}.$$

(a) Zeigt, dass die Abbildung

$$f : L \longrightarrow L', \quad H \longmapsto \phi(H)$$

die Abbildung

$$g : L' \longrightarrow L, \quad H' \longmapsto \phi^{-1}(H')$$

als Umkehrabbildung besitzt, wobei $\phi^{-1}(H') = \{g \in G \mid \phi(g) \in H'\}$ ist.

(b) Seien die Bezeichnungen so wie in (a). Zeigt, dass $V \trianglelefteq G \Longleftrightarrow \phi(V) \trianglelefteq G'$ gilt.

(c) Sei nun $G = \langle g \rangle$, $G' = \langle g' \rangle$ mit $g \in G$ und $g' \in G'$. Ferner sei $ord(g) = 12$, $ord(g') = 6$ und der Gruppenhomomorphismus

$$\phi : G \longrightarrow G', \quad g^i \longmapsto {g'}^i$$

gegeben. Wie sehen die Mengen L und L' aus?

(5 Punkte)

3. Aufgabe

Sei $\mathbb{Q}$ die Gruppe der rationalen Zahlen mit der Addition und $\mathbb{Z}$ die Untergruppe der ganzen Zahlen. Zeigt die folgenden Behauptungen.

(a) Jedes Element in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ besitzt endliche Ordnung.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\phi_n : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},\ x + \mathbb{Z} \mapsto nx + \mathbb{Z}$$

ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus.

(c) Es gilt $ker\phi_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(5 Punkte)

4. Aufgabe

Sei G eine endliche Gruppe und seien S und T nichtleere Teilmengen von G. Zeigt das $G = ST$ oder $\#G \geq \#S + \#T$ gilt.

(5 Punkte)