

# Mathematik II für MB, WI/MB und andere

Profs. Drs. Ulrich Reif, Wilhelm Stannat und Michael Joswig

Sommer 2011

Das vorliegende Skript ist eine Zusammenfassung der Vorlesungen “Mathematik II für MB, WI/MB und andere,” die im SS 2008 und SS 2011 an der TU Darmstadt gehalten wurden.

Inhaltlich teilweise angelehnt an das folgende Buch: K. Graf Finck von Finckenstein, J. Lehn, H. Schellhaas, H. Wegmann: Arbeitsbuch Mathematik für Ingenieure Band I: Analysis und Lineare Algebra, Teubner-Verlag.

Korrekturen bitte per Email an [joswig@mathematik.tu-darmstadt.de](mailto:joswig@mathematik.tu-darmstadt.de)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Folgen und Reihen von Funktionen</b>	<b>1</b>
1.1	Allgemeines . . . . .	1
1.2	Fourierreihen . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Kurven in <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>15</b>
2.1	Abstände und Konvergenz von Folgen . . . . .	15
2.2	Kurvenlänge . . . . .	18
2.3	Krümmung von Kurven . . . . .	19
2.4	Kurven in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Funktionen in mehreren Variablen</b>	<b>23</b>
3.1	Definition und erste Beispiele . . . . .	23
3.2	Darstellungsweisen . . . . .	23
3.3	Stetigkeit von Funktionen in mehreren Variablen . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>	<b>29</b>
4.1	Partielle Ableitungen . . . . .	29
4.2	Die totale Ableitung . . . . .	35
4.3	Die Taylorformel für Funktionen in $n$ Variablen . . . . .	36
4.4	Anwendung: Bestimmung von Extremalstellen . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Implizite Funktionen und Extrema mit Nebenbedingungen</b>	<b>45</b>
5.1	Vektorfelder . . . . .	45
5.2	Implizite Funktionen . . . . .	47
5.3	Extrema unter Nebenbedingungen . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Parameter- und Wegintegrale</b>	<b>55</b>
6.1	Parameterintegrale . . . . .	55
6.2	Integration eines Vektorfeldes entlang von Kurven . . . . .	57
6.3	Potentialfelder . . . . .	59
6.4	Praktische Berechnung von Stammfunktionen . . . . .	63
6.4.1	Der Fall $n = 2$ . . . . .	63
6.4.2	Der Fall $n = 3$ . . . . .	64
6.4.3	Integration entlang geeigneter Wege . . . . .	65
<b>7</b>	<b>Integration in <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>67</b>
7.1	Das Riemann-Integral in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	67
7.2	Praktische Berechnung — iterierte Integrale . . . . .	70

7.3	Das Riemann-Integral über kompakte Mengen . . . . .	72
7.4	Praktische Berechnung über Normalbereiche . . . . .	73
7.4.1	Normalbereiche in $\mathbb{R}^2$ . . . . .	73
7.4.2	Normalbereiche in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	75
7.5	Der Greensche Satz . . . . .	77
7.6	Die Substitutionsregel . . . . .	80
7.6.1	Spezialfall: Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ . . . . .	81
7.6.2	Spezialfall: Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	81
7.6.3	Spezialfall: Zylinderkoordinaten in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	83
7.6.4	Weitere Beispiele . . . . .	83
<b>8</b>	<b>Vektoranalysis</b>	<b>87</b>
8.1	Divergenz und Rotation . . . . .	87
8.2	Integration über Flächen . . . . .	89
8.3	Integralsätze . . . . .	91
8.3.1	Gaußscher Divergenzsatz für $\mathbb{R}^3$ . . . . .	91
8.3.2	Stokesscher Integralsatz . . . . .	94

## Notation für Mengen von Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{N}\right\}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R} =$ Menge aller Dezimalbrüche	reelle Zahlen
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes Intervall
$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	offenes Intervall
$[a, b[ = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	halboffenes Intervall
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	halboffenes Intervall
$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$	Menge der komplexen Zahlen

# Kapitel 1

## Folgen und Reihen von Funktionen

### 1.1 Allgemeines

Wir wollen im folgenden einige allgemeine Eigenschaften von Funktionenreihen zusammenfassen. Als Beispiele dienen uns dabei die in Mathematik I eingeführten Potenzreihen und Taylorreihen.

Im ganzen Abschnitt sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall.

Eine **Funktionenfolge (auf  $I$ )**  $(f_n)_{n \geq n_0}$  ist eine Abbildung  $n \mapsto f_n$ , die jeder ganzen Zahl  $n$  ( $n \geq n_0$ ) eine Funktion  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  zuordnet.

Ist  $(f_n)_{n \geq n_0}$  eine Funktionenfolge, so heißt die Folge  $(s_n)_{n \geq n_0}$  der Partialsummen

$$s_n(x) = \sum_{k=n_0}^n f_k(x), \quad x \in I$$

eine **Funktionenreihe (auf  $I$ )** und wir schreiben hierfür auch  $\sum_{k=n_0}^{\infty} f_k$ .

### Punktweise Konvergenz

Für alle  $x \in I$  erhält man aus einer Funktionenfolge  $(f_n)_{n \geq n_0}$  eine Folge reeller Zahlen  $(f_n(x))_{n \geq n_0}$ . Die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \geq n_0}$  heißt **punktweise konvergent mit Grenzfunktion  $f$** , wenn für alle  $x \in I$  die Folge der Funktionswerte  $(f_n(x))_{n \geq n_0}$  gegen  $f(x)$  konvergiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

Analog für Funktionenreihen: Die Funktionenreihe  $\sum_{k=n_0}^{\infty} f_k$  heißt **punktweise konvergent mit Summenfunktion  $s$** , falls die Funktionenfolge der Partialsummen punktweise gegen  $s$  konvergiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n_0}^n f_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x) \quad \forall x \in I$$

### Beispiele

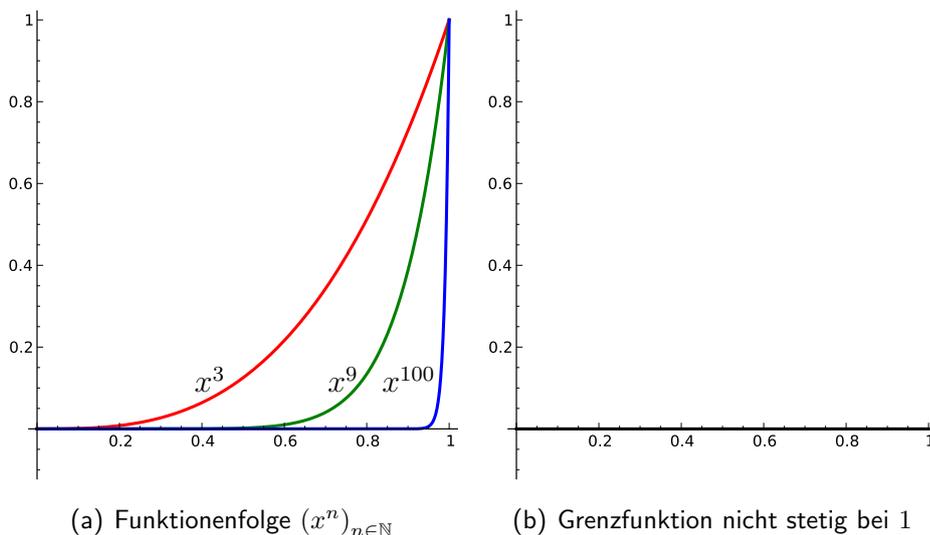
- (i).  $f_n = x^n$  auf  $I = [0, 1]$  ist konvergent gegen  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1[ \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$

(ii).  $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$  auf  $I = [0, 1]$  ist konvergent gegen  $f(x) = 0$ , denn für  $x \neq 0$  gilt

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \underbrace{(nx^2)e^{-nx^2}}_{\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty}.$$

(iii).  $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(\pi nx)$  auf  $I = [0, 1]$  konvergiert gegen  $f(x) = 0$ .

Beispiel (i) zeigt: Grenzfunktionen stetiger Funktionen müssen nicht wieder stetig sein



Beispiel (ii) zeigt: Integration darf im allgemeinen mit dem Funktionsgrenzwert nicht vertauscht werden

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 nxe^{-nx^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-nx^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

aber  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ .

Beispiel (iii) zeigt: Differentiation darf im allgemeinen mit dem Funktionsgrenzwert nicht vertauscht werden

$$f'_n(x) = \pi\sqrt{n} \cos(\pi nx) \quad \text{also } f'_n(0) = \pi\sqrt{n} \quad \text{aber } f'(x) = 0.$$

Um Differentiation und Integration mit Funktionsgrenzwerten vertauschen zu können, benötigen wir den stärkeren Konvergenzbegriff der **gleichmäßigen Konvergenz**.

**Definition.** Eine Funktionenfolge  $(f_n)_{n \geq n_0}$  (auf  $I$ ) heißt **gleichmäßig konvergent** gegen die Grenzfunktion  $f$ , falls es eine Nullfolge  $(a_n)_{n \geq n_0}$  gibt mit

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n \quad \text{für alle } x \in I, n \geq n_0$$

Entsprechend heißt die Funktionenreihe  $\sum_{k=n_0}^{\infty} f_k$  gleichmäßig konvergent, falls die Funktionenfolge der Partialsummen gleichmäßig konvergiert.

Damit gilt nun

$$(f_n)_{n \geq n_0} \text{ gleichmäßig konvergent} \Rightarrow (f_n)_{n \geq n_0} \text{ punktweise konvergent}$$

Die Umkehrung gilt aber nicht, wie folgendes Beispiel zeigt

**Beispiel** (siehe Beispiel (i) oben)

$f_n(x) = x^n$  ist punktweise konvergent auf  $[0, 1]$  gegen die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1[ \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

aber nicht gleichmäßig, denn

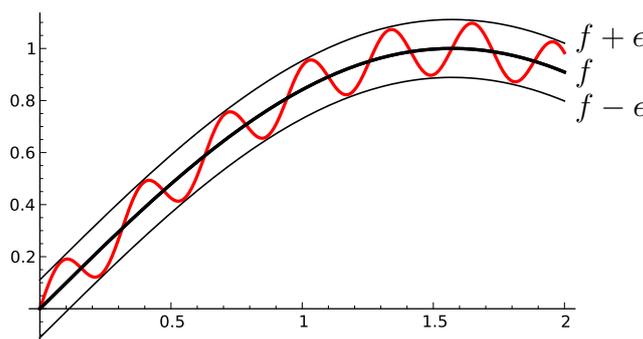
$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} x^n & \text{für } x \in [0, 1[ \\ 0 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

und speziell für  $x_n = 1 - \frac{1}{n}$  gilt

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1}$$

Daher kann es keine Nullfolge  $(a_n)$  mit  $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$  für alle  $x \in [0, 1]$ , wie in der Definition für gleichmäßige Konvergenz gefordert, geben.

## Graphische Veranschaulichung gleichmäßiger Konvergenz



$(f_n)_{n \geq n_0}$  ist genau dann gleichmäßig konvergent gegen  $f$ , wenn zu  $\epsilon > 0$  ein  $N_\epsilon$  existiert mit der Eigenschaft, dass alle Funktionen  $f_n$  für  $n \geq N_\epsilon$  ganz im  $\epsilon$ -Schlauch um  $f$  liegen.

## Eigenschaften gleichmäßig konvergenter Funktionenfolgen

Es sei  $(f_n)_{n \geq n_0}$  eine punktweise konvergente Funktionenfolge (auf  $I = [a, b]$ ) mit Grenzfunktion  $f$ . Dann gilt

(i).  $(f_n)$  gleichmäßig konvergent,  $f_n$  stetig für alle  $n \Rightarrow f$  stetig

(ii).  $(f_n)$  gleichmäßig konvergent,  $f_n$  integrierbar für alle  $n \Rightarrow f$  integrierbar

und 
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

(iii).  $(f_n)$  stetig differenzierbar,  $(f'_n)$  gleichmäßig konvergent  $\Rightarrow f$  stetig differenzierbar,  $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$  und  $(f_n)$  gleichmäßig konvergent.

Entsprechende Aussagen gelten für Funktionenreihen, wenn man obige Aussagen auf die Funktionenfolgen der Partialsummen anwendet. Insbesondere gilt also für eine punktweise konvergente Funktionenreihe  $\sum_{k=n_0}^{\infty} f_k$

- ▷  $\sum_{k=n_0}^{\infty} f_k$  gleichmäßig konvergent,  $f_n$  integrierbar für alle  $n$ 

$$\Rightarrow \int_a^b \sum_{k=n_0}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=n_0}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx$$
- ▷  $(f_n)$  stetig differenzierbar,  $\sum_{k=n_0}^{\infty} f'_k$  gleichmäßig konvergent
 
$$\Rightarrow \left( \sum_{k=n_0}^{\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=n_0}^{\infty} f'_k(x)$$

### Beispiele

- (i).  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  ist gleichmäßig konvergent auf  $[0, b]$  für alle  $b < 1$  mit Grenzfunktion  $\frac{1}{1-x}$ , denn

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{also}$$

$$\left| s_n(x) - \frac{1}{1-x} \right| = \frac{x^{n+1}}{1-x} \leq \underbrace{\frac{b^{n+1}}{1-b}}_{=: a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Insbesondere folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^b x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} b^{k+1} = \int_0^b \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-b)$$

oder äquivalent

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(-b)^{k+1}}{k+1} = \ln(1-b) \quad \text{für } 0 < b < 1$$

Dies entspricht gerade der in Kapitel 10, Mathematik I, aufgeführten Potenzreihendarstellung von  $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}, \quad |x| < 1$$

Die Funktionenreihe der Ableitungen  $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$  ist ebenfalls gleichmäßig konvergent auf  $[0, b]$  für  $b < 1$  und damit folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{für alle } x \in [0, b].$$

Dabei ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$  auf  $[0, b]$ ,  $b < 1$ , aus den allgemeinen Sätzen zum Konvergenzbereich von Potenzreihen (siehe Kapitel 10, Mathematik I und Ergänzung hierzu am Ende dieses Abschnittes). In diesem Spezialfall kann man die gleichmäßige Konvergenz jedoch auch wie folgt direkt einsehen

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{d}{dx} \left( \sum_{k=0}^n x^k \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2} - \underbrace{(n+1) \frac{x^n}{1-x}}_{\rightarrow 0 \text{ glm. auf } [0,b]}$$

Für Funktionenreihen gilt folgendes **einfaches Kriterium für gleichmäßige Konvergenz**

Gibt es eine Folge  $(a_n)_{n \geq n_0}$  mit

$$|f_k(x)| \leq a_k \quad \text{für alle } x \in I, k \geq n_0$$

und ist die Reihe  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$  konvergent, so ist die Funktionenreihe  $\sum_{k=n_0}^{\infty} f_k$  gleichmäßig konvergent (auf  $I$ ).

**Beispiel.** Die Funktionenreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$  konvergiert gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$ , denn

$$\left| \frac{\cos(kx)}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$$

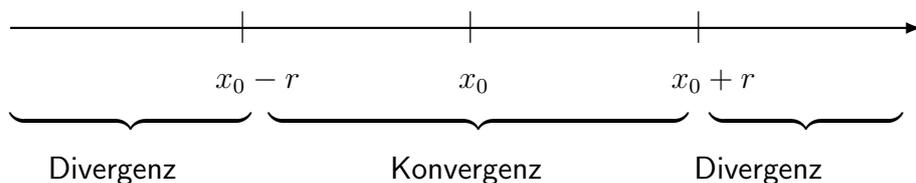
und die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  ist konvergent.

### Potenzreihen

Als Beispiele für Funktionenreihen hatten wir bereits in Kapitel 10, Mathematik I, Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \tag{1.1.1}$$

kennengelernt. Der Konvergenzbereich von (1.1.1) hat die Form



für ein  $r \geq 0$  (auch  $r = +\infty$ ). Für den Konvergenzradius  $r$  gilt dabei die Formel

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{1.1.2}$$

**Hinweis.** Ist  $\left( \sqrt[n]{|a_n|} \right)_n$  keine konvergente Folge, so muss man in der Formel (1.1.2) " $\lim_{n \rightarrow \infty}$ " durch " $\limsup_{n \rightarrow \infty}$ " ("limes superior" ersetzen).

## Einschub: limes superior/limes inferior

Es sei  $(b_n)_{n \geq n_0}$  eine Folge reeller Zahlen. Unter dem  $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$  der Folge  $(b_n)_{n \geq n_0}$  versteht man den **größten** Wert  $b$  (auch  $b = +\infty$ ) für den es eine **Teilfolge**

$$b_{n_1}, b_{n_2}, b_{n_3}, \dots \quad (n_0 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots)$$

der ursprünglichen Folge  $(b_n)_{n \geq n_0}$  gibt, die gegen  $b$  konvergiert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} = b.$$

Entsprechend definiert man  $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$  als den **kleinsten** Wert  $b$  (auch  $b = -\infty$ ) gegen den eine **Teilfolge**  $(b_{n_k})_{k \geq 1}$  der ursprünglichen Folge  $(b_n)_{n \geq n_0}$  konvergiert.

**Beispiel.** Für  $b_n = (-1)^n$ ,  $n \geq 0$ , gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = +1, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = -1.$$

Man bezeichnet  $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$  auch als **größten Häufungspunkt** der Folge  $(b_n)_{n \geq n_0}$ , denn in jeder  $\epsilon$ -Umgebung von  $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$  liegen unendlich viele Folgenglieder der Folge, aber oberhalb dieser Umgebung liegen jeweils nur endlich viele Folgenglieder. Der  $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$  ist also der größte Wert, um den sich die Folgenglieder der Folge  $(b_n)_{n \geq n_0}$  häufen. Entsprechend bezeichnet man  $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$  auch als **kleinsten Häufungspunkt** der Folge  $(b_n)_{n \geq n_0}$ .

Zurück zu Potenzreihen: Alternativ gilt für den Konvergenzradius die einfachere Formel

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

falls der Grenzwert existiert.

(i).  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$  hat Konvergenzradius  $r = \infty$ , denn

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \left| \frac{(k+1)!}{k!} \right| = k+1 \rightarrow \infty.$$

(ii).  $\sum_{k=0}^{\infty} k 2^k (x-2)^k$  hat Konvergenzradius  $r = \frac{1}{2}$ , denn

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \left| \frac{k 2^k}{(k+1) 2^{k+1}} \right| = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

(iii). Die Potenzreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$  mit

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k \text{ gerade} \\ \frac{1}{k} & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

hat Konvergenzradius 1, aber

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \text{ existiert nicht.}$$

Innerhalb ihres Konvergenzbereiches, genauer, auf allen abgeschlossenen Teilintervallen der Form  $[x_0 - r + \epsilon, x_0 + r - \epsilon] \subset ]x_0 - r, x_0 + r[$  für alle  $\epsilon > 0$ , ist die Potenzreihe (1.1.1) **gleichmäßig konvergent**. Die durch die Potenzreihe (1.1.1) dargestellte Funktion

$$f : ]x_0 - r, x_0 + r[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

ist also stetig differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$$

und integrierbar mit Stammfunktion

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}.$$

**Anwendungsbeispiel.** Die Funktion  $f(x) = e^{-x^2}$  ist in der Fehlerrechnung von großer Bedeutung, besitzt aber keine elementare Stammfunktion. Daher sind die Integrale

$$\Phi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

nicht elementar zu berechnen.  $f$  besitzt jedoch die Potenzreihendarstellung

$$e^{-x^2} \underbrace{=}_{y=-x^2} e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-x^2)^k}{k!}}_{=(-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}.$$

Für die Stammfunktion  $\Phi(x)$  ergibt sich die Reihendarstellung

$$\Phi(x) = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}.$$

Also

$$\Phi(x) \sim \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

und für den Fehler gilt die Abschätzung

$$\left| \Phi(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} e^{x^2}.$$

## 1.2 Fourierreihen

Eine besonders wichtige Klasse von Funktionenreihen bilden die Fourierreihen. Sie eignen sich insbesondere zur Behandlung periodischer Probleme.

## Periodische Funktionen

Es sei  $L > 0$ . Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **periodisch mit Periode  $L$** , falls

$$f(x + L) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

### Bemerkung

(i). Die trigonometrischen Funktionen sind periodisch:

- ▷  $\sin(x), \cos(x)$  haben Periode  $2\pi$
- ▷  $\sin(nx), \cos(nx)$  haben ebenfalls Periode  $2\pi$  für alle  $n \geq 1$

(ii). Ist  $f$  periodisch mit Periode  $L$ , so ist

$$\tilde{f}(x) = f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) \quad x \in \mathbb{R}$$

periodisch mit Periode  $2\pi$ , denn

$$\tilde{f}(x + 2\pi) = f\left(\frac{L}{2\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{L}{2\pi}x + L\right) = f\left(\frac{L}{2\pi}x\right) = \tilde{f}(x).$$

Bei der Diskussion periodischer Funktionen kann man sich also auf  $2\pi$ -periodische Funktionen beschränken. Zur Approximation  $2\pi$ -periodischer Funktionen betrachtet man statt Polynomen oder Potenzreihen geeigneterweise **trigonometrische Polynome bzw. Reihen**

$$t(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (1.2.1)$$

für Koeffizienten  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ .

## Eigenschaften

(i). Eine trigonometrische Reihe der Form (1.2.1) ist gleichmäßig konvergent auf  $\mathbb{R}$ , falls die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

konvergiert. Hinreichend für die Konvergenz dieser Reihe ist die Existenz von  $\alpha, \beta > 1$ , so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^\beta b_n = 0.$$

(ii). Eine trigonometrische Reihe der Form (1.2.1) ist  $k$ -mal stetig differenzierbar, falls die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (|a_n| + |b_n|)$$

konvergiert. Hinreichend für die Konvergenz dieser Reihe ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^\beta b_n = 0 \quad \text{für } \alpha, \beta > k + 1.$$

In diesem Falle lässt sich die Ableitung von  $t$  durch *gliedweise Differentiation* (d.h. unendliche Summe und Differentiation vertauschen) bestimmen:

$$t'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos(nx) - na_n \sin(nx))$$

und dies ist wieder eine trigonometrische Reihe.

Es sei  $f$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion. Gibt es dann eine trigonometrische Reihe

$$t(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

mit  $t(x) = f(x)$  für alle  $x$ , so heißt  $t$  **Fourierreihe zu  $f$**  und man sagt, dass  $f$  **in eine Fourierreihe entwickelbar** ist.

Welche Beziehung besteht zwischen  $f$  und den Koeffizienten  $a_n, b_n$ ? Dazu halten wir zunächst folgende wichtige Eigenschaft trigonometrischer Funktionen fest.

## Orthogonalitätsrelationen

Für ganze Zahlen  $n, m \geq 0$  gilt

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n \geq 1 \\ 2\pi & \text{für } m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n \geq 1 \\ 0 & \text{für } m = n = 0 \end{cases}$$

Insbesondere gilt also

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin(mx) dx = 0 \quad \text{für alle } m \geq 1.$$

Ist  $f$  in eine Fourier-Reihe entwickelbar, also

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

und ist die trigonometrische Reihe *gliedweise integrierbar* (d.h. unendliche Summe und Integral vertauschen; erfüllt z.B. falls gleichmäßig konvergent), so folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)) \right) \cos(nx) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx + b_m \int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx \\ &= a_n \pi. \end{aligned}$$

Analog zeigt man

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = b_n \pi \quad \text{also}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

Die Koeffizienten der Fourierreihe zu  $f$  sind also eindeutig bestimmt.

**Definition** Es sei  $f$  integrierbar auf  $[0, 2\pi]$ . Die Zahlen

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

heißen **Fourierkoeffizienten von  $f$** . Die mit den Fourierkoeffizienten gebildete Reihe

$$F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

heißt **Fourierreihe** von  $f$ .

### Bemerkungen

- ▷ Für den Koeffizienten  $a_0$  gilt speziell

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

Daher heißt  $\frac{a_0}{2}$  **Mittelwert der Funktion  $f$** .

Falls die Funktion  $f$  periodisch mit Periode  $2\pi$  ist, gilt zusätzlich:

- ▷ Zur Berechnung der Koeffizienten kann statt über  $[0, 2\pi]$  über ein beliebiges anderes Intervall der Länge  $2\pi$  integriert werden, z.B.  $[-\pi, \pi]$ .
- ▷ Ist  $f$  ( $2\pi$ -periodisch und) **gerade**, also  $f(-x) = f(x)$  für  $x \in \mathbb{R}$ , so folgt

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{für } n \geq 0$$

$$b_n = 0 \quad \text{für } n \geq 1$$

Denn es gilt

$$a_n \pi = \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 2 \underbrace{\int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx}_{f \text{ und } \cos(nx) \text{ gerade}}$$

$$\begin{aligned}
 b_n \pi &= \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\
 &= \underbrace{\int_{-\pi}^0 f(x) \sin(nx) dx}_{= - \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx} + \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0
 \end{aligned}$$

Analog gilt: Ist  $f$  ( $2\pi$ -periodisch und) **ungerade**, also  $f(-x) = -f(x)$  für  $x \in \mathbb{R}$ , so folgt

$$\begin{aligned}
 a_n &= 0 \quad \text{für } n \geq 0 \\
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad \text{für } n \geq 1
 \end{aligned}$$

## Beispiele und weitere Bemerkungen

(i).  $f$  sei  $2\pi$ -periodisch mit

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq \pi \\ 2\pi - x & \text{für } \pi < x \leq 2\pi \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Da  $f$  gerade, ist  $b_n = 0$  für alle  $n$  und

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \begin{cases} \pi & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Folglich ist

$$F_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos(x) + \frac{1}{3^2} \cos(3x) + \frac{1}{5^2} \cos(5x) + \dots \right)$$

(ii).  $f$  sei  $2\pi$ -periodisch mit

$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad f(x) = \pi - x \quad \text{für } 0 < x < 2\pi \quad (1.2.3)$$

Da  $f$  ungerade, ist  $a_n = 0$  für alle  $n$  und

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin(nx) dx = \frac{2}{n}$$

Folglich ist

$$F_f(x) = 2 \left( \sin(x) + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \dots \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

Wie bei Taylorreihen gilt auch bei Fourierreihen:

- ▷ Die Fourierreihe muss nicht konvergieren.
- ▷ Ist  $F_f$  konvergent in  $x$ , so muss der Wert der Reihe,  $F_f(x)$ , nicht mit  $f(x)$  übereinstimmen.

## Hinreichendes Kriterium für die Konvergenz der Fourierreihe $F_f$ gegen $f$

**Satz.** Ist  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig differenzierbar (d.h. es gibt eine Unterteilung  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 2\pi$  von  $[0, 2\pi]$ , so dass  $f'$  auf  $]x_{i-1}, x_i[$  existiert und stetig fortsetzbar auf  $[x_{i-1}, x_i]$  für alle  $i$ ), so konvergiert die Fourierreihe  $F_f$  für alle  $x$  und

$$F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$$

Hierbei ist

$$f(x_+) = \lim_{y \rightarrow x^+} f(y) \text{ der rechtsseitige Grenzwert, und}$$

$$f(x_-) = \lim_{y \rightarrow x^-} f(y) \text{ der linksseitige Grenzwert von } f \text{ in } x.$$

In allen Punkten  $x$  also, in denen  $f$  stetig ist, folgt unter den Annahmen des Satzes, dass

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Auf jedem abgeschlossenen Teilintervall, auf dem eine stückweise stetig differenzierbare Funktion  $f$  stetig ist, konvergiert die Fourierreihe  $F_f$  dann sogar gleichmäßig gegen  $f$ .

### Beispiele

- (i). Die in (1.2.2) definierte Funktion  $f$  ist stetig und stückweise stetig differenzierbar. Daher ist die zugehörige Fourierreihe

$$F_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos(x) + \frac{1}{3^2} \cos(3x) + \frac{1}{5^2} \cos(5x) + \dots \right)$$

gleichmäßig konvergent gegen  $f$ .

Insbesondere gilt zum Beispiel

$$0 = f(0) = F_f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right)$$

also

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

- (ii). Die in (1.2.3) definierte Funktion  $f$  ist stückweise stetig differenzierbar, aber nicht stetig in 0. Es ist also

$$F_f(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} \quad \text{für alle } x \neq 0.$$

## Gibbssches Phänomen

Ist  $f$  stückweise stetig differenzierbar, aber nicht stetig in  $x$ , so konvergiert  $F_f(x)$  gegen den Mittelwert  $\frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-))$ . Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig, vielmehr beobachtet man in  $x$  ein Überschwingen der Fourierpolynome mit asymptotisch etwa 9% der Sprunghöhe (genauer: 8,949%).

**Beispiel** (Sägezahnfunktion aus (1.2.3))

$$F_f(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$$

Für die Partialsummen

$$s_n(x) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} = 2 \left( \sin(x) + \frac{\sin(2x)}{2} + \dots + \frac{\sin(nx)}{n} \right)$$

gilt

$$s_n(x) = \int_0^x \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \underbrace{x}_{=f(x)-\pi}$$

Für die Ableitung des Fehlers  $r_n(x) = s_n(x) - f(x)$  folgt also

$$r'_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

mit kleinster positiver Nullstelle in  $x_n = \frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}$ . Hier besitzt der Fehler  $r_n$  in der Tat ein globales Maximum mit

$$\begin{aligned} r_n(x_n) &= \int_0^{x_n} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \pi = \int_0^{\pi} \frac{\sin(u) du}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{u}{2(n+\frac{1}{2})}\right)} - \pi \\ &> 2 \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{u} du}_{\sim 1.8519} - \pi \sim 0.1789 \cdot \pi \sim 0.09 \cdot \underbrace{2\pi}_{\text{Sprunghöhe}} \end{aligned}$$

Nebenrechnung zur Darstellung der Partialsumme:

$$\begin{aligned} s'_n(x) &= 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) = 2 \operatorname{Re} \left( \sum_{k=1}^n e^{ikx} \right) = 2 \operatorname{Re} \left( e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \right) \\ &= 2 \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} \right) = -\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \left( \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \right) \\ &= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 \end{aligned}$$

und damit folgt

$$s_n(x) = \int_0^x \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt - x$$

## Allgemeine Perioden

Ist  $f$  periodisch mit Periode  $L > 0$ , so ersetzt man  $\cos(nx)$ ,  $\sin(nx)$  durch  $\cos\left(\frac{2\pi}{L}nx\right)$ ,  $\sin\left(\frac{2\pi}{L}nx\right)$ . Die zugehörige Fourierreihe lautet also

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi}{L}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{L}nx\right) \right)$$

mit

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{L}nx\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{L}nx\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Alle Aussagen zum  $2\pi$ -periodischen Fall übertragen sich sinngemäß auf den Fall allgemeiner Periode.

## Komplexe Schreibweise

Nach der **Eulerschen Formel** gilt

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Daher können wir eine Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

auch in der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}$$

schreiben, mit den **komplexen Fourierkoeffizienten**

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \\ &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(-nx) dx + i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(-nx) dx \\ &= \begin{cases} \frac{a_0}{2} & \text{für } n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_n - i b_n) & \text{für } n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + i b_{-n}) & \text{für } n < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

# Kapitel 2

## Kurven in $\mathbb{R}^n$

Zur Erinnerung:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

ist der  $n$ -**dimensionale Punktraum** mit den bekannten Rechenoperationen Addition und Skalarmultiplikation. Für einen Punkt  $X = [x_1, \dots, x_n]^T$  definieren wir seine **Norm** durch

$$\|X\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

mit den bekannten Eigenschaften

- (i). **Positiv-Definitheit**  $\|X\| \geq 0$  und  $\|X\| = 0$  genau dann, wenn  $X = 0$ .
- (ii). **Homogenität**  $\|\alpha X\| = |\alpha| \|X\|$  für  $\alpha \in \mathbb{R}$
- (iii). **Dreiecksungleichung**  $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$

Für Punkte  $X = [x_1, \dots, x_n]^T, Y = [y_1, \dots, y_n]^T$  ist das Skalarprodukt definiert durch

$$\langle X, Y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Es gilt die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**

$$|\langle X, Y \rangle| \leq \|X\| \cdot \|Y\| \quad \text{für } X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

## 2.1 Abstände und Konvergenz von Folgen

Die Norm definiert einen Abstand zwischen Punkten  $X$  und  $Y$  in  $\mathbb{R}^n$ , indem wir als Abstand gerade  $\|X - Y\|$  nehmen.

Für  $\epsilon > 0$  und  $X \in \mathbb{R}^n$  heißt die Menge

$$U_\epsilon(X) := \{Y \in \mathbb{R}^n : \|X - Y\| < \epsilon\},$$

also die Menge aller Punkte  $Y \in \mathbb{R}^n$ , deren Abstand zu  $X$  kleiner als  $\epsilon$  ist, die  $\epsilon$ -**Umgebung von**  $X$ . Geometrisch beschreibt  $U_\epsilon(x)$  in

- ▷  $\mathbb{R}^1$  das offene Intervall  $]X - \epsilon, X + \epsilon[$
- ▷  $\mathbb{R}^2$  eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt  $X$  und Radius  $\epsilon$  (ohne Rand)
- ▷  $\mathbb{R}^3$  einen Ball mit Mittelpunkt  $X$  und Radius  $\epsilon$  (ohne die Balloberfläche).

Mithilfe des Abstandsbegriffes lässt sich nun auch Konvergenz von Punktfolgen in  $\mathbb{R}^n$  definieren:

**Definition.** Es sei  $(X_k)_{k \geq k_0}$  eine Folge von Punkten in  $\mathbb{R}^n$ . Die Folge heißt **konvergent** gegen  $X \in \mathbb{R}^n$ , falls gilt: Für alle  $\epsilon > 0$  existiert ein  $N_\epsilon \in \mathbb{N}$  mit

$$\|X_k - X\| < \epsilon \quad \text{für alle } k \geq N_\epsilon$$

$X$  heißt **Grenzwert** der Folge  $(X_k)_{k \geq k_0}$  und wir schreiben

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X.$$

### Bemerkung

- (i). Die Folge  $(X_k)$  konvergiert gegen  $X$  genau dann, wenn für alle  $\epsilon > 0$  nur endlich viele Folgenglieder außerhalb der  $\epsilon$ -Umgebung um  $X$  liegen, d.h. alle, bis auf endlich viele,  $X_k$  liegen in  $U_\epsilon(X)$ .
- (ii). Ist  $X_k = [x_{1,k}, \dots, x_{n,k}]^T$  und  $X = [x_1, \dots, x_n]^T$ , so gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X \quad \text{genau dann, wenn} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{i,k} = x_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n$$

D.h. die Punktfolge  $(X_k)_{k \geq k_0}$  konvergiert in  $\mathbb{R}^n$  gegen  $X$  genau dann, wenn jede Komponentenfolge  $(x_{i,k})_{k \geq k_0}$  gegen die Komponente  $x_i$  von  $x$  konvergieren.

**Definition.** Es sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine Abbildung  $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **Kurve** (bzw. **Weg**) in  $\mathbb{R}^n$ . Die Punktmenge

$$\{X(t) : t \in [a, b]\}$$

heißt **Bahn** (bzw. **Spur**) der Kurve  $X$ .

Eine Kurve  $X(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ ,  $t \in [a, b]$ , in  $\mathbb{R}^n$  setzt sich zusammen aus insgesamt  $n$  **Komponentenfunktionen**.

**Beispiele.** Kurven dienen der Parameterdarstellung von Punktfolgen in  $\mathbb{R}^n$ , etwa

- (i).  $n = 2$  **Kreislinie** Die Kurve

$$X(t) = [\cos(t), \sin(t)]^T, t \in [0, 2\pi]$$

durchläuft den Einheitskreis in  $\mathbb{R}^2$  einmal im entgegengesetzten Uhrzeigersinn. Entsprechend

$$X(t) = r[\cos(t), \sin(t)]^T, t \in [0, 2\pi], r > 0$$

für einen Kreis mit Radius  $r$ .

(ii).  $n = 3$  **Schraublinie**

$$X(t) = [r \cos(t), r \sin(t), ct]^T, t \in [0, 2\pi n], r > 0, c \neq 0$$

durchläuft eine Schraublinie in  $\mathbb{R}^3$ .

- ▷  $r$  heißt Radius,
- ▷  $n$  heißt Windungszahl,
- ▷  $2\pi|c|$  heißt Ganghöhe.

(iii). Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so beschreibt

$$X(t) = [t, f(t)], t \in [a, b]$$

den Funktionsgraph von  $f$  als Kurve in  $\mathbb{R}^2$ .

(iv). Sind  $P, R \in \mathbb{R}^n, R \neq 0$ , so beschreibt die Kurve

$$X(t) = P + t \cdot R, \quad t \in \mathbb{R}$$

die Gerade mit Aufpunkt  $P$  und Richtungsvektor  $R$ .

**Definition.** Eine Kurve  $X = [x_1, \dots, x_n]^T : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt

- (i). **stetig**, falls alle Komponentenfunktionen  $x_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind,
- (ii). **differenzierbar**, falls alle Komponentenfunktionen  $x_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar sind. In diesem Falle schreiben wir

$$\dot{X}(t) := \frac{d}{dt}X(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(X(t+h) - X(t)) = [\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)]^T$$

$\dot{X}(t)$  heißt **Tangentialvektor** der Kurve  $X$  zum Parameterwert  $t$ . Falls  $\dot{X}(t) \neq 0$ , so heißt  $T(t) = \dot{X}(t)/\|\dot{X}(t)\|$  **Tangenteneinheitsvektor**.

(iii). **regulär**, falls  $X$  stetig differenzierbar und  $\dot{X}(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$ .

### Interpretation

▷ **Geometrisch:**  $\dot{X}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{h}(X(t+h) - X(t))}_{\text{Sekante}}$

Geometrisch beschreibt  $\dot{X}(t)$  also die **Tangente** an die Bahn von  $X$  im Punkt  $X(t)$ .

- ▷ **Physikalisch:** Stellen wir uns  $X$  als Bahnkurve eines Massenpunktes vor, so beschreibt  $\dot{X}(t)$  die momentane Ortsveränderung, also den Geschwindigkeitsvektor des Massenpunktes im Zeitpunkt  $t$ .

## 2.2 Kurvenlänge

Es sei  $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve in  $\mathbb{R}^n$ . Zu gegebener Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  der Form

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

beschreibt

$$L(X, Z) = \sum_{i=1}^n \|X(t_i) - X(t_{i-1})\|$$

die Länge des Polygonzuges durch die Punkte

$$X(a) = X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n) = X(b)$$

Ist  $X$  stetig differenzierbar, so können wir die Länge des  $i$ -ten Teilstücks approximieren durch

$$\|X(t_i) - X(t_{i-1})\| \sim \|\dot{X}(t_{i-1})\|(t_i - t_{i-1})$$

und damit

$$L(X, Z) \sim \sum_{i=1}^n \|\dot{X}(t_{i-1})\|(t_i - t_{i-1}) \quad (2.2.1)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite (2.2.1) ist eine Riemann-Summe zur Funktion  $f(t) = \|\dot{X}(t)\|$  und Zerlegung  $Z$ . Konvergiert die Feinheit der Zerlegung  $Z$

$$\delta(Z) = \max\{t_i - t_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}$$

gegen 0, so passt sich der Polygonzug immer genauer dem exakten Verlauf der Kurve an und die zugehörigen Riemann-Summen konvergieren

$$L(X, Z) = \sum_{i=1}^n \|X(t_i) - X(t_{i-1})\| \sim \sum_{i=1}^n \|\dot{X}(t_{i-1})\|(t_i - t_{i-1}) \xrightarrow{\delta(Z) \rightarrow 0} \int_a^b \|\dot{X}(t)\| dt$$

Der Fehler, der bei der Approximation von  $L(X, Z)$  durch die Riemann-Summe in (2.2.1) gemacht wurde, geht dabei asymptotisch gegen 0, d.h. es gilt

$$\lim_{\delta(Z) \rightarrow 0} L(X, Z) = \int_a^b \|\dot{X}(t)\| dt.$$

**Definition.** Ist  $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbare Kurve in  $\mathbb{R}^n$ , so ist die Länge  $L(X)$  von  $X$  definiert als das Riemann-Integral

$$L(X) = \int_a^b \|\dot{X}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{X}_1^2(t) + \dots + \dot{X}_n^2(t)} dt$$

**Beispiele**

- (i).  $X(t) = r [\cos(t), \sin(t)]^T$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , ist stetig differenzierbar,  $\dot{X}(t) = r [-\sin(t), \cos(t)]^T$ , also gilt

$$\|\dot{X}(t)\| = \underbrace{\sqrt{(r(-\sin(t)))^2 + (r \cos(t))^2}}_{=r^2((\sin(t))^2 + (\cos(t))^2)=r^2} = r$$

und somit

$$L(X) = \int_0^{2\pi} \|\dot{X}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = r \cdot 2\pi = \text{Umfang des Kreises mit Radius } r$$

- (ii). Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar,  $X(t) = [t, f(t)]^T$  die Parametrisierung des Funktionsgraphen, so ist

$$L(X) = \int_a^b \|\dot{X}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

seine **Länge**.

Zum Beispiel ergibt sich für die Normalparabel  $f(t) = t^2$ ,  $t \in [-1, 1]$ , als Länge für den dazugehörigen Funktionsgraphen

$$L(X) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2} \right)$$

Haben dabei verwandt, dass  $\frac{1}{4} (2t\sqrt{1 + 4t^2} + \ln(2t + \sqrt{1 + 4t^2}))$  Stammfunktion zu  $\sqrt{1 + 4t^2}$  ist.

**Bemerkung.** Die Länge einer Kurve kann auch für stetige, stückweise stetig differenzierbare Kurven  $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert werden. ( $X$  heißt stückweise stetig differenzierbar, falls eine Unterteilung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  existiert, so dass  $X$  auf  $[t_{i-1}, t_i]$  zu einer stetig differenzierbaren Kurve auf  $[t_{i-1}, t_i]$  fortsetzbar ist.)

**Beispiel**

$$X(t) = \begin{cases} [0, t]^T & \text{für } t \in [0, 1] \\ [t - 1, 2 - t]^T & \text{für } t \in ]1, 2] \end{cases}, \quad \text{also} \quad \|\dot{X}(t)\| = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, 1] \\ \sqrt{2} & \text{für } t \in ]1, 2] \end{cases}$$

und somit  $L(X) = \int_0^1 1 dt + \int_1^2 \sqrt{2} dt = 1 + \sqrt{2}$ .

**2.3 Krümmung von Kurven**

Es sei  $X$  zweimal stetig differenzierbare reguläre Kurve mit Tangenteneinheitsvektor  $T(t) = \dot{X}(t)/\|\dot{X}(t)\|$ . Die Änderung der Geschwindigkeitsrichtung einer Kurve, bezogen auf die Kurvenlänge

$$\frac{\dot{T}(t)}{\|\dot{X}(t)\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(t+h) - T(t)}{\|X(t+h) - X(t)\|}$$

beschreibt die **Krümmungsrichtung** von  $X$  in  $X(t)$ . Seine Länge  $\kappa(t) = \|\dot{T}(t)\|/\|\dot{X}(t)\|$  heißt **Krümmung** von  $X$  im Punkt  $X(t)$ .

**Beispiel.** Kreislinie mit Radius  $r$

$$X(t) = r [\cos(t), \sin(t)]^T, t \in [0, 2\pi]$$

Für den Tangenteneinheitsvektor gilt

$$T(t) = \frac{\dot{X}(t)}{\|\dot{X}(t)\|} = [-\sin(t), \cos(t)]^T \quad \text{unabhängig vom Radius } r!$$

Der Krümmungsvektor, also die Änderung der Tangentialrichtung,

$$\dot{T}(t) = -[\cos(t), \sin(t)]^T = -\frac{1}{r}X(t)$$

zeigt zum Kreismittelpunkt. Für die Krümmung errechnet man  $\kappa(t) = 1/r$ . Sie ist also umgekehrt proportional zum Radius des Kreises.

## 2.4 Kurven in $\mathbb{R}^3$

Es sei  $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine zweimal stetig differenzierbare reguläre Kurve in  $\mathbb{R}^3$  mit  $\dot{T}(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$ . Dann stehen die drei Einheitsvektoren

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{\dot{X}(t)}{\|\dot{X}(t)\|} && \text{(Tangenteneinheitsvektor)} \\ N(t) &= \frac{\dot{T}(t)}{\|\dot{T}(t)\|} && \text{(Hauptnormaleneinheitsvektor)} \\ B(t) &= T(t) \times N(t) && \text{(Binormaleneinheitsvektor)} \end{aligned}$$

orthogonal aufeinander und bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (das sogenannte **begleitende Dreibein**). Die von  $T(t)$  und  $N(t)$  aufgespannte Ebene

$$E(t) : X(t) + \lambda T(t) + \mu N(t) \quad \text{für } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

heißt **Schmiegeebene** von  $X$  an der Stelle  $X(t)$ .

Es sei  $X$  dreimal differenzierbare reguläre Kurve mit  $\dot{T}(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$ . Die Änderung der Binormalenrichtung bezogen auf die Kurvenlänge

$$\frac{\dot{B}(t)}{\|\dot{X}(t)\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{B(t+h) - B(t)}{\|X(t+h) - X(t)\|}$$

beschreibt das Herauswinden der Kurve aus der Schmiegeebene und wird als **Torsionsvektor** bezeichnet. Der Vektor  $\dot{B}(t)$  ist orthogonal sowohl zu  $B(t)$  als auch zu  $T(t)$ , denn

$$\dot{B}(t) = \frac{d}{dt}(T(t) \times N(t)) = \dot{T}(t) \times N(t) + T(t) \times \dot{N}(t) = T(t) \times \dot{N}(t).$$

Damit gibt es  $\tau(t) \in \mathbb{R}$  mit

$$\frac{\dot{B}(t)}{\|\dot{X}(t)\|} = -\tau(t)N(t).$$

Die Zahl  $\tau(t)$  heißt **Torsion** von  $X$  im Punkt  $X(t)$ . Für den Absolutbetrag gilt  $|\tau(t)| = \|\dot{B}(t)\|/\|\dot{X}(t)\|$ .

**Beispiel** (Schraublinie)

$$X(t) = [r \cos(t), r \sin(t), ct]^T, t \in [0, 2\pi n], r > 0, c > 0$$

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -r \sin(t) \\ r \cos(t) \\ c \end{bmatrix}, \ddot{X}(t) = \begin{bmatrix} -r \cos(t) \\ -r \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \dddot{X}(t) = \begin{bmatrix} r \sin(t) \\ -r \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Also gilt

$$T(t) = \frac{1}{R}[-r \sin(t), r \cos(t), c]^T, R = \sqrt{r^2 + c^2}$$

$$N(t) = [-\cos(t), -\sin(t), 0]^T, B(t) = T(t) \times N(t) = \frac{1}{R}[c \sin(t), -c \cos(t), r]^T$$

Hieraus erhält man schließlich Krümmung  $\kappa(t) \equiv \frac{r}{r^2+c^2}$  und Torsion  $\tau(t) \equiv \frac{c}{r^2+c^2}$ .



# Kapitel 3

## Funktionen in mehreren Variablen

### 3.1 Definition und erste Beispiele

Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Eine Funktion

$$\begin{aligned} f &: D \rightarrow \mathbb{R}, \\ X = [x_1, x_2, \dots, x_n] &\mapsto f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

heißt **Funktion in  $n$  Variablen**.

#### Beispiele

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 3xy + 2x \quad \text{auf } \mathbb{R}^2 \\ f(x, y, z) &= e^z + \sin(x + y) \quad \text{auf } \mathbb{R}^3 \\ f(X) &= \|X\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

### 3.2 Darstellungsweisen

Wie im Falle  $n = 1$  definieren wir den **Funktionsgraphen von  $f$**  als die Menge

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subset D \times \mathbb{R} \quad (\subset \mathbb{R}^{n+1})$$

**Beispiel.** Für  $n = 2$  beschreibt der Funktionsgraph von  $f$  eine Fläche in  $\mathbb{R}^3$ , etwa ein Paraboloid im Falle von  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

Für  $n \geq 3$  gibt es keine offensichtliche Darstellungsweise des gesamten Funktionsgraphen (in  $\mathbb{R}^3$ ). Im Folgenden diskutieren wir Alternativen.

#### Schnittkurvendiagramme

Hält man jeweils  $n - 1$  Variablen fest, etwa  $x_1, \dots, x_{n-1}$ , so erhält man aus  $f$  eine Funktion in einer Variablen:

$$t \mapsto f(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$$

Der zugehörige Funktionsgraph ist die Menge

$$\{(t, f(x_1, \dots, x_{n-1}, t)) : (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in D\} \subset \mathbb{R}^2$$

und er wird als Schnittkurve (von  $\Gamma_f$  mit der  $(x_1, \dots, x_{n-1})$ -Hyperebene) bezeichnet.

**Beispiel für  $n = 2$ .** Es sei  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Hält man  $x$  (bzw.  $y$ ) fest, so erhält man in der jeweils anderen Variablen eine Parabel.

## Höhenliniendiagramme

Als weitere Alternative zur Darstellung einer Funktion in mehreren Variablen betrachtet man Höhenliniendiagramme.

**Definition.** Zu gegebenem  $c \in \mathbb{R}$  heißt die Punktmenge

$$N_c = \{X \in D : f(X) = c\}$$

die **Niveaumenge zum Niveau  $c$**  (und für  $n = 2$  speziell Höhenlinie zur Höhe  $c$ ).

Man bestimmt die Menge  $N_c$  durch **Auflösen der Gleichung**

$$f(X) = c \quad \text{nach } X.$$

**Beispiel für  $n = 2$ .** Es sei wieder  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Die Gleichung  $x^2 + y^2 = c$  hat für

- ▷  $c < 0$  keine Lösung
- ▷  $c = 0$  die Lösung  $x = y = 0$
- ▷  $c > 0$  einen Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius  $\sqrt{c}$  als Lösung.

## 3.3 Stetigkeit von Funktionen in mehreren Variablen

Aufbauend auf dem Konvergenzbegriff von Folgen in  $\mathbb{R}^n$  können wir nun auch den Stetigkeitsbegriff auf Funktionen mehrerer Veränderlicher übertragen.

**Definition** Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  und  $X \in \mathbb{R}^n$  so dass  $X$  Häufungspunkt von  $D$  (d.h. in jeder  $\epsilon$ -Umgebung  $U_\epsilon(X)$  gibt es Punkte aus  $D$ ):

- (i). (Grenzwerte von Funktionen)  $f$  besitzt in  $X$  den Grenzwert  $c$ , falls

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(X_k) = c$$

für **jede Folge**  $(X_k) \subset D$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X$ . Wir schreiben in diesem Falle  $\lim_{Y \rightarrow X} f(Y) = c$ .

- (ii). (Stetigkeit) Ist  $X \in D$ , so heißt  $f$  **stetig in  $X$** , falls

$$\lim_{Y \rightarrow X} f(Y) = f(X)$$

- (iii).  $f$  heißt **stetig auf  $D$** , falls  $f$  in allen Punkten  $X \in D$  stetig ist.

**Bemerkungen**

- (i). Die **Rechenregeln für Grenzwerte** für Funktionen einer Veränderlichen übertragen sich auf Funktionen mehrerer Veränderlicher, also

$$\begin{aligned}\lim_{Y \rightarrow X} f(Y) + g(Y) &= \lim_{Y \rightarrow X} f(Y) + \lim_{Y \rightarrow X} g(Y) \\ \lim_{Y \rightarrow X} f(Y) \cdot g(Y) &= \lim_{Y \rightarrow X} f(Y) \cdot \lim_{Y \rightarrow X} g(Y) \\ \lim_{Y \rightarrow X} c f(Y) &= c \lim_{Y \rightarrow X} f(Y) \\ \lim_{Y \rightarrow X} \frac{f(Y)}{g(Y)} &= \frac{\lim_{Y \rightarrow X} f(Y)}{\lim_{Y \rightarrow X} g(Y)} \quad \text{falls } \lim_{Y \rightarrow X} g(Y) \neq 0\end{aligned}$$

- (ii). Aus den Rechenregeln für Grenzwerte folgt wie im Falle von Funktionen einer Veränderlicher: Sind  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so sind auch folgende Funktionen stetig:

$$f + g, f \cdot g, c \cdot f \quad \text{und} \quad \frac{f}{g} \quad \text{auf} \quad D_0 = \{ X \in D \mid g(X) \neq 0 \}$$

Ist  $h : E \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, wobei  $E \subset \mathbb{R}$  mit  $f(D) \subset E$ , so ist auch die Verkettung  $h \circ f$  stetig.

**Beispiele**

- (i). Die Projektionen  $p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x = [x_1, \dots, x_n] \mapsto x_i$  sind stetig. Damit sind dann auch die folgenden Funktionen stetig:

- ▷ lineare Funktionen  $f(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$
- ▷ Polynome in  $n$ -Variablen

$$p(x) = p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq k_i \leq m} a_{k_1 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}$$

- ▷ rationale Funktionen (also Quotienten von Polynomen)  $\frac{p(x)}{q(x)}$  auf dem Definitionsbereich  $D_0 = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \neq 0 \}$

- (ii). Die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } [x, y]^T \neq [0, 0]^T \\ 0 & \text{für } [x, y]^T = [0, 0]^T \end{cases}$$

ist stetig in 0, denn für **jede** Folge  $X_k = [x_k, y_k]^T$ , die gegen 0 konvergiert, gilt:

$$|f(x_k, y_k) - 0| = \frac{x_k^2 y_k^2}{x_k^2 + y_k^2} \leq \frac{(x_k^2 + y_k^2) y_k^2}{x_k^2 + y_k^2} = y_k^2 \rightarrow 0$$

daher ist  $\lim_{X \rightarrow 0} f(X) = 0 = f(0)$ .

- (iii). Die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{für } [x, y]^T \neq [0, 0]^T \\ 0 & \text{für } [x, y]^T = [0, 0]^T \end{cases} \quad (3.3.1)$$

ist **nicht stetig** in 0, denn für die Folge  $X_k = [\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]^T$  gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = 0$ , aber

$$f(X_k) = f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}}{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0).$$

## Eigenschaften stetiger Funktionen

Für stetige Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  einer reeller Veränderlicher hatten wir bereits gesehen:

- ▷  $f$  ist beschränkt
- ▷  $f$  besitzt Maximum und Minimum

Entsprechendes gilt für die Funktionen in mehreren Veränderlichen. Dazu muss jedoch zuerst eine Verallgemeinerung abgeschlossener Intervalle im  $\mathbb{R}^n$  gefunden werden.

**Definition.** Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge

- (i).  $X \in D$  heißt **innerer Punkt von  $D$** , wenn es eine  $\epsilon$ -Umgebung von  $X$  gibt, die ganz in  $D$  enthalten ist.
- (ii).  $D$  heißt **offen**, wenn jeder Punkt von  $D$  ein innerer Punkt ist.
- (iii).  $X \in \mathbb{R}^n$  heißt **Randpunkt von  $D$** , wenn jede  $\epsilon$ -Umgebung von  $X$  sowohl Punkte aus  $D$ , als auch Punkte aus dem Komplement  $\mathbb{R}^n \setminus D = \{Y \in \mathbb{R}^n : Y \notin D\}$  enthält.
- (iv). Die Menge aller Randpunkte von  $D$  heißt **Rand** und wird mit  $\partial D$  bezeichnet.
- (v).  $D$  heißt **abgeschlossen**, wenn  $D$  alle Randpunkte enthält.

### Beispiele

- (i). Die  $\epsilon$ -Umgebung eines Punktes  $X$

$$U_\epsilon(X) = \{Y \in \mathbb{R}^n : \|X - Y\| < \epsilon\}$$

ist selber eine offene Menge mit Rand

$$\partial U_\epsilon(X) = \{Y \in \mathbb{R}^n : \|X - Y\| = \epsilon\}$$

Folglich ist die Menge  $\{Y \in \mathbb{R}^n : \|X - Y\| \leq \epsilon\}$  abgeschlossen.

- (ii). Rechtecke  $Q \subset \mathbb{R}^2$  der Form

$$Q = \{[x, y]^T : 1 < x < 2, -2 < y < 5\}$$

sind offen, Rechtecke  $Q$  der Form

$$Q = \{[x, y]^T : 1 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 5\}$$

abgeschlossen, Rechtecke der Form

$$Q = \{[x, y]^T : 1 < x \leq 2, -2 \leq y < 5\}$$

sind weder offen noch abgeschlossen. Entsprechendes gilt für Quader  $Q \subset \mathbb{R}^3$ .

**Definition.** Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge

(i).  $D$  heißt **beschränkt**, falls eine Konstante  $M$  existiert mit

$$\|X\| \leq M \quad \text{für alle } X \in D$$

(ii).  $D$  heißt **kompakt**, falls  $D$  abgeschlossen und beschränkt ist.

Die kompakten Mengen verallgemeinern die abgeschlossenen, beschränkten Intervalle  $[a, b]$  in  $\mathbb{R}$ .

**Satz.** Für  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $D \subset \mathbb{R}^n$  kompakt gilt

(i).  $f$  ist beschränkt.

(ii). Es existieren  $X_{\max}, X_{\min} \in D$  mit

$$f(X_{\min}) \leq f(X) \leq f(X_{\max}) \quad \forall X \in D$$



# Kapitel 4

## Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlicher

### 4.1 Partielle Ableitungen

Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $X = [x_1, \dots, x_n]^T \in D$  ein innerer Punkt. Für kleine  $h$  ist

$$h \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

wohldefiniert als Funktion von  $h$ . Existiert dann der Grenzwert der Differenzenquotienten in der  $i$ -ten Koordinatenrichtung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(X)$$

so heißt  $f$  an der Stelle  $X$  **partiell differenzierbar nach**  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Der Grenzwert  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X)$  heißt **partielle Ableitung** von  $f$  nach  $x_i$  an der Stelle  $X$ .

Die Funktion  $f$  heißt an der Stelle  $X$  **partiell differenzierbar**, falls alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , existieren. Der Vektor

$$\text{grad } f(X) := \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) \right]^T$$

der partiellen Ableitungen von  $f$  in  $X$  heißt **Gradient von  $f$  in  $X$** . Statt  $\text{grad } f$  ist auch die Notation  $\nabla f$  üblich.

**Bemerkung.** Bezeichnen wir mit  $e_i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$  den  $i$ -ten Einheitsvektor im  $\mathbb{R}^n$ , so können wir schreiben

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(X + he_i) - f(X))$$

#### Beispiel

(i).  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$  auf  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x + h, y) - f(x, y)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (2(x + h)^2 + y^2 - (2x^2 + y^2)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (4xh + 2h^2) = 4x \end{aligned}$$

Entsprechend gilt  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$

(ii).  $f(x, y) = \sin(xy^2)$  auf  $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 \cos(xy^2) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2yx \cos(xy^2)$$

Bei partieller Ableitung nach  $x$  behandelt man also  $y$  wie eine Konstante, und bei partieller Ableitung nach  $y$  behandelt man  $x$  wie eine Konstante.

Alternative Bezeichnungen für partielle Ableitungen sind  $f_{x_i}, f_x, f_y, f_z, f_t, \dots$

## Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Ist  $f$  partiell differenzierbar nach  $x_i$ , so definiert

$$X \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(X)$$

wieder eine Funktion in  $n$  Veränderlichen, die man wieder gegebenenfalls nach  $x_j$  partiell differenzieren kann:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (X) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (X) \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n$$

Man erhält auf diese Weise die **partiellen Ableitungen zweiter Ordnung** von  $f$ . Die Matrix

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (X) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

der zweiten partiellen Ableitungen heißt **Hessematrix** von  $f$  im Punkt  $X$ .

### Beispiel

(i).  $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ , also

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

und damit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2$$

(ii).  $f(x, y) = \sin(xy^2)$ , also

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -y^4 \sin(xy^2)$$

Analog zu den partiellen Ableitungen zweiter Ordnung bildet man partielle Ableitungen höherer Ordnung:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x), \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j}(x), \dots$$

## Hinweise und Warnungen

Bei Funktionen  $f$  in einer reellen Veränderlichen folgt aus der Differenzierbarkeit von  $f$  die Stetigkeit von  $f$ . Das ist für Funktionen in mehr als einer Veränderlichen im allgemeinen nicht richtig.

**Beispiel.** Die in (3.3.1) untersuchte Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } [x, y]^T \neq [0, 0]^T \\ 0 & \text{für } [x, y]^T = [0, 0]^T \end{cases}$$

ist nicht stetig in 0. Jedoch gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Im allgemeinen ist die Reihenfolge der partiellen Ableitungen nicht vertauschbar, d.h. im allgemeinen ist z.B.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

**Beispiel**

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } [x, y]^T \neq [0, 0]^T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für  $[x, y]^T \neq 0$  gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \left( \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\ &= y \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right). \end{aligned}$$

Analog gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

und  $\partial f / \partial x(0, 0) = \partial f / \partial y(0, 0) = 0$ . Folglich

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(0, h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (h \cdot (-1)) = -1,$$

aber

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (h \cdot 1) = 1.$$

Es gilt jedoch allgemein der folgende Satz.

**Satz.** Sind die partiellen Ableitungen  $k$ -ter Ordnung **stetig**, so ist die Reihenfolge der partiellen Ableitungen bis zur  $k$ -ten Ordnung vertauschbar.

Für die partiellen Ableitungen von Summen und Produkten gelten dieselben **Rechenregeln** wie im Falle  $n = 1$ : Sind  $f, g : D \mapsto \mathbb{R}$  an der Stelle  $X_0$  partiell nach  $x_i$  differenzierbar, so sind auch die folgenden Funktionen an der Stelle  $X_0$  partiell differenzierbar nach  $x_i$ :

(i). **Linearität**  $\alpha f + \beta g$  für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mit

$$\frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial x_i}(X_0) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i}(X_0)$$

(ii). **Produktregel**  $f \cdot g$

$$\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) \cdot g(X_0) + f(X_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(X_0)$$

(iii). **Quotientenregel** Ist  $g(X) \neq 0$  für  $X \in D$ , so ist auch  $\frac{f}{g}$  an der Stelle  $X_0$  partiell differenzierbar nach  $x_i$  mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{f}{g} \right) (X_0) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) \cdot g(X_0) - f(X_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(X_0)}{g^2(X_0)}$$

Weiterhin gilt die **Kettenregel**:

**Satz.** Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, Y \mapsto f(Y) = f(y_1, \dots, y_n)$  stetig partiell differenzierbar. Weiterhin sei  $U \subset \mathbb{R}^m$  ( $m \geq 1$ ) offen,

$$g_i : U \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{stetig partiell differenzierbar für } 1 \leq i \leq n$$

und es gelte

$$[g_1(X), \dots, g_n(X)]^T \in D \quad \text{für alle } X \in U.$$

Dann ist die Verkettung

$$F : U \rightarrow \mathbb{R} \\ X \mapsto f(g_1(X), \dots, g_n(X))$$

stetig partiell differenzierbar und für die partiellen Ableitungen gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(X) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y_j}(g_1(X), \dots, g_n(X))}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(X)}_{\text{innere Abl.}}$$

## Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$

Für einen Punkt  $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  bezeichne

$$r(x, y) = \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{Länge des zugehörigen Ortsvektors})$$

$$\phi(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{Winkel des Ortsvektors zu } P \text{ mit der } x\text{-Achse})$$

die Polarkoordinaten von  $P$ .

Für einen Punkt  $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  mit Polarkoordinaten  $(r, \phi)$  gilt also

$$x = r \cdot \cos \phi = g_1(r, \phi)$$

$$y = r \cdot \sin \phi = g_2(r, \phi)$$

für  $(r, \phi) \in ]0, \infty[ \times [0, 2\pi[$ .

Ist eine Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben, so beschreibt die Vekettung

$$F(r, \phi) = f(r \cos \phi, r \sin \phi)$$

also dieselbe Funktion in Polarkoordinaten.

**Beispiel.** Für  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$  ergibt sich so

$$F(r, \phi) = e^{-((r \cos \phi)^2 + (r \sin \phi)^2)} = e^{-r^2} \quad (!)$$

Mit Hilfe der Kettenregel lassen sich die partiellen Ableitungen von  $F$  aus den partiellen Ableitungen von  $f$  berechnen. Aus  $F(r, \phi) = f(g_1(r, \phi), g_2(r, \phi))$  folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \phi) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \phi, r \sin \phi) \cos \phi + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \phi, r \sin \phi) \sin \phi \\ \frac{\partial F}{\partial \phi}(r, \phi) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \phi, r \sin \phi)(-r \sin \phi) + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \phi, r \sin \phi)(r \cos \phi) \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

In obigem Beispiel ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} &= -2r \cos \phi \cdot e^{-r^2} \cdot \cos \phi - 2r \sin \phi \cdot e^{-r^2} \cdot \sin \phi \\ &= -2re^{-r^2} \quad (\text{hätte man auch **direkt** sehen können!}) \end{aligned}$$

## Ableitung entlang von Kurven

Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  stetig differenzierbare Kurve und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig partiell differenzierbar, so ist die Funktion

$$f \circ \gamma : [a, b] \mapsto f(\gamma(t)) = f(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

stetig differenzierbar nach  $t$ , und es gilt

$$(f \circ \gamma)'(t) = \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y_i}(\gamma(t))}_{\text{äußere}} \cdot \underbrace{\gamma_i'(t)}_{\text{innere}} \quad \text{Ableitung}$$

**Beispiel.** Für  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$  und  $\gamma(t) = \begin{bmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{bmatrix}$  ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) &= -2\gamma_1(t)e^{-(\gamma_1(t)^2+\gamma_2(t)^2)} \cdot \gamma_1'(t) - 2\gamma_2(t)e^{-(\gamma_1(t)^2+\gamma_2(t)^2)} \cdot \gamma_2'(t) \\ &= (2r^2 \cos(t) \sin(t) - 2r^2 \sin(t) \cos(t)) e^{-r^2} = 0 \end{aligned}$$

Setzt man speziell für  $X_0 \in D$

$$\gamma(t) = X_0 + t \cdot \vec{v}$$

für einen Vektor  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , so ist  $\gamma(t) \in D$  für  $t$  in einer Umgebung der 0, also etwa für  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ . Für die Ableitung von  $f$  entlang  $\gamma$  erhalten wir in  $t = 0$  wegen  $\gamma'(t) = \vec{v}$

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(\gamma(h)) - f(\gamma(0))) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(X_0 + h\vec{v}) - f(X_0)) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) \cdot v_i = \langle \text{grad } f(X_0), \vec{v} \rangle \end{aligned}$$

**Definition.** Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  in einer Umgebung von  $X_0 \in D$  stetig partiell differenzierbar und  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  ein Richtungsvektor, so heißt

$$\partial_{\vec{v}} f(X_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(X_0 + h\vec{v}) - f(X_0)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) \cdot v_i = \langle \text{grad } f(X_0), \vec{v} \rangle$$

die **Ableitung von  $f$  längs  $\vec{v}$**  (im Punkt  $X_0$ ). Ist  $\|\vec{v}\| = 1$ , d.h. hat der Richtungsvektor  $\vec{v}$  Länge 1, so heißt  $\partial_{\vec{v}} f(X_0)$  die **Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $\vec{v}$**  (im Punkt  $X_0$ ). Speziell für  $\vec{v} = \vec{e}_i$  erhalten wir:

$$\partial_{\vec{v}} f(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$$

- ▷ Die Richtungsableitung in Richtung der  $i$ -ten Einheitsvektoren stimmt also mit der partiellen Ableitung nach  $x_i$  überein.
- ▷ **Geometrische Interpretation** des Gradienten: Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt für  $\|\vec{v}\| = 1$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(X_0 + h\vec{v}) - f(X_0)) = \partial_{\vec{v}} f(X_0) = \langle \text{grad } f(X_0), \vec{v} \rangle \leq \|\text{grad } f(X_0)\|$$

und falls  $\text{grad } f(X_0) \neq 0$ , so gilt die Gleichheit dann, wenn

$$\vec{v} = \frac{\text{grad } f(X_0)}{\|\text{grad } f(X_0)\|}$$

Der **Gradient von  $f$  in  $X_0$  zeigt** also stets **in die Richtung des steilsten Anstiegs** der Funktion.

**Beispiele**

(i).  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , also  $\text{grad } f(x, y) = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Für die Richtungsableitungen erhält man  $\partial_{\vec{v}} f(x, y) = 2(xv_1 + yv_2)$ .

Insbesondere wird  $\partial_{\vec{v}} f(x, y)$  maximal für  $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  und 0 für  $\vec{v} \perp \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(ii).  $f(x, y) = x^2 - y^2$ , also  $\text{grad } f(x, y) = 2 \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$

Für die Richtungsableitungen erhält man  $\partial_{\vec{v}} f(x, y) = 2(xv_1 - yv_2)$

Insbesondere ist  $\partial_{\vec{v}} f(x, y) = 0$  für  $\vec{v} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$

**4.2 Die totale Ableitung**

Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0 \in ]a, b[$ , so beschreibt die Tangentengleichung

$$g : x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

eine **lineare Näherung** von  $f$  in  $x_0$ .

Die Güte der Approximation kann man dabei wie folgt beschreiben:

$$f(x) - g(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = \underbrace{\left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right)}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0} (x - x_0) = o(|x - x_0|)$$

**Landau-Symbol**

Das folgende ist eine Vereinbarung zur Notation: Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  und  $X_0 \in D$ . Für zwei Funktionen  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  schreiben wir

$$f(X) = g(X) + o(\|X - X_0\|^k)$$

falls

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{f(X) - g(X)}{\|X - X_0\|^k} = 0.$$

Das Landausche Symbol  $o(\|X - X_0\|^k)$  besagt also, dass der bei der Approximation von  $f$  durch  $g$  in der Nähe um  $X_0$  gemachte Fehler von einer kleineren Ordnung als  $\|X - X_0\|^k$  ist.

Wir wollen den Gedanken der linearen Approximation von Funktionen einer reellen Veränderlichen auf Funktionen in mehreren Veränderlichen übertragen. Statt Näherungen von  $f$  durch eine Geradengleichung

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

betrachten wir die Näherung von  $f$  durch Abbildungen der Form  $f(X_0) + \vec{a}^T \cdot (X - X_0)$  für einen Vektor  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ .

**Definition.** Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $X_0 \in D$  innerer Punkt und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.  $f$  heißt in  $X_0$  **total differenzierbar** (oder **linear approximierbar**), falls ein Vektor  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  existiert, so dass

$$f(X) = f(X_0) + \vec{a}^T \cdot (X - X_0) + o(\|X - X_0\|)$$

für  $X$  in einer Umgebung von  $X_0$  gilt.

Ist  $f$  in  $X_0 \in D$  total differenzierbar, so gilt

▷  $f$  ist in  $X_0$  stetig

▷  $f$  ist in  $X_0$  partiell differenzierbar und es gilt

$$\vec{a} = \text{grad } f(X_0) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \right]^T$$

In den Komponenten des Vektors  $\vec{a}$  stehen also die partiellen Ableitungen von  $f$  in  $X_0$ . Insbesondere ist der Vektor  $\vec{a}$  eindeutig bestimmt.

Aus der partiellen Differenzierbarkeit folgt im allgemeinen nicht die totale Differenzierbarkeit. Jedoch gilt das Folgende:

**Satz.** Falls  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen ist und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig partiell differenzierbar auf  $D$ , so ist  $f$  auch total differenzierbar auf  $D$ .

**Beispiel.** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ , also  $\text{grad } f(x, y) = -2[x, y]^T$ . Da  $f$  stetig partiell differenzierbar, ist  $f$  insbesondere total differenzierbar und die lineare Näherung von  $f$  im Punkt  $[x_0, y_0]^T \in \mathbb{R}^2$  ist

$$f(x, y) = 2 - x_0^2 - y_0^2 - 2x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0) + o\left(\left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \right\|\right)$$

etwa in  $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$  gilt

$$f(x, y) = 0 - 2\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + o\left(\sqrt{(x - \sqrt{2})^2 + y^2}\right).$$

### 4.3 Die Taylorformel für Funktionen in $n$ Variablen

Die Taylorformel für die Approximation einer differenzierbaren Funktion

$$f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$$

durch Polynome der Form

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m$$

lässt sich auf differenzierbare Funktionen in mehreren Variablen verallgemeinern:

**Satz.** Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$   $(m+1)$ -mal stetig partiell differenzierbar,  $X_0 \in D, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , so dass die Verbindungsstrecke

$$\{X_0 + t\vec{v} : t \in [0, 1]\}$$

zwischen  $X_0$  und  $X_0 + \vec{v}$  ganz in  $D$  verläuft. Dann gilt die **Taylorformel**

$$f(X_0 + \vec{v}) = f(X_0) + \partial_{\vec{v}} f(X_0) + \frac{1}{2!} \partial_{\vec{v}}^2 f(X_0) + \dots + \frac{1}{m!} \partial_{\vec{v}}^m f(X_0) + R_{m+1}(X_0, \vec{v})$$

mit dem Restglied

$$R_{m+1}(X_0, \vec{v}) = \frac{1}{(m+1)!} \partial_{\vec{v}}^{m+1} f(X_0 + \xi \vec{v})$$

für ein  $\xi \in [0, 1]$ .

Mit der Substitution  $\vec{v} = X - X_0$  erhält man aus

$$f(X_0) + \partial_{\vec{v}} f(X_0) + \dots + \frac{1}{m!} \partial_{\vec{v}}^m f(X_0)$$

ein Polynom  $p(X)$  vom Grade  $m$  in den Variablen  $x_1, \dots, x_n$ . Wie im Falle  $n = 1$  heißt  $p$   **$m$ -tes Taylorpolynom von  $f$  im Entwicklungspunkt  $X_0$** . Mit diesem Polynom gilt dann

$$f(X) = p(X) + o(\|X - X_0\|^m)$$

## Die wichtigen Spezialfälle $m = 1, 2$

**$m = 1$ : Lineare Approximation.** Es sei  $f$  zweimal stetig partiell differenzierbar.

$$\begin{aligned} f(X_0 + \vec{v}) &= f(X_0) + \partial_{\vec{v}} f(X_0) + R_2(X_0, \vec{v}) \\ &= f(X_0) + \langle \text{grad } f(X_0), \vec{v} \rangle + R_2(X_0, \vec{v}) \end{aligned}$$

mit  $R_2(X_0, \vec{v}) = \frac{1}{2!} \partial_{\vec{v}}^2 f(X_0 + \xi \vec{v})$  für ein  $\xi \in [0, 1]$ .

Mit der Substitution  $\vec{v} = X - X_0$  erhält man hieraus

$$f(X) = \underbrace{f(X_0) + \langle \text{grad } f(X_0), X - X_0 \rangle}_{p(X)} + o(\|X - X_0\|)$$

**$m = 2$ : Quadratische Approximation.** Es sei  $f$  dreimal stetig partiell differenzierbar.

$$\begin{aligned} f(X_0 + \vec{v}) &= f(X_0) + \partial_{\vec{v}} f(X_0) + \frac{1}{2!} \partial_{\vec{v}}^2 f(X_0) + R_3(X_0, \vec{v}) \\ &= f(X_0) + \langle \text{grad } f(X_0), \vec{v} \rangle + \frac{1}{2} \vec{v}^T \cdot H_f(X_0) \vec{v} + R_3(X_0, \vec{v}) \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

mit  $R_3(X_0, \vec{v}) = \frac{1}{3!} \partial_{\vec{v}}^3 f(X_0 + \xi \vec{v})$  für ein  $\xi \in [0, 1]$ .

Hierbei ist

$$H_f(X_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(X_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(X_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(X_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(X_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(X_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(X_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(X_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(X_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(X_0) \end{bmatrix} = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0) \right]$$

die  $n \times n$ -Matrix der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von  $f$  in  $X_0$ . Die Matrix  $H_f(X_0)$  ist die Hessematrix von  $f$  in  $X_0$ . Da die partiellen Ableitungen vertauscht werden können, gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X_0) \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n.$$

Die Matrix  $H_f(X_0)$  ist also **symmetrisch**, d.h. es gilt  $H_f(X_0)^T = H_f(X_0)$ .

Mit der Substitution  $\vec{v} = X - X_0$  erhält man aus (4.3.1)

$$f(X) = \underbrace{f(X_0) + \langle \text{grad } f(X_0), X - X_0 \rangle + \frac{1}{2}(X - X_0)^T \cdot H_f(X_0)(X - X_0)}_{=p(X)} + o(\|X - X_0\|^2)$$

### Beispiele

(i).  $f(x, y) = e^{xy}$  ist 3-mal stetig partiell differenzierbar

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = e^{x_0 y_0} \begin{bmatrix} y_0 \\ x_0 \end{bmatrix}$$

$$H_f(x_0, y_0) = e^{x_0 y_0} \begin{bmatrix} y_0^2 & 1 + x_0 y_0 \\ 1 + x_0 y_0 & x_0^2 \end{bmatrix}$$

Also ist

$$\begin{aligned} & e^{x_0 y_0} + e^{x_0 y_0} \begin{bmatrix} y_0 \\ x_0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} e^{x_0 y_0} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_0^2 & 1 + x_0 y_0 \\ 1 + x_0 y_0 & x_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \\ &= e^{x_0 y_0} + e^{x_0 y_0} (y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0)) \\ &+ \frac{1}{2} e^{x_0 y_0} (y_0^2(x - x_0)^2 + 2(1 + x_0 y_0)(x - x_0)(y - y_0) + x_0^2(y - y_0)^2) \end{aligned}$$

die quadratische Näherung für  $f$  im Punkt  $\begin{bmatrix} y_0 \\ x_0 \end{bmatrix}$

(ii).  $f(x, y) = x^2 + 4xy + 8y^2 + 3x + 5y + 1$

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 2x_0 + 4y_0 + 3 \\ 4x_0 + 16y_0 + 5 \end{bmatrix}$$

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$$

also ist die quadratische Näherung in  $[x_0, y_0]^T$  gegeben durch

$$\begin{aligned} & (x_0^2 + 4x_0 y_0 + 8y_0^2 + 3x_0 + 5y_0 + 1) \\ &+ ((2x_0 + 4y_0 + 3)(x - x_0) + (4x_0 + 16y_0 + 5)(y - y_0)) \\ &+ \frac{1}{2} (2(x - x_0)^2 + 8(x - x_0)(y - y_0) + 16(y - y_0)^2) \\ &= \dots = 1 + 3x + 5y + x^2 + 4xy + 8y^2 = f(x, y) \quad (!) \end{aligned}$$

d.h., wie im Falle  $n = 1$  stimmt das Taylorpolynom zweiter Ordnung mit  $f$  überein, wenn  $f$  ein Polynom vom Grad  $\leq 2$  ist. Analoges gilt für Polynome höheren Grades.

## 4.4 Anwendung: Bestimmung von Extremalstellen

Wie im Falle einer Funktion einer reellen Variablen definieren wir:

Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  hat in  $x_0 \in D$  ein **lokales Maximum (Minimum)**, falls ein  $\varepsilon > 0$  existiert mit

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (\text{bzw.} \quad f(x_0) \leq f(x))$$

für alle  $x \in U_\varepsilon(x_0)$ .

Ist  $f(x_0) \geq f(x)$  (bzw.  $f(x_0) \leq f(x)$ ) für alle  $x \in D$ , so heißt  $x_0$  **absolutes Maximum (Minimum)**.

**Notwendiges Kriterium.** Wie im Falle einer Funktion einer reellen Variablen gilt: Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar und  $x_0$  lokales Extremum (also  $x_0$  eine lokales Maximum oder lokales Minimum), so ist  $\text{grad } f(x_0) = 0$ . Man nennt die Nullstellen des Gradienten von  $f$ , also die Stellen  $x_0$  mit  $\text{grad } f(x_0) = 0$  **kritische Stellen**.

Möchte man also (lokale) Maxima (bzw. (lokale) Minima) einer Funktion bestimmen, so sucht man zunächst die Menge der kritischen Stellen. Diese kritischen Stellen sind die Kandidaten für lokale Extrema. Man versucht dann mit den folgenden hinreichenden Kriterien für lokale Maxima und Minima zu entscheiden, ob es sich bei einer gegebenen kritischen Stelle um ein lokales Maximum oder um ein lokales Minimum handelt. Zur Bestimmung aller lokalen Extrema muss man schließlich gegebenenfalls auch noch das Verhalten der Funktion am Rand des Definitionsbereiches untersuchen.

Für hinreichende Kriterien benötigen wir wie im Falle von Funktionen einer reellen Veränderlichen die höheren Ableitungen von  $f$ . Bevor wir ein hinreichendes Kriterium formulieren können, benötigen wir noch Informationen über positiv definite Matrizen.

### Einschub: Positiv definite Matrizen

**Definition.** Es sei  $A = [a_{ij}]$  eine **symmetrische**  $n \times n$ -Matrix (also  $A^T = A$ , d.h.  $a_{ij} = a_{ji}$  für  $1 \leq i, j \leq n$ ).  $A$  heißt **positiv definit**, falls gilt

$$\vec{x}^T A \vec{x} > 0 \quad \text{für alle} \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq 0.$$

$A$  heißt **negativ definit**, falls  $-A$  positiv definit ist, und **indefinit**, falls  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  existieren mit

$$\vec{x}^T A \vec{x} > 0 \quad \text{und} \quad \vec{y}^T A \vec{y} < 0$$

Achtung: Es gibt symmetrische  $n \times n$ -Matrizen, die weder positiv definit, noch negativ definit, noch indefinit sind; beispielsweise die Nullmatrix.

### Beispiele

(i).  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ist positiv definit, denn

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + y^2 = \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\|^2 > 0 \quad \text{für} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq 0$$

(ii).  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ist indefinit, denn

$$\vec{e}_1^T \underbrace{A\vec{e}_1}_{=-\vec{e}_1} = -\|\vec{e}_1\|^2 = -1$$

und

$$\vec{e}_2^T \underbrace{A\vec{e}_2}_{=-\vec{e}_2} = -\|\vec{e}_2\|^2 = +1$$

### Bemerkungen

(i). Wir haben in “Mathematik I für MB” gesehen, dass für eine symmetrische  $n \times n$ -Matrix  $A$  alle Eigenwerte von  $A$  reell sind. Weiter gilt dann:

$A$ positiv definit	$\Leftrightarrow$	alle Eigenwerte von $A$ positiv
$A$ negativ definit	$\Leftrightarrow$	alle Eigenwerte von $A$ negativ
$A$ indefinit	$\Leftrightarrow$	$A$ besitzt mindestens einen positiven und mindestens einen negativen Eigenwert

(ii). Das folgende Kriterium charakterisiert positive Definitheit einer Matrix mit Hilfe von Determinanten. Es gilt:

$A$  ist genau dann positiv definit, wenn für  $k = 1, 2, \dots, n$  gilt

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} > 0$$

(iii). Für  $2 \times 2$ -Matrizen ist dieses Kriterium besonders einfach anzuwenden: die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \quad \text{ist}$$

ist

positiv definit	$\Leftrightarrow$	$a > 0$ und $\det A = ad - b^2 > 0$
negativ definit	$\Leftrightarrow$	$a < 0$ und $\det A = ad - b^2 > 0$
indefinit	$\Leftrightarrow$	$\det A = ad - b^2 < 0$

## Fortsetzung: Lokale Extrema

Kehren wir zurück zu hinreichenden Kriterien für lokale Extrema einer Funktion in mehreren reellen Veränderlichen. Mit Hilfe der Aussagen über positiv definite Matrizen erhält man nun:

**Satz.** Es sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig partiell differenzierbar und  $X_0 \in D$  mit  $\text{grad } f(X_0) = 0$ . Es sei  $H_f(X_0) = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0) \right]$  die Hesse-Matrix von  $f$  in  $X_0$ . Dann gilt:

- ▷ falls  $H_f(X_0)$  positiv definit, so ist  $X_0$  lokales Minimum
- ▷ falls  $H_f(X_0)$  negativ definit, so ist  $X_0$  lokales Maximum
- ▷ falls  $H_f(X_0)$  indefinit, so ist  $X_0$  kein lokales Extremum (sondern **Sattelpunkt**)

**Spezialfall  $n = 2$**  Im Spezialfall  $n = 2$  erhält man aufgrund von Bemerkung (iii) insbesondere für  $f(x, y)$ :

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

und ist

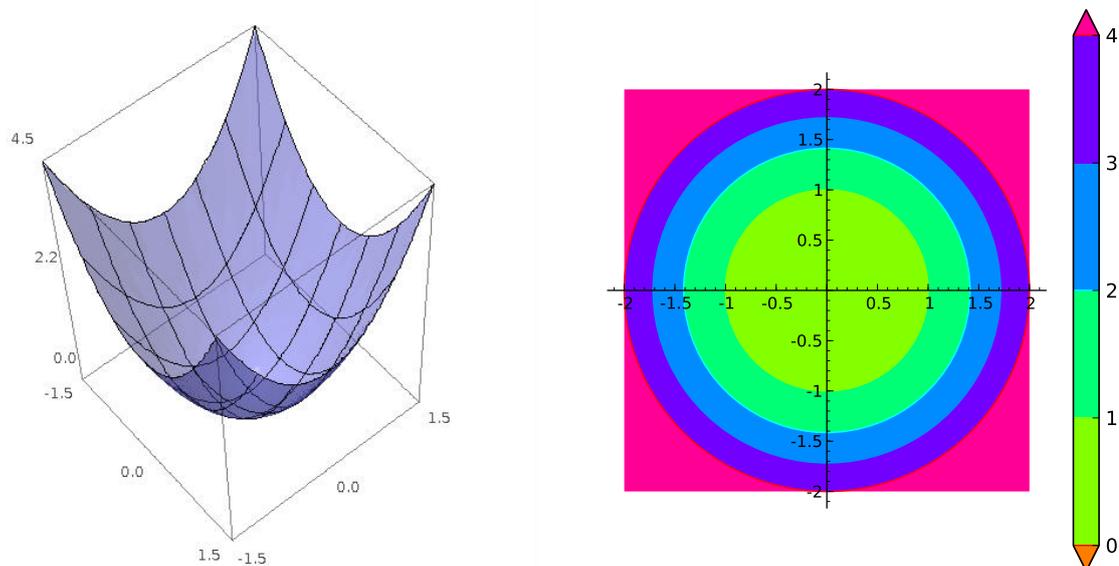
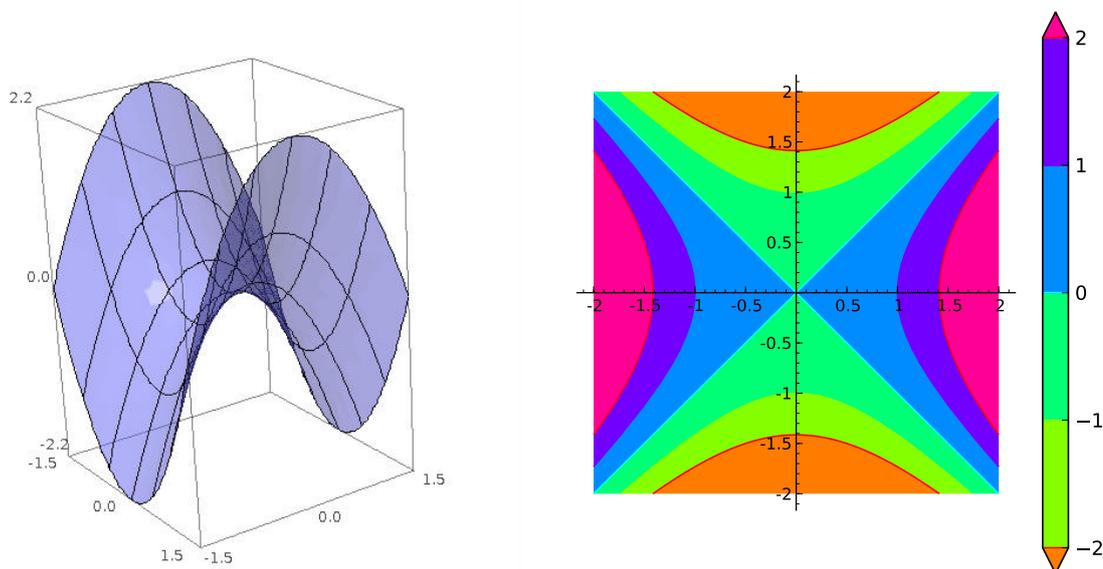
$$\Delta := \det H_f(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right)^2$$

so gilt:

- ▷ für  $\Delta > 0$  und  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$  ist  $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$  lokales Minimum
- ▷ für  $\Delta > 0$  und  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$  ist  $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$  lokales Maximum
- ▷ für  $\Delta < 0$  ist  $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$  kein lokales Extremum (sondern Sattelpunkt).

**Beispiel: Elliptisches Paraboloid.** Das elliptische Paraboloid  $f(x, y) = x^2 + y^2$  hat genau ein lokales Minimum im Punkt  $(0, 0)$ ; siehe Abbildung 4.1.

**Beispiel: Hyperbolisches Paraboloid.** Das hyperbolische Paraboloid  $f(x, y) = x^2 - y^2$  hat keine lokalen Extrema aber einen Sattelpunkt in  $(0, 0)$ ; siehe Abbildung 4.2.

Abbildung 4.1: Schnitt- und Niveaulinien der Funktion  $f(x, y) = x^2 + y^2$ Abbildung 4.2: Schnitt- und Niveaulinien der Funktion  $f(x, y) = x^2 - y^2$

**Ein etwas komplizierteres Beispiel.** Es sei  $f(x, y) = -x^4 - y^4 + 2x^2 + 2y^2$ . Dann gilt für den Gradienten:

$$\text{grad } f(x, y) = 4 \begin{bmatrix} -x^3 + x \\ -y^3 + y \end{bmatrix}.$$

Dieser besitzt die folgenden neun Nullstellen:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_7 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_8 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, A_9 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Für die Hesse-Matrix

$$H_f(x, y) = 4 \begin{bmatrix} -3x^2 + 1 & 0 \\ 0 & -3y^2 + 1 \end{bmatrix}$$

gilt in diesen kritischen Punkten:

▷  $H_f(A_1) = 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  positiv definit, also ist  $A_1$  lokales Minimum

▷  $H_f(A_2) = 4 \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  indefinit, also ist  $A_2$  Sattelpunkt (ebenso  $A_3, A_4, A_5$ )

▷  $H_f(A_6) = 4 \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$  negativ definit, also ist  $A_6$  lokales Maximum (ebenso  $A_7, A_8, A_9$ )

Die Funktion ist dargestellt in Abbildung 4.3.

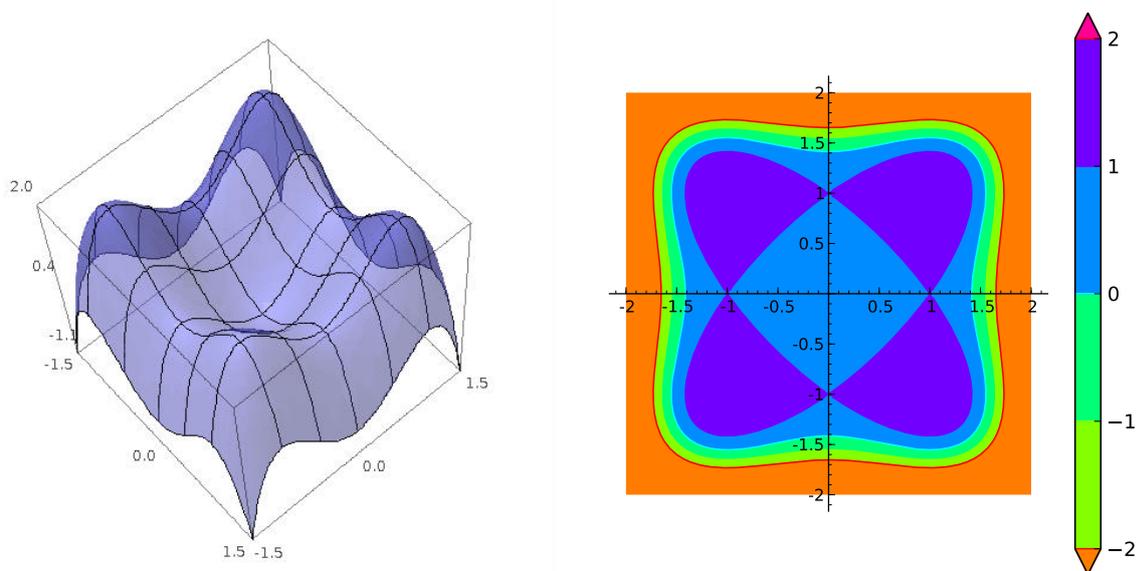


Abbildung 4.3: Schnitt- und Niveaulinien der Funktion  $f(x, y) = -x^4 - y^4 + 2x^2 + 2y^2$



# Kapitel 5

## Implizite Funktionen und Extrema mit Nebendingungen

### 5.1 Vektorfelder

Bisher haben wir nur reellwertige Abbildungen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  betrachtet. Nun wollen wir auch Abbildungen

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{für} \quad D \subset \mathbb{R}^n, n, m \geq 1$$

betrachten. Eine solche Abbildung nennen wir **Vektorfeld**.

Schreiben wir  $F = [F_1, \dots, F_m]^T$ , so erhalten wir zu  $F$  die **Komponentenfunktionen** des Vektorfeldes

$$F_i : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

- ▷ **n=1:** Ein Vektorfeld  $F : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist nichts weiteres als eine Kurve im  $\mathbb{R}^m$ .
- ▷ **m=1:** Ein Vektorfeld  $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist nichts weiteres als eine reellwertige Funktion in  $n$  Veränderlichen.

**Beispiel.** Ein besonders wichtiges Beispiel ist das **Gradientenvektorfeld** einer partiell differenzierbaren Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ; hier wird jedem Punkt  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  der Gradient  $\text{grad } f(X_0)$  im Punkt  $X_0$  zugeordnet.

Gradientenvektorfelder eignen sich beispielsweise auch zur Visualisierung von partiell differenzierbaren Funktionen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  in zwei Variablen: Hierzu wird an endlich vielen Punkten  $X_0$  im Definitionsbereich von  $f$  der Gradient  $\text{grad } f(X_0)$  an den Punkt  $X_0$  "angeheftet"; siehe Abbildung 5.1.

**Beispiel.** Strömung einer zähen Flüssigkeit durch ein Rohr mit Radius  $r$ . Es bezeichne  $D \subset \mathbb{R}^3$  ein Rohr mit Radius  $r$  dessen Mittelpunkt durch die  $x$ -Achse gegeben ist. Dann beschreibt das Vektorfeld

$$v : D \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ [x, y, z]^T \mapsto c[r^2 - y^2 - z^2, 0, 0]^T \quad y^2 + z^2 \leq r^2, c > 0.$$

das Geschwindigkeitsfeld einer zähen Flüssigkeit durch  $D$ .

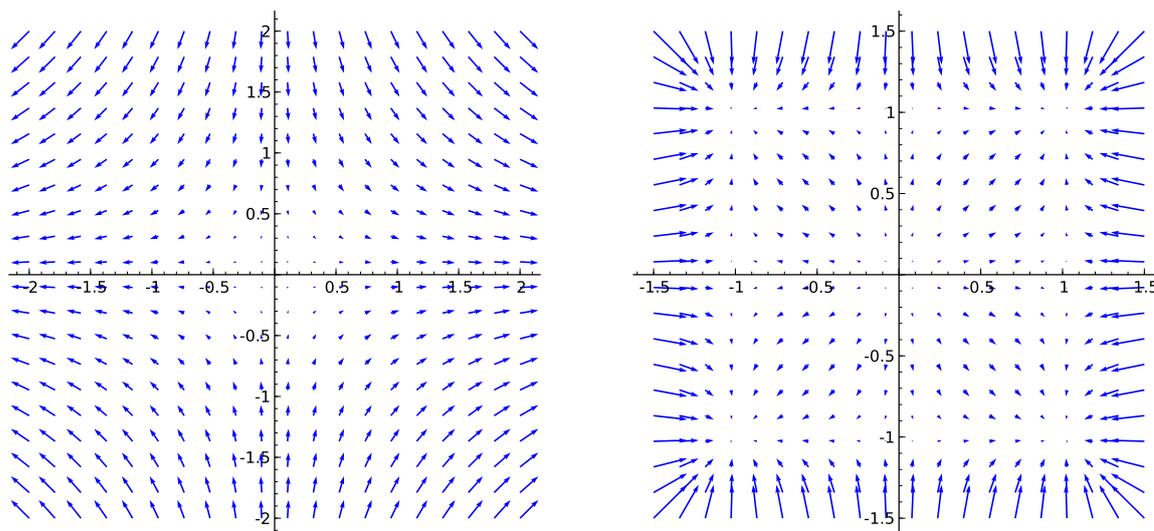


Abbildung 5.1: Gradientenvektorfelder des hyperbolischen Paraboloids aus Abbildung 4.2 (links) und der Funktion aus Abbildung 4.3 (rechts)

**Definition.** Ein Vektorfeld  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt

- ▷ **stetig (in  $X_0$ )**, falls alle Komponentenfunktionen  $F_i$  stetig (in  $X_0$ ) sind,
- ▷ **partiell differenzierbar (in  $X_0$ )**, falls alle Komponentenfunktionen  $F_i$  partiell differenzierbar (in  $X_0$ ) sind,
- ▷ **total differenzierbar in  $X_0$  oder linear approximierbar**, falls eine  $m \times n$ -Matrix  $A$  existiert, so dass

$$F(X) = F(X_0) + A(X - X_0) + o(\|X - X_0\|)$$

für  $X$  in einer Umgebung von  $X_0$ .

Ist  $F$  total differenzierbar in  $X_0$ , so ist  $F$  stetig in  $X_0$  und partiell differenzierbar in  $X_0$  und es gilt

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(X_0) \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(X_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(X_0) \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(X_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(X_0) \end{bmatrix} \quad (= J_F(X_0) \text{ siehe unten}).$$

Fassen wir alle partiellen Ableitungen eines Vektorfeldes  $F$  im Punkt  $X_0$  in einer Matrix zusammen, so erhält man die **Funktionalmatrix (Jacobimatrix) von  $F$  in  $X_0$** :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(X_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(X_0) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(X_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(X_0) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(X_0) \end{bmatrix}$$

$J_F(X_0)$  ist also eine  $m \times n$ -Matrix. In den Zeilen stehen die partiellen Ableitungen der Komponenten des Vektorfeldes. Ist  $m = n$ , so ist  $J_F(X_0)$  also eine quadratische Matrix. Ihre Determinante  $\det(J_F(X_0))$  heißt **Funktionaldeterminante von  $F$  in  $X_0$** .

**Beispiel.** Polarkoordinaten in  $\mathbb{R}^2$ .

$$G : ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ [r, \phi]^T \mapsto [r \cos \phi, r \sin \phi]^T$$

also  $G_1(r, \phi) = r \cos \phi$ ,  $G_2(r, \phi) = r \sin \phi$  und

$$J_G(r, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}$$

und  $\det(J_G(r, \phi)) = r((\cos \phi)^2 + (\sin \phi)^2) = r$ .

Mit Hilfe der Funktionalmatrix  $J_G$  lässt sich die Kettenregel (4.1.1) nun wie folgt umschreiben: Ist  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig partiell differenzierbar, so ist

$$F = f \circ G : ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig partiell differenzierbar und es gilt

$$J_F(r, \phi) = J_f(G(r, \phi)) \cdot J_G(r, \phi).$$

Das Symbol  $\cdot$  bezeichnet hier das Matrixprodukt der beiden Funktionalmatrizen. In dieser Form lässt sich die Kettenregel auf allgemeine Vektorfelder verallgemeinern.

**Kettenregel für Vektorfelder.** Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $U \subset \mathbb{R}^m$  offen,

$$G : D \rightarrow U \quad \text{und} \quad F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$$

stetig partiell differenzierbare Vektorfelder. Dann ist die Verkettung

$$H = F \circ G : D \rightarrow \mathbb{R}^k \\ X \mapsto F(G(X))$$

stetig (partiell) differenzierbar und es gilt für  $X_0 \in D$

$$J_H(X_0) = J_{F \circ G}(X_0) = \underbrace{J_F(G(X_0))}_{\text{äußere}} \cdot \underbrace{J_G(X_0)}_{\text{innere}} \\ \text{Ableitung}$$

Die Funktionalmatrix der Verkettung berechnet sich also als Matrixprodukt der beiden Funktionalmatrizen  $J_F(G(X_0))$  mit  $J_G(X_0)$ . Da  $J_F(G(X_0))$  eine  $k \times m$ -Matrix und  $J_G(X_0)$  eine  $m \times n$ -Matrix, ist das Matrixprodukt eine  $k \times n$ -Matrix, wie es  $J_H(X_0)$  auch sein muss.

## 5.2 Implizite Funktionen

Um eine Funktion  $g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Methoden der Differentialrechnung zu diskutieren, bedarf es eines expliziten Ausdrucks für die Funktion  $g(x) = y$ . Mitunter ist der Zusammenhang zwischen  $x$  und  $y$  nur durch eine Gleichung

$$f(x, y) = 0 \tag{5.2.1}$$

gegeben, und man hat zu gegebenem  $x$  nach  $y = g(x)$  aufzulösen. Gesucht ist also eine Funktion  $g$  mit

$$f(x, g(x)) = 0. \tag{5.2.2}$$

Man sagt dann, dass  $g$  durch die Gleichung (5.2.1) **implizit** definiert ist.

**Beispiele**

(i).  $f(x, y) = 3x + 2y - 4$

Die Gleichung  $f(x, y) = 0$  führt auf die Gleichung  $3x + 2y = 4$ , die wir nach  $y$  auflösen können:

$$y = -\frac{3}{2}x + 2, \quad \text{also } g(x) = -\frac{3}{2}x + 2.$$

(ii).  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

Die Gleichung  $f(x, y) = 0$  führt auf die Gleichung  $y^2 = 1 - x^2$  mit den Lösungen  $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ ,  $|x| \leq 1$ . Dies führt auf die beiden implizit definierten Funktionen

$$g_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad g_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$

Wenn wir nun einen Punkt  $[x_0, y_0]^T$  mit  $f(x_0, y_0) = 0$  festhalten, so können wir, falls  $y_0 \neq 0$ , die Gleichung  $f(x, y) = 0$  in einer Umgebung von  $[x_0, y_0]^T$  eindeutig auflösen, denn in einer Umgebung wird das Vorzeichen von  $y$  nicht wechseln.

**Satz.** Es sei  $f : D = ]a, b[ \times ]c, d[ \rightarrow \mathbb{R}$  stetig partiell differenzierbar,  $[x_0, y_0]^T \in D$  ein Punkt mit  $f(x_0, y_0) = 0$  und  $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ . Dann gibt es offene Intervalle  $I \subset ]a, b[$  mit  $x_0 \in I$  und  $J \subset ]c, d[$  mit  $y_0 \in J$ , so dass  $f_y(x, y) \neq 0$  für alle  $[x, y]^T \in I \times J$ , und es gibt eine stetig differenzierbare Funktion

$$g : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit } g(I) \subset ]c, d[, g(x_0) = y_0,$$

so dass  $f(x, g(x)) = 0$  für alle  $x \in I$ . Für die Ableitung von  $g$  gilt

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}, \quad x \in I. \quad (5.2.3)$$

**Beispiel.** Es sei  $f(x, y) = y^2 + \sin x - 4$ .

Dann ist  $[0, 2]^T$  Lösung von  $f(x, y) = 0$  und  $f_y(0, 2) = 4$ , also ist die Gleichung

$$y^2 + \sin x - 4 = 0$$

in 0 lokal eindeutig nach  $y$  auflösbar. Für die durch die eindeutig bestimmte Lösung implizit definierte Funktion  $g$  gilt:  $g(0) = 2$  und

$$g^2(x) + \sin x - 4 = 0$$

also  $g(x) = \sqrt{4 - \sin x}$ . Für die Ableitung gilt

$$g'(x) = -\frac{\cos x}{2g(x)} = -\frac{\cos x}{2\sqrt{4 - \sin x}}$$

was man durch direktes Ableiten von  $g$  bestätigen kann.

**Bemerkung.** Die Formel (5.2.3) für die Ableitung der implizit definierten Funktion  $g$  folgt aus der Kettenregel, denn aus

$$f(x, g(x)) = 0$$

folgt durch Ableiten nach  $x$ :

$$f_x(x, g(x)) + f_y(x, g(x)) g'(x) = 0$$

also

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}.$$

Der Satz über implizite Funktionen gilt auch allgemeiner:

**Hauptsatz über implizite Funktionen.** Es seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen und

$$F : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad [X, Y]^T \mapsto F(X, Y)$$

stetig differenzierbar. Weiterhin sei  $[X_0, Y_0]^T \in U \times V$  eine Lösung von  $F(X, Y) = 0$  und die  $m \times m$ -Matrix

$$\frac{\partial F}{\partial Y}(X_0, Y_0) := \left[ \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(X_0) \right]$$

sei invertierbar (also  $\det(\frac{\partial F}{\partial Y}(X_0, Y_0)) \neq 0$ ). Dann gibt es offene Mengen  $U_0 \subset U$  mit  $X_0 \in U_0$  und  $V_0 \subset V$  mit  $Y_0 \in V_0$ , so dass  $\frac{\partial F}{\partial Y}(X, Y)$  invertierbar für alle  $[X, Y]^T \in U_0 \times V_0$ , und es gibt ein stetig differenzierbares Vektorfeld

$$G : U_0 \rightarrow V_0 \quad \text{mit} \quad G(X_0) = Y_0$$

und

$$F(X, G(X)) = 0 \quad \text{für alle} \quad X \in U_0$$

sowie

$$J_G(X) = -\frac{\partial F}{\partial Y}(X, G(X))^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial X}(X, G(X)).$$

## 5.3 Extrema unter Nebenbedingungen

Gegeben sei eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Mitunter ist es notwendig, ein Extremum von  $f$  nicht auf ganz  $\mathbb{R}^n$  zu bestimmen, sondern nur auf einer Teilmenge, die mit Hilfe einer weiteren Funktion  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  durch eine Gleichung  $g(X) = 0$  implizit definiert ist.

**Definition.** Ein Punkt  $X_0$  mit  $g(X_0) = 0$  heißt **relatives Maximum** (bzw. **Minimum**) unter der **Nebenbedingung**  $g(X) = 0$ , falls

$$f(X_0) \geq f(X) \quad (\text{bzw. } f(X_0) \leq f(X))$$

für alle  $X \in U_\varepsilon(X_0) \cap \{X \in \mathbb{R}^n : g(X) = 0\}$ .

Der folgende Satz liefert eine notwendige Bedingung die zum Auffinden relativer Extrema unter Nebenbedingungen nützlich ist.

**Satz (Lagrange-Bedingung).** Sind  $f, g$  auf einer Umgebung  $U_\varepsilon(X_0)$  von  $X_0$  stetig differenzierbar, hat  $f$  in  $X_0$  ein relatives Extremum unter der Nebenbedingung  $g(X) = 0$  und ist  $\text{grad } g(X_0) \neq 0$ , so gibt es ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit

$$\text{grad } f(X_0) + \lambda \text{grad } g(X_0) = 0. \quad (5.3.1)$$

Die Bedingung (5.3.1) ist gleichwertig mit

$$f_{x_i}(X_0) + \lambda g_{x_i}(X_0) = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

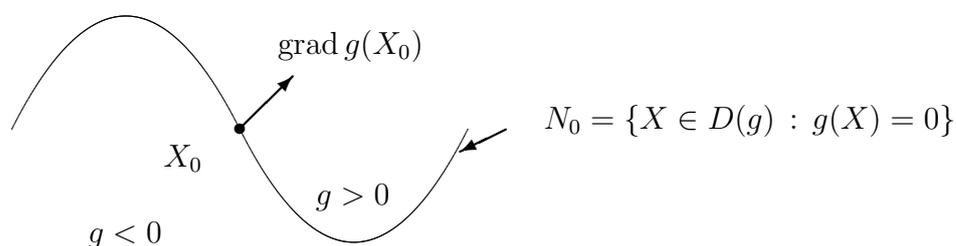


Abbildung 5.2: Skizze zu (5.3.1)

**Geometrische Interpretation von (5.3.1).** Der Gradient  $\text{grad } g(X_0)$  zeigt stets in eine Richtung, die aus  $N_0 := \{X \in D(g) : g(X) = 0\}$  **hinausführt**, und zwar genauer in die Menge  $g > 0$  **hinein**. Kurven, die ganz in  $N_0$  verlaufen, haben Tangentialvektoren, die senkrecht zu  $\text{grad } g(X_0)$  sind, denn: Ist

$$\gamma : ] - \varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow N_0$$

stetig differenzierbare Kurve mit  $\gamma(0) = X_0$ , so folgt aus  $g(\gamma(t)) = 0$  für alle  $t \in ] - \varepsilon, \varepsilon[$  mit Hilfe der Kettenregel

$$0 = \frac{d}{dt} g(\gamma(t)) = \text{grad } g(X_0)^T \cdot \gamma'(t)$$

und somit insbesondere für  $t = 0$

$$\text{grad } g(X_0)^T \cdot \gamma'(0) = 0.$$

**Beispiel.** Gegeben sei die Funktion

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1. \quad (5.3.2)$$

Dann ist  $N_0 = \{[x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  also die Oberfläche der Einheitskugel  $S^2$  in  $\mathbb{R}^3$ . Im folgenden bezeichne  $X_0$  den Nordpol, also  $X_0 = [0, 0, 1]^T$ . Dann steht  $\text{grad } g(X_0) = 2[0, 0, 1]^T$  senkrecht zur Tangentialebene

$$E : 0x + 0y + 1z = 1$$

an  $S^2$  im Punkt  $X_0$ . Für die Kurve

$$\gamma(t) = [\sin t, 0, \cos t]^T, \quad t \in ]-\pi, \pi[.$$

gilt dann  $\gamma(0) = X_0$  und  $\gamma'(0) = [\cos 0, 0, \sin 0]^T = [1, 0, 0]^T$ .

**Fortsetzung geometrische Interpretation von (5.3.1).** Es sei nun  $f$  eine Funktion, die auf einer Umgebung von  $X_0$  definiert ist. Der Gradient  $\text{grad } f(X_0)$  zeigt immer in die Richtung des steilsten Anstieges von  $f$ . Ist also  $X_0$  relatives Extremum, so wird der Gradient keinen Richtungsanteil haben, der tangential zu  $N_0$  verläuft. Damit aber muss  $\text{grad } f(X_0)$  in dieselbe Richtung wie  $\text{grad } g(X_0)$  oder  $-\text{grad } g(X_0)$  zeigen. Folglich müssen  $\text{grad } g(X_0)$  und  $\text{grad } f(X_0)$  **linear abhängig** sein, d.h. es gibt ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit

$$\text{grad } f(X_0) + \lambda \text{grad } g(X_0) = 0.$$

**Fortsetzung des Beispiels.** Zusätzlich zu der in (5.3.2) definierten Funktion  $g$  betrachten wir die Funktion

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{2}z^4.$$

Für  $z > 0$  ist  $f$  monoton wachsend in  $z$ . Daher steht zu vermuten, dass  $f$  in  $X_0$  sein Maximum unter der Nebenbedingung  $g(X) = 0$  annimmt. In der Tat gilt

$$\text{grad } f(x, y, z) = 2[x^3, y^3, z^3]^T,$$

also

$$\text{grad } f(X_0) = 2[0, 0, 1]^T = \text{grad } g(X_0).$$

Damit ist die **notwendige Bedingung** für das Vorliegen eines relativen Extremums in  $X_0$  erfüllt. Um zu prüfen, ob  $X_0$  ein Maximum ist, müssen nun alle relativen Extrema untersucht werden. In diesem Falle finden wir alle relativen Extrema unter den Lösungen  $x, y, z$  und  $\lambda$  des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\text{grad } f(x, y, z) + \lambda \text{grad } g(x, y, z) = 0 \text{ mit } g(x, y, z) = 0,$$

also

$$2 \begin{bmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{bmatrix} + 2\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \quad \text{mit} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Dies führt auf

$$\begin{aligned} x^3 + \lambda x &= 0 & x(x^2 + \lambda) &= 0 \\ y^3 + \lambda y &= 0 & \implies y(y^2 + \lambda) &= 0 \\ z^3 + \lambda z &= 0 & z(z^2 + \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst den Fall  $x \neq 0$ , also  $\lambda = -x^2$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} y &= 0 \text{ oder } y = \pm x \\ z &= 0 \text{ oder } z = \pm x \end{aligned}$$

(i).  $y = z = 0$  führt wegen der Nebenbedingung  $g(x, y, z) = 0$  auf  $x = \pm 1$ , also

$$f(0, 0, \pm 1) = \frac{1}{2} = f(X_0).$$

(ii).  $y = \pm x, z = 0$  führt entsprechend auf  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ , also

$$f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{4}.$$

(iii).  $y = \pm x, z = \pm x$  führt auf  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ , also

$$f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{6}.$$

Die übrigen Fälle  $y \neq 0$  und  $z \neq 0$  sind analog zu behandeln. Insgesamt gibt es

- ▷ 6 Punkte vom Typ (i), die alle relative Maxima sind. Insbesondere ist also der Nordpol  $X_0$  ein relatives Maximum.
- ▷ 12 Punkte vom Typ (ii), die alle Sattelpunkte sind.
- ▷ 8 Punkte vom Typ (iii), die alle relative Minima sind.

Für einen Punkt  $[x, y, z]^T$  mit  $z > 0$  und  $g(x, y, z) = 0$  gilt

$$z = z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Damit erhält man

$$f(x, y, z) = f(x, y, z(x, y)) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)^2$$

als Funktion der zwei Variablen  $x$  und  $y$ . Die folgende Grafik enthält den zugehörigen Funktionsgraphen. Man erkennt deutlich die relativen Extrema vom Typ (i) und (iii):

**Beispiel.** Gesucht ist der minimale Abstand des Punktes  $P = [1, 1, 1]^T \in \mathbb{R}^3$  zur Kugeloberfläche

$$K := \{X \in \mathbb{R}^3 : \|X\| = 1\}.$$

Gesucht ist also das Minimum des Abstandsquadrats

$$f(X) := \|X - P\|^2 \quad (\text{grad } f(X) = 2(X - P))$$

unter der Nebenbedingung

$$g(X) := \|X\|^2 - 1 = 0 \quad (\text{grad } g(X) = 2X).$$

Mögliche Kandidaten für Minima sind die Punkte  $X \in K$  mit

$$\text{grad } f(X) + \lambda \text{grad } g(X) = 0$$

für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ , also diejenigen  $X \in K$  mit

$$2(X - P) + 2\lambda X = 0 \quad \implies \quad (1 + \lambda)X = P.$$

Da  $X \in K$ , muss  $|1 + \lambda| = \|P\| = \sqrt{3}$  sein, also  $\lambda = -1 \pm \sqrt{3}$ , und damit  $X = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}P$ . Es ist klar, dass  $-\frac{1}{\sqrt{3}}P$  (relatives) Maximum und  $\frac{1}{\sqrt{3}}P$  (relatives) Minimum der Abstandes ist. Für den minimalen Abstand erhält man also

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{3}}P - P \right\| = \sqrt{3} - 1.$$



# Kapitel 6

## Parameter- und Wegintegrale

### 6.1 Parameterintegrale

Viele Funktionen der Analysis erscheinen als Integrale der Form

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt$$

oder in der Form

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Im zweiten Fall tritt  $x$  als Parameter des Integranden  $f$  auf.

#### Wichtiges Beispiel: Laplacetransformierte

$$F(x) := \int_0^\infty f(t)e^{-xt} dt, \quad x \in ]0, \infty[$$

wobei  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig.

Im Folgenden beschränken wir uns auf eigentliche Parameterintegrale:

**Satz.** Es sei  $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  ein abgeschlossenes Rechteck und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt für die Integralfunktion

$$F(x) := \int_c^d f(x, y) dy, \quad x \in [a, b]$$

(i).  $F$  ist stetig auf  $[a, b]$

(ii). **Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge**

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

- (iii). **Differentiation unter dem Integralzeichen.** Ist  $f$  zusätzlich stetig partiell nach  $x$  differenzierbar, so ist  $F$  nach  $x$  differenzierbar mit Ableitung

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy, \quad x \in [a, b] \quad (6.1.1)$$

**Beispiele 6.1.1.** (i).  $F(x) = \int_1^\pi \frac{\sin(tx)}{t} dt$ ,  $F'(x) = \int_1^\pi \cos(tx) dt$ ,  $F''(x) = -\int_1^\pi t \sin(tx) dt$

- (ii). **Bessel-Funktionen**

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} J_n'(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin t - nt) \sin t dt \\ &= -\frac{x}{\pi} \int_0^\pi (\cos t)^2 \cos(x \sin t - nt) dt + \frac{n}{\pi} \int_0^\pi \cos t \cos(x \sin t - nt) dt \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$J_n''(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) (\sin t)^2 dt$$

also

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0$$

Die Funktion  $J_n$  ist also eine Lösung der **Besselschen Differentialgleichung**

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0.$$

Hängt im Parameterintegral zusätzlich die Integrationsgrenze vom Parameter  $x$  ab, so gilt statt (6.1.1):

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy = \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy + f(x, h(x))h'(x) - f(x, g(x))g'(x)$$

Hierbei sind  $g, h : [a, b] \rightarrow [c, d]$  stetig differenzierbar.

**Beispiel 6.1.2.** Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und

$$u(t) = \frac{1}{k} \int_0^t f(s) \sin(k(t-s)) ds.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} u'(t) &= \int_0^t f(s) \cos(k(t-s)) ds + \underbrace{f(t) \cdot \sin(k(t-t)) \cdot 1}_{=0} = \int_0^t f(s) \cos(k(t-s)) ds \\ u''(t) &= -k \int_0^t f(s) \sin(k(t-s)) ds + f(t) \underbrace{\cos 0}_{=1} \end{aligned}$$

also ist  $u$  Lösung der **Schwingungsgleichung**

$$u''(t) + k^2 u(t) = f(t).$$

## 6.2 Integration eines Vektorfeldes entlang von Kurven

Ein Kraftfeld kann man sich als Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

denken. In jedem Punkt  $X$  bestimmt der Vektor  $F(X)$  die Kraft, die in diesem Punkt wirkt. Die Bewegung eines Massepunktes durch das Kraftfeld kann durch eine (stetig differenzierbare) Kurve  $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  im  $\mathbb{R}^3$  beschrieben werden. Ist  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  eine Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$ , und beachtet man, dass zur Zeit  $t_i$  der Kraftvektor  $F(X(t_i))$  auf den Massepunkt in  $X(t_i)$  wirkt, so ist für seine Bewegung von  $X(t_i)$  zu  $X(t_{i+1})$  durch das Kraftfeld die Arbeit

$$\langle F(X(t_i)), X(t_{i+1}) - X(t_i) \rangle$$

zu verrichten. Summation über  $t_i$  liefert die insgesamt verrichtete Arbeit entlang des Polygonzuges  $X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n)$ :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \langle F(X(t_i)), X(t_{i+1}) - X(t_i) \rangle \quad \underset{X(t_{i+1}) - X(t_i) \approx \dot{X}(t_i)(t_{i+1} - t_i)}{\approx} \quad \sum_{i=0}^{n-1} \langle F(X(t_i)), \dot{X}(t_i) \rangle (t_{i+1} - t_i)$$

Konvergiert die Feinheit  $\delta(Z)$  der Zerlegung gegen 0, also  $\delta(Z) \rightarrow 0$ , so konvergiert der bei der Approximation gemachte Fehler gegen 0 und die Summe auf der rechten Seite konvergiert gegen das Riemann-Integral

$$\int_a^b \langle F(X(t)), \dot{X}(t) \rangle dt.$$

Dieses Integral beschreibt also die vom Massepunkt entlang des Weges  $X$  verrichtete Arbeit.

**Definition.** Es sei  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetiges Vektorfeld,  $X : [a, b] \rightarrow D$  stetig differenzierbare Kurve. Dann heißt

$$\int_a^b \langle F(X(t)), \dot{X}(t) \rangle dt$$

das **Wegintegral von  $F$  entlang des Weges  $X$** .

Statt  $\int_a^b \langle F(X(t)), \dot{X}(t) \rangle dt$  schreibt man auch

$$\int_W F dX$$

mit  $W$  gleich der Spur von  $X$ , also  $W = \{X(t) : t \in [a, b]\}$ .

**Merkhilfe**

$$\frac{dX(t)}{dt} = \dot{X}(t) \quad \text{also} \quad dX(t) = \dot{X}(t)dt$$

und

$$\int_W F dX = \int F \dot{X} dt$$

## Rechenregeln für Wegintegrale

(i). **Linearität**

$$\int_W (\alpha F + \beta G) dX = \alpha \int_W F dX + \beta \int_W G dX$$

(ii). **Umkehrung der Integrationsrichtung:** Bezeichnet  $-W$  den Weg  $W$  in umgekehrter Richtung, so folgt

$$\int_{-W} F dX = - \int_W F dX$$

(iii). Ist  $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und stückweise stetig differenzierbar und  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  Zerlegung von  $[a, b]$ , so dass  $X : ]t_{i-1}, t_i[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  fortsetzbar zu stetig differenzierbarer Kurve  $X_i$  auf  $[t_{i-1}, t_i]$  für  $i = 1, \dots, n$ , so definiert man

$$\int_W F dX = \sum_{i=1}^n \int_{W_i} F dX_i.$$

Hierbei bezeichnet  $W_i$  die Spur des  $i$ -ten Teilstücks  $X_i$ .

(iv).

$$\left| \int_W F dX \right| \leq L(X) \max\{\|F(X(t))\| : t \in [a, b]\}$$

**Physikalische Interpretation:** Die gesamte vom Massepunkt entlang der Kurve  $X$  zu verrichtende Arbeit kann abgeschätzt werden durch die Weglänge  $L(X)$  multipliziert mit dem Maximum der Beträge der angreifenden Kräfte.

**Beispiel 6.2.1** (Isolierter Wirbel). Wir betrachten die Funktion

$$F(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \quad \text{auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \quad (6.2.1)$$

Es sei  $X(t) = r \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , der Weg entlang der Kreislinie mit Radius  $r$  und Mittelpunkt 0. Dann gilt

$$\int_W F dX = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} dt = 2\pi$$

**Beispiel 6.2.2** (Wegunabhängigkeit). Es sei

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2y \\ x^3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (6.2.2)$$

Wir integrieren  $F$  entlang des Weges von 0 nach  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  und zwar einmal entlang

$$X_1(t) = \begin{cases} [t, 0]^T & 0 \leq t \leq 1 \\ [1, t-1]^T & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

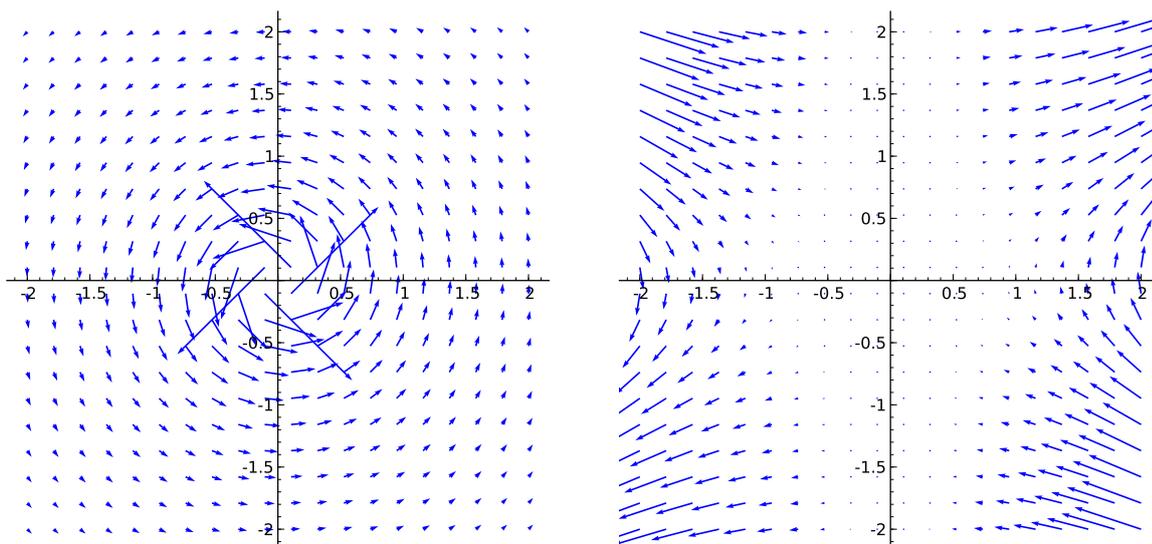


Abbildung 6.1: Vektorfelder aus den Beispielen 6.2.1 (links) und 6.2.2 (rechts)

und einmal entlang

$$X_2(t) = \begin{cases} [0, t]^T & 0 \leq t \leq 1 \\ [t-1, 1]^T & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Dann folgt

$$\int_{W_1} F dX_1 = \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 \\ t^3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt + \int_1^2 \begin{bmatrix} 3(t-1) \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = 1$$

und

$$\begin{aligned} \int_{W_2} F dX_2 &= \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt + \int_1^2 \begin{bmatrix} 3(t-1)^2 \\ (t-1)^3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt \\ &= \int_1^2 3(t-1)^2 dt = (t-1)^3 \Big|_1^2 = 1 \end{aligned}$$

Auch entlang des Weges  $X_3(t) = t[1, 1]^T$ ,  $t \in [0, 1]$ , erhält man

$$\int_{W_3} F dX_3 = \int_0^1 \begin{bmatrix} 3t^3 \\ t^3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \int_0^1 4t^3 dt = t^4 \Big|_0^1 = 1$$

**Definition.** Wegintegrale, deren Werte nur von Anfangs- und Endpunkt, nicht aber vom eigentlichen Weg dazwischen abhängen, heißen **wegunabhängig**.

## 6.3 Potentialfelder

**Definition.** Ein Vektorfeld  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **Potentialfeld** (bzw. **konservativ**, bzw. **Gradientenfeld**), falls eine partiell differenzierbare Funktion  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  existiert mit  $F = \text{grad } \phi$ . Die Funktion  $\phi$  heißt **Stammfunktion** und  $U := -\phi$  heißt **Potential**.

Das Vorzeichen vor dem Potential  $U$  ist dabei so gewählt, dass  $F = \text{grad } \phi = -\text{grad } U$  stets in Richtung des stärksten Potentialabfalls zeigt.

**Beispiel 6.3.1.** Das Vektorfeld  $F(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2y \\ x^3 \end{bmatrix}$  aus Beispiel 6.2.2 ist ein Potentialfeld, denn

$$F(x, y) = \text{grad } \phi(x, y) \quad \text{für} \quad \phi(x, y) = x^3y.$$

**Beispiel 6.3.2.** Das Vektorfeld  $F(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$  aus (6.2.1) ist ebenfalls ein Potentialfeld, wenn man als Definitionsbereich  $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x = 0 \right\}$  wählt, denn:

$$F = \text{grad } \phi \quad \text{für} \quad \phi(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Methoden zur praktischen Berechnung einer Stammfunktion  $\phi$  aus  $F$  werden wir später kennenlernen. Zunächst jedoch zeigen wir für Potentialfelder die Wegunabhängigkeit.

**Satz (1. Hauptsatz für Kurvenintegrale).** Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Potentialfeld mit Stammfunktion  $\phi$ . Weiter seien  $A, E \in D$  zwei Punkte. Dann gilt für jede stetig differenzierbare Kurve  $X : [a, b] \rightarrow D$  mit  $X(a) = A$ ,  $X(b) = E$ :

$$\int_W F dX = \phi(E) - \phi(A) \quad (6.3.1)$$

**Beweis.** Die Funktion  $t \mapsto (\phi \circ X)(t)$ ,  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig differenzierbar nach  $t$  mit Ableitung

$$\frac{d}{dt} (\phi \circ X)(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(X(t)) \dot{x}_i(t) = \text{grad } \phi(X(t))^T \cdot \dot{X}(t) = F(X(t))^T \cdot \dot{X}(t).$$

Damit ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_W F dX = \int_a^b F(X(t))^T \cdot \dot{X}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (\phi \circ X)(t) dt = \phi(X(b)) - \phi(X(a)) = \phi(E) - \phi(A).$$

### Bemerkungen

(i). Für einen **geschlossenen Weg** ist  $\phi(E) = \phi(A)$ , und damit gilt für das Wegintegral

$$\int_W F dX = 0.$$

(ii). Für Potentialfelder ist das Wegintegral mit Hilfe der Stammfunktion  $\phi$  einfach gemäß der Formel (6.3.1) zu bestimmen.

(iii). Ist  $\phi$  Stammfunktion von  $F$ , so auch  $\phi + c$  für jede Konstante  $c \in \mathbb{R}$

**Beispiel 6.3.3.** In der Situation von (6.2.1) ist das Wegintegral  $\int_W F dX$  entlang des geschlossenen Weges

$$X(t) = r \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

**nicht** 0.  $F$  ist also kein Potentialfeld auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

Schränkt man den Definitionsbereich von  $F$  ein auf  $D_0 = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x = 0 \right\}$ , so ist  $F$  jedoch ein Potentialfeld (siehe Beispiel 6.3.2) mit Stammfunktion  $\phi(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ . Man beachte, dass der Weg  $X$  nicht in  $D_0$  verläuft. Es ergibt sich also kein Widerspruch zum Satz.

**Beispiel 6.3.4.**  $F(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2y \\ x^3 \end{bmatrix}$  ist Potentialfeld mit Stammfunktion  $\phi(x, y) = x^3y$ . Für jeden stetig differenzierbaren Weg  $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  von  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  nach  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  gilt also

$$\int_W F dX = \phi(1, 1) - \phi(0, 0) = 1.$$

Dies erklärt das Beispiel 6.2.2 (und 6.3.1).

Für Potentialfelder  $F$  sind Wegintegrale besonders einfach mit Hilfe einer zugehörigen Stammfunktion zu berechnen. Es ist daher von großem Interesse, für ein gegebenes Vektorfeld  $F$  entscheiden zu können, ob es ein Potentialfeld ist oder nicht.

Wir können ein zugehöriges Entscheidungskriterium wie folgt ableiten: Ist  $F = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$  ein Potentialfeld, also  $F = \text{grad } \phi$  auf  $D$  und ist  $F$  stetig partiell differenzierbar, so folgt

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i}(x), \quad 1 \leq i, j \leq n$$

die Stammfunktion  $\phi$  ist also zweimal stetig partiell differenzierbar und die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschbar, d.h.

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x), \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Damit haben wir eine **notwendige Bedingung** an ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $F$  gefunden, so dass  $F$  Potentialfeld ist. Umgekehrt lässt sich jetzt hieraus auch ein **hinreichendes Kriterium** ableiten.

**Definition.** Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt **sternförmig**, falls es einen Punkt  $S \in M$  gibt, so dass für jedes  $x \in M$  die Verbindungsstrecke zwischen  $S$  und  $X$

$$\{(1-t)S + tX : t \in [0, 1]\}$$

ganz in  $M$  liegt.

## Beispiele

- ▷  $\mathbb{R}^n$  ist sternförmig, ebenso  $U_\epsilon(X)$  für beliebige  $X \in \mathbb{R}^n$ .
- ▷  $\mathbb{R}^n \setminus \{X\}$  ist **nicht** sternförmig!

**Satz (2. Hauptsatz für Kurvenintegrale).** Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und sternförmig,  $F = [F_1, \dots, F_n]^T : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig partiell differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:  $F$  ist ein Potentialfeld, genau dann wenn

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n \quad (6.3.2)$$

auf  $D$ .

### Bemerkungen

- (i). Die Bedingung (6.3.2) heißt **Integrabilitätsbedingung**.
- (ii). Erfüllt  $F$  die Integrabilitätsbedingung (6.3.2), ist  $D$  jedoch nicht sternförmig, so kann man den Hauptsatz zumindest auf sternförmige Teilmengen von  $D$  (z.B.  $\epsilon$ -Umgebungen) anwenden.

### Niedrigdimensionale Spezialfälle

- (i).  $n = 2$

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{bmatrix}$$

Äquivalent zu (6.3.2) ist  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

- (ii).  $n = 3$

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} F_1(x_1, x_2, x_3) \\ F_2(x_1, x_2, x_3) \\ F_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}$$

Äquivalent zu (6.3.2) ist

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2}$$

**Beispiel 6.3.5.**  $F(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2y \\ x^3 \end{bmatrix}$  erfüllt (6.3.2), denn

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = 3x^2 = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y)$$

**Beispiel 6.3.6.**  $F(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$  erfüllt (6.3.2) auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , denn

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Folglich ist  $F$  ein Potentialfeld auf jeder sternförmigen Teilmenge von  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

## 6.4 Praktische Berechnung von Stammfunktionen

Wir diskutieren zunächst niedrigdimensionale Spezialfälle, bevor wir uns einer allgemeinen Methode zuwenden. Wir verwenden die Notation des 2. Hauptsatzes für Kurvenintegrale und setzen voraus, dass alle genannten Bedingungen —insbesondere die Integrabilitätsbedingungen (6.3.2)— erfüllt sind.

### 6.4.1 Der Fall $n = 2$

**Gegeben:**

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{bmatrix}$$

mit der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

**Gesucht:** eine Funktion  $\phi$  mit

$$P = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

**Ansatz.** Aus  $P = \frac{\partial \phi}{\partial x}$  folgt

$$\phi(x, y) = \int P(x, y) dx + g(y)$$

für eine noch zu bestimmende Funktion  $g$ . Ist  $g$  differenzierbar, so folgt

$$Q(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx + g'(y)$$

und Auflösen nach  $g'(y)$  liefert

$$g'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx$$

**Beispiel.** Die Funktion

$$F(x, y) = 2 \cos(x^2 + y^2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

erfüllt die Integrabilitätsbedingung (6.3.2). Für die Stammfunktion machen wir den Ansatz

$$\phi(x, y) = \int \underbrace{2x \cos(x^2 + y^2)}_{= \frac{d}{dx} \sin(x^2 + y^2)} dx + g(y) = \sin(x^2 + y^2) + g(y)$$

Dabei ist  $g$  zu bestimmen durch

$$g'(y) = 2y \cos(x^2 + y^2) - \frac{\partial}{\partial y} \sin(x^2 + y^2) = 0.$$

Es folgt  $g \equiv c$  und somit

$$\phi(x, y) = \sin(x^2 + y^2) + c.$$

### 6.4.2 Der Fall $n = 3$

**Gegeben:**

$$F(x, y, z) = \begin{bmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{bmatrix}$$

mit der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

**Gesucht:** eine Funktion  $\phi$  mit

$$F_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad F_3 = \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

**Ansatz.** Aus  $F_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}$  folgt

$$\phi(x, y, z) = \int F_1(x, y, z) dx + g(y, z)$$

für eine noch zu bestimmende Funktion  $g(y, z)$ . Ist  $g$  partiell nach  $y$  differenzierbar, so folgt

$$F_2(x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \int F_1(x, y, z) dx + \frac{\partial g}{\partial y}(y, z)$$

und somit

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = F_2(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial y} \int F_1(x, y, z) dx \quad (6.4.1)$$

Wegen der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

hängt die rechte Seite von (6.4.1) nicht von  $x$  ab. Wir können also schreiben

$$h(y, z) := F_2(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial y} \int F_1(x, y, z) dx$$

Integrieren von  $h$  bzgl.  $y$  liefert

$$g(y, z) = \int h(y, z) dy + l(z)$$

mit einer noch zu bestimmenden Funktion  $l$ . Einsetzen für  $g$  liefert

$$\phi(x, y, z) = \int F_1(x, y, z) dx + \int h(y, z) dy + l(z)$$

und ist  $l$  differenzierbar, so folgt wegen  $\frac{\partial \phi}{\partial z} = F_3$  hieraus

$$l'(z) = F_3(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial z} \int F_1(x, y, z) dx - \frac{\partial}{\partial z} \int h(y, z) dy$$

**Beispiel 6.4.1.** Die Funktion

$$F(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2xy + 1 \\ x^2 + z \\ y + 1 \end{bmatrix}$$

erfüllt die Integrabilitätsbedingung (6.3.2). Es ist  $x^2y + x$  ein unbestimmtes Integral  $\int F_1(x, y, z)dx$  und damit

$$\phi(x, y, z) = x^2y + x + g(y, z).$$

Für die partielle Ableitung  $\frac{\partial g}{\partial y}$  haben wir

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = \underbrace{x^2 + z}_{=F_2(x, y, z)} - \underbrace{x^2}_{=\frac{\partial}{\partial y}(x^2y+x)} = z =: h(y, z)$$

und da  $zy$  ein unbestimmtes Integral  $\int h(y, z)dy$  ist, folgt

$$g(y, z) = zy + l(z)$$

mit

$$l'(z) = \underbrace{y + 1}_{=F_3(x, y, z)} - \underbrace{0}_{\frac{\partial}{\partial z}(x^2y+x)} - \underbrace{y}_{=\frac{\partial}{\partial z}(zy)} = 1.$$

Hieraus folgt  $l(z) = z + c$ , also

$$g(y, z) = zy + z + c$$

und schließlich

$$\phi(x, y, z) = x^2y + x + zy + z + c.$$

**6.4.3 Integration entlang geeigneter Wege**

Eine weitere Methode zur praktischen Berechnung von Stammfunktionen die in jeder Dimension funktioniert, ist die **Integration entlang geeigneter Wege**. Dazu wählt man einen Anfangspunkt  $A \in D$  aus. Zu gegebenem Endpunkt  $E \in D$  wählt man dann einen beliebigen stetigen, stückweise stetig differenzierbaren Weg  $X$  in  $D$ , der  $A$  mit  $E$  verbindet:

$$X : [0, 1] \rightarrow D, \quad X(0) = A, \quad X(1) = E.$$

Dann setzt man

$$\phi(E) := \int F dX \left( = \int_0^1 \langle F(X(t)), \dot{X}(t) \rangle dt \right) \quad (6.4.2)$$

wobei die letzte Gleichheit für stetig differenzierbare Wege  $X$  gilt.

**Wichtig.** Das Integral auf der rechten Seite von (6.4.2) ist **unabhängig** vom gewählten Weg. Dies wird durch die Integrabilitätsbedingung an  $F$  und die Sternförmigkeit des Gebietes  $D$  erreicht.

**Bemerkung.** Da die Menge  $D$  sternförmig bezüglich eines geeigneten Punktes  $S$  ist, ist  $A = S$  und für  $X$  die Strecke von  $S$  nach  $E$  oft besonders bequem. Für einen beliebigen Anfangspunkt  $A$  und ist dann der "Umweg über  $S$ " als Weg von  $A$  nach  $E$  besonders geeignet.

**Beispiel.** Wir betrachten nochmal das Beispiel 6.4.1, also

$$F(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2xy + 1 \\ x^2 + z \\ y + 1 \end{bmatrix}.$$

Hier ist  $D = \mathbb{R}^3$ . Dann ist zu  $A = 0$  und  $X = [x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$

$$X(t) = tX, \quad t \in [0, 1]$$

ein 0 mit  $X$  verbindender Weg, also

$$\begin{aligned} \phi(X) &= \int F dX = \int_0^1 \langle F(X(t)), \dot{X}(t) \rangle dt \\ &= \int_0^1 ((2t^2xy + 1)x + (t^2x^2 + tz)y + (ty + 1)z) dt \\ &= \frac{2}{3}x^2y + x + \frac{1}{3}x^2y + \frac{1}{2}zy + \frac{1}{2}yz + z \\ &= x^2y + x + zy + z \end{aligned}$$

Stammfunktion zu  $F$ .

# Kapitel 7

## Integration in $\mathbb{R}^n$

### 7.1 Das Riemann-Integral in $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten zunächst im Falle  $n = 2$  eine nichtnegative stetige Funktion  $f : \underbrace{[a, b] \times [c, d]}_{=I} \rightarrow [0, \infty]$ . Wie berechnet man das Volumen  $V$  des dreidimensionalen Körpers mit Grundfläche  $[a, b] \times [c, d]$ , dessen Höhe von dem Funktionsgraphen von  $f$  bestimmt wird?

Zur Näherung wähle eine Zerlegung  $Z$  von  $[a, b] \times [c, d]$  in  $N$  Rechtecke  $I_k$  der Form

$$I_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k] \quad 1 \leq k \leq N$$

die sich bis auf Randpunkte **nicht überlappen** und die ganz  $I = [a, b] \times [c, d]$  ausschöpfen, also

$$I = \bigcup_{k=1}^N I_k.$$

Für jedes Teilrechteck  $I_k$  sei

- ▷  $m_k$  das Minimum von  $f$  auf  $I_k$
- ▷  $M_k$  das Maximum von  $f$  auf  $I_k$

Hierzu bilden wir die **Untersumme** von  $f$  bzgl.  $Z$

$$s_f(Z) = \sum_{k=1}^N m_k \cdot |I_k|$$

wobei  $|I_k| =$  Fläche des Rechtecks  $I_k$ , also  $|I_k| = (b_k - a_k) \cdot (d_k - c_k)$  für  $I_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$ . Somit ist  $m_k \cdot |I_k|$  das Volumen des Quaders mit Grundfläche  $I_k$  und Höhe  $m_k$

Analog bilden wir die **Obersumme** von  $f$  bzgl.  $Z$

$$S_f(Z) = \sum_{k=1}^N M_k \cdot |I_k|.$$

Dann gilt offensichtlich

$$s_f(Z) \leq V \leq S_f(Z).$$

Verfeinert man  $Z$  durch weiteres Unterteilen der Rechtecke  $I_k$ , so wächst die Untersumme und fällt die Obersumme.

Es sei

$$\delta(Z) = \text{größte Fläche eines Teilrechtecks von } Z = \max \{|I_k| : 1 \leq k \leq N\}$$

die **Feinheit der Zerlegung**  $Z$ .

Lässt man  $\delta(Z)$  gegen 0 konvergieren, so konvergieren die Folgen der Untersummen und die Folgen der Obersummen gegen den gemeinsamen Grenzwert  $V$ , d.h. es gilt

$$\lim_{\delta(Z) \rightarrow 0} s_f(Z) = \lim_{\delta(Z) \rightarrow 0} S_f(Z) = V.$$

**Wichtig.** Der Grenzwert  $V$  ist **unabhängig** von der Wahl der Folge der Zerlegungen  $Z$ .

**Beispiel.** Wir betrachten  $f(x, y) = xy$  auf  $I = [0, 1] \times [0, 1]$ . Zu  $N \in \mathbb{N}$  wähle Zerlegung in  $N^2$  Teilrechtecke

$$I_{k,l} = \left[ \frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right] \times \left[ \frac{l-1}{N}, \frac{l}{N} \right] \quad 1 \leq k, l \leq N$$

also

$$|I_{k,l}| = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N^2}.$$

Offenbar ist

$$\underbrace{\frac{(k-1)(l-1)}{N^2}}_{=m_{k,l}} \leq f(x, y) \leq \underbrace{\frac{kl}{N^2}}_{=M_{k,l}} \quad \text{auf } I_{k,l}$$

und damit

$$\begin{aligned} s_f(Z) &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \underbrace{m_{k,l}}_{=\frac{(k-1)(l-1)}{N^2}} \cdot \underbrace{|I_{k,l}|}_{=\frac{1}{N^2}} = \frac{1}{N^4} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N (k-1)(l-1) \\ &= \frac{1}{N^4} \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} kl}_{=(\frac{1}{2}(N-1)N)^2} = \frac{1}{4} \frac{(N-1)^2}{N^2} \rightarrow \frac{1}{4} \quad \text{für } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Analog zeigt man

$$S_f(Z) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \underbrace{M_{k,l}}_{=\frac{kl}{N^2}} \underbrace{|I_{k,l}|}_{=\frac{1}{N^2}} = \frac{1}{N^4} \underbrace{\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N kl}_{=(\frac{1}{2}(N+1)N)^2} = \frac{1}{N^4} = \frac{1}{4} \frac{(N+1)^2}{N^2} \rightarrow \frac{1}{4} \quad \text{für } N \rightarrow \infty.$$

Wir können den Fall  $n = 2$  auf allgemeine Dimensionen übertragen: Für Punkte

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

mit  $a_i \leq b_i$  definieren wir das abgeschlossene  $n$ -**dim. Rechteck**

$$I := [A, B] := \left\{ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i \text{ für } 1 \leq i \leq n \right\} \\ = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

Mit  $|I| := \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$  bezeichnen wir das  $n$ -**dimensionale Volumen** des Rechtecks  $I$ . Eine Zerlegung  $Z$  von  $[A, B]$  ist eine endliche Folge von Rechtecken  $I_1, \dots, I_N$ , die sich bis auf Randpunkte nicht überlappen und für die gilt

$$[A, B] = \bigcup_{k=1}^N I_k.$$

Zur Zerlegung  $Z$  bilden wir die **Untersumme von  $f$**

$$s_f(Z) = \sum_{k=1}^N m_k \cdot |I_k|$$

und die **Obersumme von  $f$**

$$S_f(Z) = \sum_{k=1}^N M_k \cdot |I_k|$$

wobei

$$m_k = \text{Minimum von } f \text{ auf } I_k$$

$$M_k = \text{Maximum von } f \text{ auf } I_k$$

Wie im Falle  $n = 2$  sei

$$\delta(Z) = \text{größtes } n\text{-dim Volumen eines Teilrechtecks von } Z = \max\{|I_k| : 1 \leq k \leq N\}$$

die **Feinheit der Zerlegung  $Z$** .

**Definition.** Es sei  $f : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Gilt dann

$$V = \lim_{\delta(Z) \rightarrow 0} s_f(Z) = \lim_{\delta(Z) \rightarrow 0} S_f(Z)$$

so heißt  $f$  (**Riemann-**) **integrierbar (auf  $[A, B]$ )** und der gemeinsame Grenzwert  $V$  der Unter- bzw. Obersumme heißt das (**Riemann-**) **Integral von  $f$  (auf  $[A, B]$ )**.

**Schreibweise:**

$$\int_{[A, B]} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) := V$$

**Satz.** Es sei  $f : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig (d.h., es gibt eine Zerlegung  $[A, B] = \bigcup_{k=1}^n [A_k, B_k]$ , so dass  $f$  auf  $]A_k, B_k[$  stetig und stetig fortsetzbar auf  $[A_k, B_k]$  für alle  $k$ ). Dann ist  $f$  Riemann-integrierbar.

**Rechenregeln.****(i). Linearität**

$$\begin{aligned} & \int_{[A,B]} (\alpha f(x_1, \dots, x_n) + \beta g(x_1, \dots, x_n)) d(x_1, \dots, x_n) \\ &= \alpha \int_{[A,B]} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) + \beta \int_{[A,B]} g(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

**(ii). Additivität** Für  $[A, B] = I_1 \cup I_2$ , wobei  $I_1, I_2$  bis auf Randpunkte disjunkte Rechtecke, gilt

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{[A,B]} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) &= \int_{I_1} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \\ &+ \int_{I_2} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

**(iii). Monotonie**  $f \leq g$  auf  $[A, B]$ 

$$\Rightarrow \int_{[A,B]} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \leq \int_{[A,B]} g(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n)$$

**7.2 Praktische Berechnung — iterierte Integrale**

$n = 2$ : Es sei  $f : \underbrace{[a, b] \times [c, d]}_{=I} \rightarrow \mathbb{R}$  (Riemann-) integrierbar.

Dann gilt

▷ Existiert für alle  $x \in [a, b]$  das Riemann-Integral

$$\int_c^d f(x, y) dy$$

so existiert das iterierte Integral

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

und es gilt

$$\int_I f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

▷ Analog gilt: existiert für alle  $y \in [c, d]$  das Riemann-Integral

$$\int_a^b f(x, y) dx$$

so existiert das iterierte Integral

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

und es gilt

$$\int_I f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

**Bemerkungen**

- (i). Die Voraussetzungen sind insbesondere dann erfüllt, wenn  $f$  stetig ist auf  $I = [a, b] \times [c, d]$ .
- (ii). Hat  $f(x, y) = g(x)h(y)$  Produktform und sind  $g, h$  integrierbar (z.B. stetig), so ist

$$\int_I f(x, y) d(x, y) = \int_I g(x)h(y) d(x, y) = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy.$$

- (iii). Durch Induktion nach  $n$  können auch  $n$ -dimensionale Integrale durch iterierte Integrale praktisch berechnet werden: obige Aussagen lassen sich sinngemäß auf den Fall  $n \geq 3$  übertragen.

**Beispiele**

- (i).  $\int_I \cos(2x + y) d(x, y)$  für  $I = [0, \pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

$\cos(2x + y)$  ist stetig auf  $I$ , also integrierbar, und damit gilt

$$\begin{aligned} \int_I \cos(2x + y) d(x, y) &= \int_0^\pi \left( \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x + y) dy}_{=\sin(2x+y)|_0^{\frac{\pi}{2}}} \right) dx \\ &= \int_0^\pi \left( \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(2x) \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \Big|_0^\pi + \frac{1}{2} \cos(2x) \Big|_0^\pi \\ &= -\frac{1}{2} \underbrace{\cos\left(\frac{5}{2}\pi\right)}_{=0} + \frac{1}{2} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \frac{1}{2} \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} - \frac{1}{2} \underbrace{\cos 0}_{=1} = 0. \end{aligned}$$

- (ii). Es sei  $I = [0, 1] \times [0, 2]$ . Dann gilt mit  $g(x) = x^2$  und  $h(y) = y$

$$\int_I \underbrace{x^2 y}_{=g(x)h(y)} d(x, y) = \int_0^1 g(x) dx \cdot \int_0^2 h(y) dy = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}.$$

- (iii). Es sei  $I = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_I \underbrace{e^{2x+y+3z}}_{=e^{2x} \cdot e^y \cdot e^{3z}} d(x, y, z) &= \int_0^1 e^{2x} dx \cdot \int_0^2 e^y dy \cdot \int_0^3 e^{3z} dz \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 \cdot e^y \Big|_0^2 \cdot \frac{1}{3} e^{3z} \Big|_0^3 \\ &= \frac{1}{2} (e^2 - 1) \cdot (e^2 - 1) \cdot \frac{1}{3} (e^9 - 1). \end{aligned}$$

(iv). Es sei  $I = [0, 1]^3$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_I (x+y+z)^2 d(x,y,z) &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \underbrace{\int_0^1 (x+y+z)^2 dz}_{=\frac{1}{3}[(x+y+1)^3-(x+y)^3]} \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{12} [(x+2)^4 - 2(x+1)^4 + x^4] dx \\ &= \frac{1}{60} [(x+2)^5 \Big|_0^1 - 2(x+1)^5 \Big|_0^1 + x^5 \Big|_0^1] \\ &= \frac{1}{60} (3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3) = \frac{150}{60} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

### 7.3 Das Riemann-Integral über kompakte Mengen

Statt  $n$ -dimensionale Rechtecke  $[A, B]$  kann man Funktionen auch über kompakte Mengen integrieren. Dazu definieren wir zu gegebener Teilmenge  $K \subset \mathbb{R}^n$  die Funktion

$$1_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in K \\ 0 & \text{falls } x \notin K \end{cases}$$

Die Funktion  $1_K$  heißt **Indikatorfunktion** oder **charakteristische Funktion** der Menge  $K$ .

**Definition.** Es sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  eine kompakte Menge,  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und  $I_K = [A, B]$  das kleinste  $n$ -dimensionale Rechteck, das  $K$  enthält. Ist dann die Funktion

$$f \cdot 1_K : I_K \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in K \\ 0 & \text{für } x \in I_K \setminus K \end{cases}$$

Riemann-integrierbar auf  $I_K$ , so heißt  $f$  (**Riemann-**) **integrierbar auf  $K$**  und man setzt

$$\int_K f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) := \int_{I_K} (f \cdot 1_K)(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n)$$

**Linearität** und **Monotonie** des Riemann-Integrals über  $n$ -dimensionale Rechtecke übertragen sich auf Integrale über kompakten Mengen. Darüber hinaus gilt die

**Additivität** Ist  $f$  integrierbar auf den kompakten Mengen  $K_1, K_2$ , so ist  $f$  auch integrierbar auf  $K_1 \cup K_2$ . Sind  $K_1$  und  $K_2$  **nicht überlappend**, d.h. haben sie höchstens Randpunkte gemeinsam, so gilt

$$\begin{aligned} \int_{K_1 \cup K_2} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) &= \int_{K_1} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \\ &+ \int_{K_2} f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Ein kompakte Menge  $K$ , für die insbesondere ihre charakteristische Funktion  $1_K$  integrierbar ist, heißt **messbar**. Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $K \subset \mathbb{R}^n$  messbar, so ist  $f$  **Riemann-integrierbar über  $K$** .

**Bemerkung** Für  $f \equiv 1$ , also  $f(x_1, \dots, x_n) = 1$ , lässt sich

$$\int_K 1 d(x_1, \dots, x_n)$$

als  $n$ -dimensionales Volumen der Menge  $K$  interpretieren. Ist  $K$  messbar und  $\int_K 1 d(x_1, \dots, x_n) = 0$ , so heißt  $K$  **Nullmenge**.

### Beispiele für Nullmengen

Jedes  $n$ -dimensionale Rechteck der Form

$$I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_i, b_i] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

also jedes  $n$ -dimensionale Rechteck, bei dem eine oder mehr Seiten zu einem Punkt zusammengezogen sind, ist eine Nullmenge, denn

$$\int_I 1 d(x_1, \dots, x_n) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (a_i - a_i) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n) = 0.$$

Einzelne Punkte sind Nullmengen, ebenso Vereinigungen von Nullmengen, d. h.

$$K_1, K_2 \text{ Nullmengen} \Rightarrow K_1 \cup K_2 \text{ ebenfalls Nullmenge.}$$

Ist  $K$  kompakt,  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist der Funktionsgraph

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in K\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

eine **Nullmenge**.

**Wichtig** Ist  $K$  eine Nullmenge und  $f$  integrierbar auf  $K$ , so ist

$$\int_K f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

## 7.4 Praktische Berechnung über Normalbereiche

### 7.4.1 Normalbereiche in $\mathbb{R}^2$

**Definition.** Es sei  $K \subset \mathbb{R}^2$  eine kompakte Menge.

(i).  $K$  heißt **y-projizierbar**, falls es zwei stetige Funktionen  $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : g(x) \leq y \leq h(x), x \in [a, b] \right\}$$

(ii).  $K$  heißt **x-projizierbar**, falls zwei stetige Funktionen  $l, r : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  existieren mit

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : l(y) \leq x \leq r(y), y \in [c, d] \right\}$$

(iii). Ist  $K$   $x$ - oder  $y$ -projizierbar, so heißt  $K$  ein **Normalbereich**.

(iv).  $K$  heißt **regulär**, falls die berandenden Funktionen  $g, h$  (bzw.  $l, r$ ) stetig differenzierbar sind.

**Satz.** Ist  $K$  ein Normalbereich und  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist  $f$  integrierbar auf  $K$  und es gilt mit den Bezeichnungen obiger Definition:

▷ Falls  $K$   $y$ -projizierbar ist:

$$\int_K f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

▷ Falls  $K$   $x$ -projizierbar ist:

$$\int_K f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left( \int_{l(y)}^{r(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

### Beispiel: Kreisring

Fläche eines Kreisringes mit innerem Radius  $r$  und äußerem Radius  $R$

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : r \leq \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| \leq R \right\}$$

$K$  ist kein Normalbereich, jedoch können wir  $K$  in zwei nur am Rand überlappende Normalbereiche gleicher Größe aufteilen:  $K = K_+ \cup K_-$  mit

$$K_{\pm} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : r \leq \left\| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\| \leq R, \pm y \geq 0 \right\}.$$

$K_+$  (bzw.  $K_-$ ) sind  $y$ -projizierbar mit

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-R, -r] \\ \sqrt{r^2 - x^2} & \text{für } ] -r, r[ \\ 0 & \text{für } x \in [r, R] \end{cases}$$

und  $h(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$  für  $x \in [-R, R]$  für  $K_+$ . Folglich beträgt die Fläche  $A_+$  der oberen Hälfte

$$\begin{aligned} A_+ &= \int_{-R}^{+R} \underbrace{\left( \int_{g(x)}^{h(x)} 1_{K_+}(x, y) dy \right)}_{h(x) - g(x)} dx = \int_{-R}^{+R} h(x) - g(x) dx \\ &= \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2} dx - \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{2} R^2 - \frac{\pi}{2} r^2 = \frac{\pi}{2} (R^2 - r^2) \end{aligned}$$

Folglich ist die Fläche des Kreisringes  $K$  gleich  $\pi(R^2 - r^2)$ .

## Berechnung des Schwerpunkts

Für eine messbare kompakte Menge  $K \subseteq \mathbb{R}^2$  ist der Schwerpunkt  $\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix}$  definiert durch

$$x_s = \frac{1}{|K|} \int_K x d(x, y) \quad \text{und} \quad y_s = \frac{1}{|K|} \int_K y d(x, y).$$

Hierbei bezeichnet  $|K|$  die Fläche von  $K$ , also

$$|K| = \int_K 1 d(x, y).$$

Ist  $K$  speziell ein Normalbereich der Form

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : 0 \leq y \leq h(x), x \in [a, b] \right\}$$

so errechnet man als Schwerpunkt

$$x_s = \frac{1}{|K|} \left( \int_a^b \underbrace{\int_0^{h(x)} x dy}_{xh(x)} dx \right) = \frac{1}{|K|} \int_a^b xh(x) dx$$

$$y_s = \frac{1}{|K|} \int_a^b \left( \underbrace{\int_0^{h(x)} y dy}_{\frac{1}{2}h(x)^2} \right) dx = \frac{1}{2|K|} \int_a^b (h(x))^2 dx.$$

Der geometrische Schwerpunkt eines solchen Normalbereiches ist also der Punkt

$$\frac{1}{|K|} \begin{bmatrix} \int_a^b xh(x) dx \\ \frac{1}{2} \int_a^b (h(x))^2 dx \end{bmatrix} = \frac{1}{\int_a^b h(x) dx} \begin{bmatrix} \int_a^b xh(x) dx \\ \frac{1}{2} \int_a^b (h(x))^2 dx \end{bmatrix}$$

**Speziell:** Schwerpunkt eines Halbkreises mit Radius  $R$

$$h(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, x \in [-R, R]$$

$$x_s = \frac{2}{\pi R^2} \int_{-R}^{+R} x \sqrt{R^2 - x^2} dx = 0$$

$$y_s = \frac{2}{\pi R^2} \frac{1}{2} \int_{-R}^{+R} R^2 - x^2 dx = \frac{1}{\pi R^2} [2R^3 - \frac{2}{3}R^3] = \frac{4R}{3\pi}$$

Der geometrische Schwerpunkt hat also die Koordinaten  $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4R}{3\pi} \end{bmatrix}$

### 7.4.2 Normalbereiche in $\mathbb{R}^3$

Im folgenden betrachten wir Normalbereiche  $K \subset \mathbb{R}^3$ . Räumliche Normalbereiche sind analog definiert zum zweidimensionalen Fall:

**Definition.** Es sei  $K \subset \mathbb{R}^3$  eine kompakte Menge.  $K$  heißt **Normalbereich bzgl. der  $xy$ -Ebene**, wenn es

- ▷ zwei stetige Funktionen  $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , sowie
- ▷ zwei stetige Funktionen  $u, v : A := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} ; g(x) \leq y \leq h(x), x \in [a, b] \right\} \rightarrow \mathbb{R}$

gibt, so dass

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : u(x, y) \leq z \leq v(x, y), \underbrace{g(x) \leq y \leq h(x)}_{=A}, x \in [a, b] \right\}.$$

Entsprechend definiert man Normalbereiche bzgl. der  $xz$ -Ebene und bzgl. der  $yz$ -Ebene. Sind die berandenden Funktionen  $g, h$  und  $u, v$  zudem stetig differenzierbar, so spricht man von **regulären Normalbereichen**.

**Beispiel.** Eine Kugel

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\}$$

ist ein Normalbereich bzgl. der  $xy$ -Ebene mit

$$\begin{aligned} g(x) &= -h(x) = -\sqrt{R^2 - x^2} \text{ auf } [-R, R] \\ u(x, y) &= -v(x, y) = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Weitere Beispiele für Normalbereiche sind Quader.

**Satz.** (Integration über räumliche Normalbereiche) Ist  $K$  ein räumlicher Normalbereich bezgl. der  $xy$ -Ebene und ist  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist  $f$  integrierbar über  $K$  und es gilt mit den Bezeichnungen der obigen Definition:

$$\int_K f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \int_{u(x, y)}^{v(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

**Beispiel.** Das Volumen  $V$  der Kugel  $K$  mit Radius  $R$  berechnet sich als

$$\begin{aligned} V &= \int_K 1 d(x, y, z) = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} 1 dz dy dx \\ &\stackrel{(*)}{=} 2 \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2} dy dx \\ &\stackrel{(**)}{=} \pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2-x^2} dx = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

Für die Gleichung (\*) wurde  $\int dz = z + c$  (für  $c \in \mathbb{R}$ ) und  $z \Big|_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}$  benutzt. Bei (\*\*) wurde verwendet, dass die Fläche der halben Einheitskreisscheibe  $\pi/2$  beträgt.

**Bemerkung.** Einfacher gelingt die Berechnung des Volumens mit Hilfe von Kugelkoordinaten (siehe Abschnitt 7.6.2).

## 7.5 Der Greensche Satz

Der Greensche Satz stellt eine Beziehung zwischen einem Doppelintegral über ein Gebiet und einem Wegintegral längs dessen Randkurve her. Er ist ein Spezialfall des Gaußschen Divergenzsatzes (vgl. 8.3.1); daher wird er auch "Gaußscher Integralsatz in der Ebene" genannt.

**Zur Erinnerung.** Ein Normalbereich  $K \subset \mathbb{R}^2$  heißt **regulär**, falls die berandenden Funktionen  $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $l, r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ) stetig differenzierbar sind.

Ist  $K$  ein regulärer Normalbereich, so lässt sich der Rand  $\partial K$  von  $K$  durch stetig differenzierbare Kurven parametrisieren.

**Beispiel.** Es sei  $K$   $y$ -projizierbar, also

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : g(x) \leq y \leq h(x), x \in [a, b] \right\}$$

Wir können als Parametrisierung des Randes also die Zusammensetzung der vier Kurven

$$\begin{aligned} X_1(t) &:= [t, g(t)]^T \text{ für } t \in [a, b], & X_2(t) &:= [b, t h(b) + (1-t) g(b)]^T \text{ für } t \in [0, 1] \\ X_3(t) &:= [t, h(t)]^T \text{ für } t \in [a, b], & X_4(t) &:= [a, t h(a) + (1-t) g(a)]^T \text{ für } t \in [0, 1] \end{aligned}$$

wählen. Es gibt also einen stetigen, stückweise stetig differenzierbaren Weg  $X$ , der den Rand von  $K$  **positiv orientiert** durchläuft. Dabei bedeutet positiv orientiert, dass der Rand entgegen des Uhrzeigersinns durchlaufen wird, d.h. beim Durchlaufen des Randes liegt das Gebiet immer links. Das bedeutet in diesem Falle, dass die Wege  $W_3$  und  $W_4$  zu  $X_3$  und  $X_4$  in umgekehrter Richtung durchlaufen werden müssen, das heißt

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} F dX &= \int_{W_1} F dX + \int_{W_2} F dX + \int_{-W_3} F dX + \int_{-W_4} F dX \\ &= \int_{W_1} F dX + \int_{W_2} F dX - \int_{W_3} F dX - \int_{W_4} F dX. \end{aligned}$$

**Satz (Greenscher Satz).** Es sei  $K \subset \mathbb{R}^2$  wie oben,  $F = [F_1, F_2]^T : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig differenzierbares Vektorfeld, wobei  $D \subset \mathbb{R}^2$  offene Teilmenge, die  $K$  enthält, also  $K \subset D$ . Dann gilt

$$\int_K \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x, y) = \int_{\partial K} F dX \quad (7.5.1)$$

wobei der Rand  $\partial K$  von  $K$  positiv orientiert zu durchlaufen ist.

**Beispiel.** (Berechnung der Fläche von  $K$ ) Seien  $K$  und  $X(t) = [x(t), y(t)]^T$  wie im Satz. Dann folgt für  $F(x, y) = (-y, x)^T$  aus dem Gaußschen Integralsatz:

$$\begin{aligned} \text{Fläche von } K = |K| &= \frac{1}{2} \int_K (1 - (-1)) d(x, y) \\ &= \frac{1}{2} \int_K \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x, y) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial K} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \cdot dX \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t) dt \end{aligned} \tag{7.5.2}$$

**Merkregel.** Mit  $dx(t) = \dot{x}(t) dt$  und  $dy(t) = \dot{y}(t) dt$  folgt

$$|K| = \frac{1}{2} \int_{\partial K} x dy - y dx$$

Mit dem Gaußschen Integralsatz lässt sich also der Flächeninhalt von  $K$  als Wegintegral entlang des Randes  $\partial K$  berechnen.

### Beispiele

- (i). Die Ellipse  $K$  mit Hauptachsen der Länge  $2a$  und  $2b$  für  $a, b > 0$  lässt sich schreiben als

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

Die Menge  $K$  ist ein Normalbereich und darstellbar in der Form

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : g(x) \leq y \leq h(x), x \in [-a, a] \right\}$$

mit

$$g(x) = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = -h(x).$$

Eine positiv orientierte Parametrisierung des Randes ist somit

$$X(t) = \begin{bmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

also  $\langle F(X(t)), \dot{X}(t) \rangle = ab$  und daher

$$\text{Fläche der Ellipse} = \frac{1}{2} \int_{\partial K} F dX = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab.$$

- (ii). Die in Abbildung 7.1 dargestellte **Hypozykloide**  $K$  hat die Randkurve

$$X(t) = \begin{bmatrix} (\cos t)^3 \\ (\sin t)^3 \end{bmatrix} \text{ also } \dot{X}(t) = 3 \begin{bmatrix} -\sin t (\cos t)^2 \\ \cos t (\sin t)^2 \end{bmatrix}, t \in [0, 2\pi].$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
 |K| &= \frac{1}{2} \int_{\partial K} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \cdot dX \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 3 \left( (\sin t)^4 (\cos t)^2 + (\sin t)^2 (\cos t)^4 \right) dt \\
 &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} (\sin t)^2 (\cos t)^2 dt = \frac{3}{8} \pi .
 \end{aligned}$$

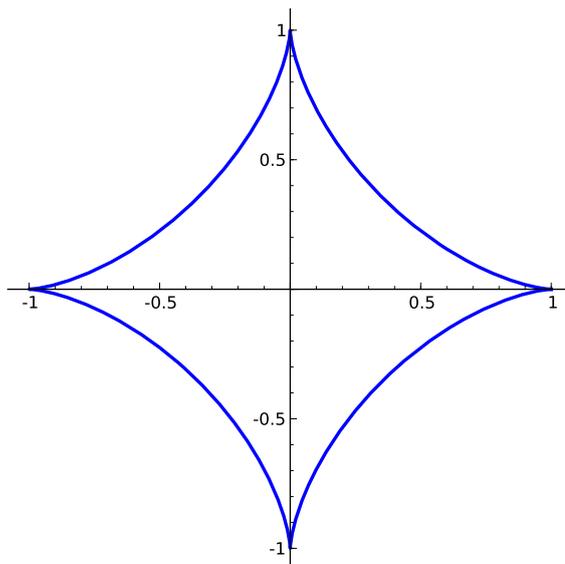


Abbildung 7.1: Hypozykloide mit Randkurve  $((\cos t)^3, (\sin t)^3)$

Ist  $X = [x, y]^T$  wie oben eine positive orientierte stetig differenzierbare Parametrisierung des Randes, so beschreibt

$$N(t) = \frac{1}{\|\dot{X}(t)\|} \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{bmatrix}$$

die (äußere) Normale an  $K$  im Punkte  $X(t)$ .

Ist dann  $\hat{F} = \begin{bmatrix} F_2 \\ -F_1 \end{bmatrix}$ , so folgt

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \operatorname{div} \hat{F}, \quad \langle \hat{F}(X(t)), N(X(t)) \rangle \|\dot{X}(t)\| = \langle F(X(t)), \dot{X}(t) \rangle$$

(mit  $\operatorname{div} \hat{F}(x, y) = \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial y}(x, y)$ ) und damit bekommt der Gaußsche Integralsatz (7.5.1) die Form

$$\int_K \operatorname{div} \hat{F}(x, y) d(x, y) = \int_{\partial K} \langle \hat{F}, N \rangle dX$$

Wir werden den Satz in dieser Form auf räumliche Bereiche im letzten Kapitel verallgemeinern; vgl. Abschnitt 8.3.1.

## 7.6 Die Substitutionsregel

Die Substitutionsregel für das eindimensionale Riemann-Integral besagt, dass

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy$$

für eine stetig differenzierbare Funktion  $g$ . Ist  $g' > 0$  (oder  $g' < 0$ )<sup>1</sup>, so können wir diese Identität auch wie folgt schreiben:

$$\int_{[a,b]} f(g(x))|g'(x)|dx = \int_{g([a,b])} f(y)dy.$$

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist eine Verallgemeinerung auf  $n$ -dimensionale Riemann-Integrale. Dabei ersetzen wir  $[a, b]$  durch eine kompakte messbare Menge  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $g$  durch eine Abbildung

$$g := \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} : U \rightarrow V$$

mit **folgenden Eigenschaften**:

- ▷  $U, V$  offen,
- ▷  $g$  ist bijektiv,
- ▷  $g$  und die Umkehrabbildung  $g^{-1} : V \rightarrow U$  sind stetig differenzierbar.

Mit  $J_g(x) = \left( \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$  bezeichnen wir die Funktionalmatrix der Abbildung  $g$ . Dann heißt die Determinante der Funktionalmatrix

$$\det J_g(x)$$

die **Funktionaldeterminante**.

**Satz (Substitutionsregel).** In der obigen Situation sei  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $K \subset V$ . Dann folgt

$$\int_K f(y_1, \dots, y_n) d(y_1, \dots, y_n) = \int_{g^{-1}(K)} f(g(x_1, \dots, x_n)) |\det J_g(x_1, \dots, x_n)| d(x_1, \dots, x_n)$$

Hierbei bezeichnet

$$g^{-1}(K) = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : g(X) \in K \right\}$$

die **Urbildmenge von  $K$**  unter der Abbildung  $g$ .

<sup>1</sup>Beachten Sie, dass hieraus folgt, dass  $g$  streng monoton, also umkehrbar ist.

### 7.6.1 Spezialfall: Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$

$$U = ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[, \quad V = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : y = 0, x \geq 0 \right\}, \quad g : U \rightarrow V, \quad \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$J_g(r, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad |\det J_g(r, \varphi)| = r$$

Ist also  $K \subset V$  kompakt, und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so folgt

$$\int_K f(x, y) d(x, y) = \int_{g^{-1}(K)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi)$$

**Beispiel.** Es sei  $K$  halbes Kreissegment mit innerem Radius  $R_1$  und äußerem Radius  $R_2$ . In Polarkoordinaten gilt

$$g^{-1}(K) = \left\{ \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} : R_1 \leq r \leq R_2, \varphi \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right] \right\} = [R_1, R_2] \times \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right]$$

Folglich ist

$$\int_{g^{-1}(K)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi) = \int_{R_1}^{R_2} \left( \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi \right) r dr$$

Etwa  $f(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ , also

$$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = e^{-\frac{r^2}{2}}$$

ergibt

$$\int_{g^{-1}(K)} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} d(x, y) = \int_{R_1}^{R_2} \pi e^{-\frac{r^2}{2}} r dr = \pi \left( e^{-\frac{R_1^2}{2}} - e^{-\frac{R_2^2}{2}} \right)$$

### 7.6.2 Spezialfall: Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^3$

Betrachte die Menge  $U = ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[ \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  und die Abbildung

$$g(r, \varphi, \theta) = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \theta \end{bmatrix}$$

#### Geometrische Deutung der Variablen

- ▷  $r$  = Länge des Ortsvektors  $\vec{P}$  zu  $P$
- ▷  $\theta$  = Winkel von  $\vec{P}$  mit der  $(x, y)$ -Ebene ("geographische Breite")
- ▷  $\varphi$  = Winkel von der Projektion von  $\vec{P}$  auf die  $(x, y)$ -Ebene mit der  $x$ -Achse ("geographische Länge")

Die Abbildung  $g$  ist eine Bijektion auf die Menge  $V = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : y = 0, x \geq 0 \right\}$

Es gilt

$$J_g(r, \varphi, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} |\det J_g(r, \varphi, \theta)| &= |r^2(\cos \varphi)^2(\cos \theta)^3 + r^2(\sin \varphi)^2(\sin \theta)^2 \cos \theta \\ &\quad + r^2(\cos \varphi)^2(\sin \theta)^2 \cos \theta + r^2(\sin \varphi)^2(\cos \theta)^3| \\ &= r^2 \cos \theta. \end{aligned}$$

Ist also  $K \subset V$  kompakt und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so folgt

$$\int_K f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{g^{-1}(K)} f(r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta) r^2 \cos \theta d(r, \varphi, \theta)$$

**Beispiel 7.6.1.** Die Menge  $K$  sei eine halbe Kugelschale mit innerem Radius  $R_1$  und äußerem Radius  $R_2$ . In Kugelkoordinaten gilt:

$$\begin{aligned} g^{-1}(K) &= \left\{ \begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{bmatrix} : R_1 \leq r \leq R_2, \varphi \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right], \theta \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right\} \\ &= [R_1, R_2] \times \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right] \times \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \end{aligned}$$

Zwar liegt  $g^{-1}(K)$  nicht ganz in  $U$ , die Ausnahmemenge  $g^{-1}(K) \setminus U$  ist aber eine Nullmenge und somit ändert sich der Wert des Integrals nicht. Für eine stetige Funktion  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  ergibt sich aufgrund der Substitutionsregel:

$$\begin{aligned} &\int_K f(x, y, z) d(x, y, z) \\ &= \int_{g^{-1}(K)} f(r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta) r^2 \cos \theta d(r, \varphi, \theta) \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \left( \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta d\theta \right) d\varphi \right) r^2 dr \end{aligned}$$

Für das Volumen ergibt sich etwa (per Integration von  $1_K$ ).

$$V = \int_{R_1}^{R_2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta d\varphi r^2 dr = \frac{2}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)$$

Für das Volumen der Hohlkugel erhält man entsprechend

$$V = \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3).$$

Für  $R_1 = 0$  erhält man hieraus als Spezialfall das Volumen der Kugel mit Radius  $R$ :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

### 7.6.3 Spezialfall: Zylinderkoordinaten in $\mathbb{R}^3$

Betrachte die Menge  $U = ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R}$ .

Die Abbildung

$$g(r, \varphi, z) = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{bmatrix}$$

ist eine Bijektion auf die Menge

$$V = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : y = 0, x \geq 0 \right\}$$

In Zylinderkoordinaten kann ein Zylinder  $Z$  mit Radius  $R$  und Höhe  $H$  also ganz einfach beschrieben werden als Menge

$$Z = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, H].$$

Für die Funktionalmatrix gilt

$$J_g(r, \varphi, z) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und für die Funktionaldeterminante erhält man

$$|\det J_g(r, \varphi, z)| = r.$$

Für eine stetige Funktion  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $K \subset V$  kompakt, ergibt sich

$$\int_K f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{g^{-1}(K)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r d(r, \varphi, z).$$

### 7.6.4 Weitere Beispiele

**Vollzylinder**  $K$  sei ein Ausschnitt mit Öffnungswinkel  $\varphi_0$  aus einem Hohlzylinder der Höhe  $H$  mit innerem Radius  $R_1$  und äußerem Radius  $R_2$ , also in Zylinderkoordinaten

$$g^{-1}(K) = [R_1, R_2] \times [0, \varphi_0] \times [0, H].$$

Für die Ausnahmemenge  $g^{-1}(K) \setminus U$  gilt dieselbe Bemerkung wie im letzten Beispiel 7.6.1.

Für das Volumen des Zylinderausschnitts erhält man etwa

$$V = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{\varphi_0} \int_0^H r dz d\varphi dr = \frac{1}{2} (R_2^2 - R_1^2) \varphi_0 H.$$

Für  $R_1 = 0$ ,  $\varphi_0 = 2\pi$  bekommt man als Spezialfall das Volumen des Vollzylinders mit Radius  $R$  und Höhe  $H$

$$V = \pi R^2 H.$$

**Rotationskörper.** Gegeben sei eine stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty[$ . Durch Drehung des Funktionsgraphen von  $f$  um die  $x$ -Achse erhält man einen **Rotationskörper  $K$** .  $f$  heißt die **Kontur** des Rotationskörpers. Als Punktmenge ist  $K$  gegeben durch

$$K = \{[x, y, z]^T : x \in [a, b], y^2 + z^2 \leq f(x)^2\} .$$

Zur Beschreibung von Rotationskörpern eignen sich die folgenden Zylinderkoordinaten ganz besonders:

$$g(x, r, \varphi) = [x, r \cos \varphi, r \sin \varphi]^T .$$

In diesen Koordinaten ist der Rotationskörper  $K$  nämlich gegeben durch

$$g^{-1}(K) = \{[x, r, \varphi]^T : x \in [a, b], r \in [0, f(x)], \varphi \in [0, 2\pi]\} .$$

Hält man den Winkel  $\varphi$  fest, etwa  $\varphi = \varphi_0$ , so erhält man als Menge aller Punkte aus  $g^{-1}(K)$  mit diesem Winkel die Menge

$$g^{-1}(K)_{\varphi_0} = \{[x, r, \varphi_0]^T : x \in [a, b], r \in [0, f(x)]\}$$

und diese ist ein Normalbereich ( $r$ -projizierbar). Es folgt

$$\int_{g^{-1}(K)_{\varphi_0}} r d(x, r) = \int_a^b \int_0^{f(x)} r dr dx = \frac{1}{2} \int_a^b (f(x))^2 dx .$$

Integriert man schließlich noch über alle Winkel  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , so erhält man das Volumen  $V$  des Rotationskörpers:

$$\begin{aligned} V &= \int_K 1_K(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{g^{-1}(K)} \underbrace{\det J_g(x, r, \varphi)}_{=r} d(x, r, \varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_{g^{-1}(K)_{\varphi}} r d(x, r) \right) d\varphi = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx . \end{aligned}$$

Das Volumen  $V$  des Rotationskörpers mit Kontur  $f$  beträgt also

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx .$$

**Kreiskegel.** Ein Kreiskegel der Höhe  $h$  und Grundfläche mit Radius  $r$  besitzt die Kontur  $f(x) = \frac{r}{h}x$  auf  $[0, h]$ . Als Volumen ergibt sich

$$V = \pi \int_0^h \left( \frac{r}{h}x \right)^2 dx = \pi r^2 \frac{h}{3} .$$

**Kühlturm.** Der Rotationskörper zur Kontur  $f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  auf  $[-1, 1]$  hat die Form eines Kühlturmes. Als Volumen errechnet man

$$V = \pi \int_{-1}^1 (\cosh(x))^2 dx = \pi \int_{-1}^1 \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2) dx = \pi \left(1 + \frac{1}{4}(e^2 - e^{-2})\right) .$$

Statt einer Kontur können wir auch ganze Flächen  $F$  um die  $x$ -Achse rotieren lassen. Für das Volumen  $V$  des so entstandenen Rotationskörpers gilt die Formel:

$$V = 2\pi r_0 |F|.$$

Hierbei bezeichnet  $r_0$  den Abstand des Schwerpunktes von  $F$  zur Drehachse, also

$$r_0 = \frac{1}{|F|} \int_F y d(x, y).$$

**Torus (oder Vollslauch, Reifen).** Der Torus entsteht durch Rotation eines Kreises. Es sei  $r$  der Radius dieses Kreises, also  $|F| = \pi r^2$ , und der Mittelpunkt liege in der  $xy$ -Ebene und habe die Koordinaten  $[0, R, 0]^T$ . Da dieser mit dem Schwerpunkt des Kreises übereinstimmt, beträgt der Abstand  $r_0$  des Schwerpunktes zur  $x$ -Achse  $r_0 = R$ , also

$$V = 2\pi^2 r^2 R.$$



# Kapitel 8

## Vektoranalysis

### 8.1 Divergenz und Rotation

Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $F = [F_1, \dots, F_n]^T$  sei stetig differenzierbares Vektorfeld. Unter der **Divergenz des Vektorfeldes**  $F$  versteht man den Ausdruck

$$\operatorname{div} F(X) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(X), \quad X \in D.$$

Es sei  $D \subset \mathbb{R}^3$  offen und  $F = [F_1, F_2, F_3]^T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig differenzierbar. Unter der **Rotation des Vektorfeldes**  $F$  versteht man den Ausdruck

$$\operatorname{rot} F(X) := \begin{bmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(X) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(X) \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(X) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(X) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(X) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(X) \end{bmatrix}.$$

#### Merkhilfen

$$\operatorname{div} F(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} F_1(X) \\ \vdots \\ F_n(X) \end{bmatrix} \quad \operatorname{rot} F(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_1(X) \\ F_2(X) \\ F_3(X) \end{bmatrix}$$

Man beachte, dass  $\operatorname{rot} F = 0$  äquivalent ist zur Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

(siehe (6.3.2)). Insbesondere ist die Rotation eines Gradientenfeldes  $F = \operatorname{grad} \varphi$  einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion  $\varphi$  gleich 0. In diesem Sinne misst  $\operatorname{rot} F$  die Abweichung des Vektorfeldes  $F$  von einem Gradientenfeld.

**Geometrische Bedeutung der Rotation.** Eine starre Drehung um die durch einen Richtungsvektor  $\vec{a}$  beschriebene Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  wird beschrieben durch die Abbildung

$$F : x \longmapsto \omega a \times x = \omega \begin{bmatrix} a_2 x_3 - a_3 x_2 \\ a_3 x_1 - a_1 x_3 \\ a_1 x_2 - a_2 x_1 \end{bmatrix}.$$

Die zugehörige Abbildungsmatrix lautet also

$$A = \omega \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

und diese Matrix ist schiefssymmetrisch:  $A^T = -A$ .

Es sei nun  $F = [F_1, F_2, F_3]^T$  ein beliebiges differenzierbares Vektorfeld. Zu gegebenem Punkt  $X_0$  ist dann die lineare Approximation von  $F$  in  $X_0$  gegeben durch

$$X \mapsto X_0 + J_F(X_0)(X - X_0).$$

Beachte nun, dass

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(X_0) \times (X - X_0) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} & 0 \end{bmatrix} (X - X_0) \\ &= (J_F(X_0) - J_F(X_0)^T)(X - X_0). \end{aligned}$$

$\operatorname{rot} F(X_0)$  beschreibt also den schiefssymmetrischen Anteil der linearen Approximation des Vektorfeldes  $F$  in  $X_0$ . Diesen können wir als starre Drehung um die durch  $\operatorname{rot} F(X_0)$  beschriebene Achse auffassen.

### Bemerkungen

(i). **Laplace-Operator** Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  zweimal stetig differenzierbar, so folgt

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(X)) = \operatorname{div} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) \end{bmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(X) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(X)$$

Die Zuordnung  $f \mapsto \operatorname{div}(\operatorname{grad} f(X))$  heißt Laplace-Operator. Statt  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(X))$  schreibt man auch  $\Delta f(X)$ .

(ii). Ist  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Gradientenfeld, also  $F(X) = \operatorname{grad} f(X)$  für eine Funktion  $f$ , und ist  $f$  zweimal stetig differenzierbar, so folgt aus der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen von  $f$

$$\operatorname{rot} F(X) = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f(X)) = 0.$$

**Es gilt also:** Jedes stetig differenzierbare Potentialfeld hat Rotation 0.

(iii). Ist  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  zweimal stetig differenzierbar, so folgt

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F(X)) = 0.$$

## 8.2 Integration über Flächen

**Definition.** Es sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  offen und die abgeschlossene Hülle  $\bar{D} := D \cup \partial D$  sei messbar und kompakt. Es sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  offen,  $\bar{D} \subset G$ , und

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$$

sei stetig differenzierbar und die Matrix

$$J_F(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(X) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(X) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(X) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(X) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x}(X) & \frac{\partial F_3}{\partial y}(X) \end{bmatrix}$$

habe für alle  $X = [x, y]^T \in \bar{D}$  vollen Rang (d.h. Rang 2, d.h. die Spaltenvektoren sind linear unabhängig).

Dann heißt  $F$  **reguläre Fläche (über  $\bar{D}$ )** und die Punktmenge

$$\mathcal{F} := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1 = F_1(X), x_2 = F_2(X), x_3 = F_3(X) \text{ für ein } X \in \bar{D} \right\}$$

heißt **reguläres Flächenstück**.

**Beispiel 8.2.1.** Kugeloberfläche im  $\mathbb{R}^3$

$$F(X) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{bmatrix} \text{ auf } G = \{X : \|X\| < R\}$$

ist stetig differenzierbar und

$$J_F(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{bmatrix}$$

hat für alle  $X \in G$  vollen Rang. Es sei  $D = \{X : \|X\| < R - \varepsilon\}$  für ein  $\varepsilon \in ]0, R[$ , also  $\bar{D} = \{X : \|X\| \leq R - \varepsilon\}$ . Dann ist

$$F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

eine reguläre Fläche.

Es sei  $F$  eine reguläre Fläche über  $\bar{D}$ . Für  $X \in \bar{D}$  heißt die durch die Vektoren

$$F_x(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(X) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(X) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x}(X) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad F_y(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(X) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(X) \\ \frac{\partial F_3}{\partial y}(X) \end{bmatrix}$$

aufgespannte Ebene

$$T(X) : F(X) + \lambda F_x(X) + \mu F_y(X), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

**Tangentialebene** an die Fläche  $F$  im Punkte  $X$ . Der hierzu orthogonale Vektor

$$N(X) := \frac{1}{\|F_x(X) \times F_y(X)\|} F_x(X) \times F_y(X), \quad X \in \bar{D}$$

heißt **Normalenvektor** an die Fläche  $F$  im Punkte  $X$ .

**Beispiel 8.2.2.** In der Situation des Beispiels 8.2.1 ist

$$F_x(X) \times F_y(X) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

also

$$N(X) = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sqrt{R^2-x^2-y^2} \end{bmatrix}.$$

Die Tangentialebene  $T(X)$  im Punkte  $X$  wird durch die Vektoren  $F_x(X)$  und  $F_y(X)$  aufgespannt. Der Flächeninhalt des von  $F_x(X)$  und  $F_y(X)$  aufgespannten Parallelogramms ist gerade  $\|F_x(X) \times F_y(X)\|$ . Dies motiviert:

**Definition.** Es sei  $F$  reguläre Fläche über  $\bar{D}$ ,

$$H : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{stetig.}$$

Dann heißt

$$\int_{\bar{D}} H(F(x, y)) \|F_x(x, y) \times F_y(x, y)\| d(x, y) =: \int_{\mathcal{F}} H d\sigma$$

das **Oberflächenintegral** von  $H$  über der Fläche  $F$ .

Insbesondere heißt

$$\int_{\mathcal{F}} d\sigma = \int_{\bar{D}} \|F_x(x, y) \times F_y(x, y)\| d(x, y)$$

der **Flächeninhalt** der Fläche  $F$ .

**Beispiel 8.2.3.** In der Situation des Beispiels 8.2.1 ist

$$\|F_x(X) \times F_y(X)\|^2 = \frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2} + 1 = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Für die Oberfläche der Halbkugel  $\mathcal{F}$  ergibt sich damit

$$\int_{\mathcal{F}} d\sigma = \int_G \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} d(x, y)$$

mit  $G = \{[x, y]^T : x^2 + y^2 < R^2\}$ . Zur Berechnung des Integrals auf der rechten Seite wählen wir Polarkoordinaten im  $\mathbb{R}^2$ :

$$g(r, \varphi) = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix},$$

also  $g^{-1}(G) = ]0, R[ \times ]0, 2\pi[$ , und damit

$$\begin{aligned} \int_G \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} d(x, y) &= \int_{g^{-1}(G)} \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r d(r, \varphi) \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{rR}{\sqrt{R^2 - r^2}}}_{= -\frac{d}{dr} R\sqrt{R^2 - r^2}} d\varphi dr = 2\pi R^2. \end{aligned}$$

Die Oberfläche der Halbkugel mit Radius  $R$  beträgt somit  $2\pi R^2$  und die Oberfläche der Kugel mit Radius  $R$  somit  $4\pi R^2$ .

## 8.3 Integralsätze

Die folgenden Aussagen lassen sich verstehen als dreidimensionale Varianten des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ( $n = 1$ ) bzw. des Greenschen Satzes ( $n = 2$ ; vgl. Abschnitt 7.5). In allen Fällen geht es um die Gleichheit von zwei Integralausdrücken, bei denen auf der einen Seite ein Integral über eine kompakte Menge steht und auf der anderen Seite ein Integral über dessen Rand.

### 8.3.1 Gaußscher Divergenzsatz

**Satz (Gaußscher Divergenz- oder Integralsatz).** Es sei  $K \subset \mathbb{R}^3$  ein regulärer Normalbereich,  $K \subset G$ ,  $G$  offen,  $H : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig differenzierbares Vektorfeld und  $N : \partial K \rightarrow \mathbb{R}^3$  äußere Normale des Randes  $\partial K$ , so gilt

$$\int_K \operatorname{div} H d(x, y, z) = \int_{\partial K} \langle H, N \rangle d\sigma.$$

**Beispiel 8.3.1.** (i). Wir berechnen den Fluss  $\int_{\partial K} \langle H, N \rangle d\sigma$  des Vektorfeldes

$$H(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2z \\ x + y \\ 0 \end{bmatrix}$$

durch die Oberfläche der Kugel

$$K : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$$

Nach dem Gaußschen Divergenzsatz gilt

$$\int_{\partial K} \langle H, N \rangle d\sigma = \int_K \operatorname{div} H d(x, y, z) = \int_K 1 d(x, y, z) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

(siehe Beispiel 7.6.1).

(ii). Zu berechnen ist der Fluss  $\int_{\partial K} \langle H, N \rangle d\sigma$  des Vektorfeldes

$$H(x, y, z) = \begin{bmatrix} xy^2 \\ x^2y \\ y \end{bmatrix}$$

durch die Oberfläche des Zylinderausschnitts

$$K : x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1.$$

Nach dem Gaußschen Divergenzsatz gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \langle H, N \rangle d\sigma &= \int_K \operatorname{div} H d(x, y, z) \\ &= \int_K (y^2 + x^2) d(x, y, z) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 r^2 r dr d\varphi dz = \pi. \end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Gleichheit Zylinderkoordinaten eingesetzt haben (siehe Beispiel 7.6.4).

**Zur geometrischen Interpretation des Gaußschen Divergenzsatzes.** Das Oberflächenintegral  $\int_{\partial K} \langle H, N \rangle d\sigma$  beschreibt den mittleren Fluss des Vektorfeldes  $H$  durch die Oberfläche  $\partial K$  von  $K$  (von innen nach außen). Beschreibt  $H$  das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeitsströmung, so gilt

$$\begin{aligned} \langle H(X), N(X) \rangle d\sigma(X) &= \langle H(X), \frac{F_x(X) \times F_y(X)}{\|F_x(X) \times F_y(X)\|} \rangle \|F_x(X) \times F_y(X)\| d(x, y) \\ &= \underbrace{\langle H(X), F_x(X) \times F_y(X) \rangle}_{\text{Spatprodukt von } H(X), F_x(X), F_y(X)} d\sigma(X). \end{aligned}$$

Zur Erinnerung: Das Spatprodukt von  $H(X), F_x(X), F_y(X)$  ist gerade das Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds. Also beschreibt  $\langle H(X), N(X) \rangle d\sigma(X)$  das Volumen derjenigen Flüssigkeit, die durch das Oberflächenelement  $d\sigma$  strömt und damit

$$\int_{\partial K} \langle H, N \rangle d\sigma$$

das Gesamtvolumen der durch die Oberfläche strömenden Flüssigkeitsmenge. Nach dem Gaußschen Divergenzsatz ist diese Menge gleich dem Integral

$$\int_K \operatorname{div} H d(x, y, z)$$

über die Divergenz von  $H$ . Für jede ganz in  $K$  liegende Kugel  $K_r(X)$  mit Mittelpunkt  $X$  und Radius  $r$  gilt insbesondere

$$\int_{K_r(X)} \operatorname{div} H d(x, y, z) = \int_{\partial K_r(X)} \langle H, N \rangle d\sigma$$

und für kleine Radien wird gelten

$$\int_{K_r(X)} \operatorname{div} H \, d(x, y, z) \sim \operatorname{div} H(X) \cdot |K_r(X)|,$$

also

$$\operatorname{div} H(X) \sim \frac{1}{|K_r(X)|} \int_{\partial K_r(X)} \langle H, N \rangle \, d\sigma.$$

Damit wird deutlich: die Divergenz von  $H$  misst den aus einer Volumeneinheit austretenden Fluss. Deshalb heißt  $\operatorname{div} H(X)$  auch die **Quelldichte**. Punkte  $X$  mit

▷  $\operatorname{div} H(X) > 0$  heißen **Quellen**

▷  $\operatorname{div} H(X) < 0$  heißen **Senken**.

$H$  heißt **quellenfrei**, wenn  $\operatorname{div} H(X) = 0$  für alle  $X$ .

**Illustrationen.** In einer Kugel  $K_R$  betrachten wir die Geschwindigkeitsfelder zweier Flüssigkeiten:

(i). **Gleichförmiger Durchfluss**

$$H(x, y, z) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \text{ also } \operatorname{div} H = 0$$

und daher  $\int_{K_R} \operatorname{div} H \, d(x, y, z) = 0$ . Für das Oberflächenintegral gilt andererseits:

$$\int_{\partial K_R} \langle H, N \rangle \, d\sigma = \int_G \langle v, F_x \times F_y(x, y) \rangle \, d(x, y) + \int_G \langle v, \hat{F}_x \times \hat{F}_y(x, y) \rangle \, d(x, y) = 0$$

(siehe Beispiel 8.2.1). Hierbei bezeichnet  $\hat{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{bmatrix}$  die Oberfläche der unteren Halbkugel.

(ii). **Geschwindigkeitsfeld mit Quelle**

$$H(x, y, z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \operatorname{div} H(x, y, z) = 3, \text{ also}$$

$$\int_{K_R} \operatorname{div} H \, d(x, y, z) = 3|K_R| = 3 \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi R^3.$$

Andererseits

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_R} \langle H, N \rangle \, d\sigma &= 2 \int_G \underbrace{\langle F, F_x \times F_y \rangle}_{= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} + \sqrt{R^2-x^2-y^2}}(x, y) \, d(x, y) \\ &= 2 \int_G \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \, d(x, y) = 2R \cdot 2\pi R^2. \end{aligned}$$

### 8.3.2 Stokesscher Integralsatz

**Satz.** Es sei  $F : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre Fläche über  $\bar{D}$ ,  $\bar{D} \subset G$ ,  $G$  offen.  $F$  sei zweimal stetig differenzierbar,  $\bar{D}$  sei ein Normalbereich und  $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine positiv orientierte stetig differenzierbare Parametrisierung des Randes  $\partial\bar{D}$ . Dann ist  $Y(t) = F(X(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , eine positiv orientierte Parametrisierung des Randes  $\partial\mathcal{F}$  von  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ . Es sei  $H : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit  $\mathcal{F} \subset U$ . Dann gilt

$$\int_{\mathcal{F}} \langle \text{rot } H, N \rangle d\sigma = \int_{\partial\mathcal{F}} H dY .$$

**Beispiel 8.3.2.** Es sei  $R > 0$  und

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{bmatrix}, \quad [x, y]^T \in D := \{X \in \mathbb{R}^2 : \|X\| < R\}$$

die Fläche, die die Oberfläche der oberen Halbkugel mit Radius  $R$  beschreibt, also  $N(x, y) = \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ . Desweiteren sei  $H(x, y, z) = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$ , also  $\text{rot } H(x, y, z) = [0, 0, 2]^T$ , und damit

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} \langle \text{rot } H, N \rangle d\sigma &= \int_{\mathcal{F}} 2N_3 d\sigma = \int_D 2 \frac{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} d(x, y) \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} 2r dr d\varphi = 2\pi R^2 . \end{aligned}$$

Andererseits können wir  $\partial\bar{D}$  durch die Kurve

$$X(t) = R \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

parametrisieren, also folgt für die Kurve

$$Y(t) = F(X(t)) = \begin{bmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

dass

$$\int_{\partial\mathcal{F}} H dY = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{bmatrix} dt = 2\pi R^2 .$$

**Zur geometrischen Interpretation des Stokesschen Integralsatzes.** Das Wegintegral  $\int_{\partial\mathcal{F}} H dY$  beschreibt die Zirkulation des Vektorfeldes entlang des Randes von  $\mathcal{F}$ . Analog zum Gaußschen Integralsatz ergibt sich für jedes kreisförmige Teilstück  $S_r(X)$  der Fläche um einen Flächenpunkt  $X$ :

$$\int_{S_r(X)} \langle \text{rot } H, N \rangle d\sigma = \int_{\partial S_r(X)} H dY$$

und für kleine Radien  $r$  wird gelten

$$\int_{S_r(X)} \langle \operatorname{rot} H, N \rangle d\sigma \sim \langle \operatorname{rot} H(X), N(X) \rangle |S_r(X)|$$

also

$$\langle \operatorname{rot} H(X), N(X) \rangle \sim \frac{1}{|S_r(X)|} \int_{\partial S_r(X)} H dY .$$

Hiermit wird deutlich:  $\langle \operatorname{rot} H, N \rangle$  misst die Zirkulation pro Flächeneinheit und heißt entsprechend **Wirbelstärke von  $H$  um  $N$** .