

§ 0 Einleitung

(1) Organisation

a) VL 4+2, Assistent: Benjamin Astarf

Di $9^{50} - 11^{30}$, S2/15 51

Mi $14^{25} - 16^{05}$, S2/04 213

UE

b) Ankündigungen etc.

www ... / ~ jährlich

c) Literatur

- Matoušek & Nešetřil:

Diskrete Mathematik, Springer 2002

- Aigner: Diskrete Mathematik,

Vieweg 6 2006

- ...

(2) Was ist "Diskrete Mathematik"?

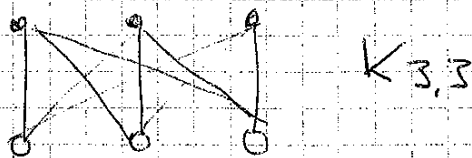
a) Definitionsversuche:

- "diskret" \leftrightarrow "kontinuierlich"
↑
Mathematik in diskreter Objekte,
... der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- Mathematik dessen, was ein
(klassischer) Computer berechnen kann.
↕
Quantencomputer
In diesem Sinn: "diskret" = "präalgorithmisch"
- hier in etwa:
Kombinatorik + Graphentheorie
aufbauend auf Alg. Dir. Math.

b) Probleme aus der diskreten Mathematik:

1) 3 Häuser und 3 Brunnen

- Graphen zur Modellierung
- ~~Graphen~~ (planare) Einbettungen



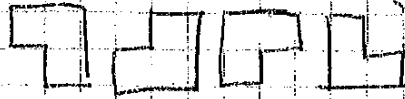
- Torusenbettung von $K_{3,3}$ möglich
- Jordanscher Kurvenatz

↑ Topologie

~~ii)~~ Satz Jedes $(2^m \times 2^m)$ -Schachbrett, aus dem ein beliebiges Feld entfernt wurde, lässt sich ohne Lücken oder Überlappungen mit L-förmigen Stein belegen, die jeweils drei Felder bedecken. [MN, 1.3.6]

Bew per Induktion nach n :

- Induktionsanfang $n=1$



○ Die Behauptung ist richtig für alle modifizierten Schachbretter der Größe $2^n \times 2^n$.

Betrachte ein $(2^{n+1} \times 2^{n+1})$ Schachbrett, dem ein Feld entfernt wurde.

Das Schachbrett zerfällt in vier Quadranten, die ~~ebenfalls~~ selbst Schachbretter der Größe $2^n \times 2^n$ sind. Platziere ein

○ ~~ein~~ L-förmigen Stein auf den mittleren vier Feldern, so dass der Quadrant mit dem entfernten Feld ausgelassen wird. Die Behauptung folgt dann durch Induktion. □

Kor $2^{2n} \equiv 1 \pmod{3}$

Bem $n=0$.

iii)

Auf wieviele Arten kann man
10 Cent aus 1, 2, 5-Cent-Stücken
stückeln?

Fall 1: $2 \times 5 \text{ Cent} \Rightarrow 0 \times 1 \text{ Cent}$
und $0 \times 2 \text{ Cent}$

Fall 2: $1 \times 5 \text{ Cent} \Rightarrow$
 $y \times 2 \text{ Cent}$ und $(5-2y) \times 1 \text{ Cent}$
 $y \in \{0, 1, 2\}$

Fall 3: $0 \times 5 \text{ Cent} \Rightarrow$
 $y \times 2 \text{ Cent}$ und $(10-2y) \times 1 \text{ Cent}$
 $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

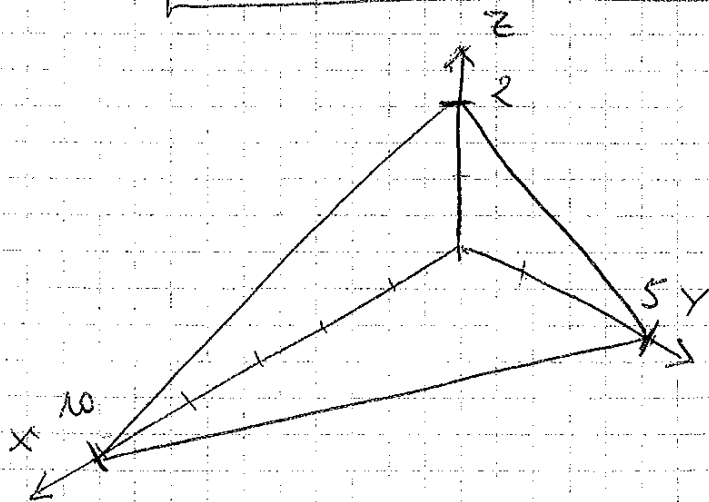
Insgesamt $1 + 3 + 6 = 10$ Fälle.

x : # 1-Cent-Stücke

y : # 2-Cent-Stücke

z : # 5-Cent-Stücke

$\Rightarrow x, y, z \geq 0 \ \& \ x + 2y + 5z = 10$



Lösungsmenge
Polyeder bzw.
Polytop.

• Gitterpunkte

(3) Voraussetzungen aus der
Alg. Dirkr. Math.

- Graphen
- Bäume, Entscheidungsbäume
- Komplexität.

(4) Inhalt (Skizze)

○

- Zählen
 - doppeltes Abzählen
 - erzeugende Funktionen

- Planare Graphen

- Sperner-Lemma

○

- Triangulierungen konvexer
n-Ecke

- Matroide

- ...

§ 1 Zähltheorie

$$\boxed{\emptyset \in \mathbb{N}}$$

(1) Elementars ~~Mathematik~~.

a) Def. $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$
Not. $[0] = \emptyset$.

• M, N Mengen

$M^N := \{f : M \rightarrow N\}$ Menge aller
Abbildungen
von M nach N

• M Menge, $\#M :=$ Kardinalität von M

b) LEM M, N endliche Mengen

$$\Rightarrow \#M^N = (\#M)^{(\#N)}$$

Bem Insbesondere gilt für $N = \emptyset$:

$$\#M^\emptyset = (\#M)^\emptyset = 1 \text{ und}$$

$$M^\emptyset = \{\emptyset\}.$$

c) LEM M endliche Menge

$\Rightarrow M$ besitzt $2^{(\#M)}$ Teilmengen

Bem Potenzmenge von M

$$\stackrel{\uparrow}{=} [2]^M =: 2^M$$

Def M heißt n -Menge, falls $\#M = n$.

d) Lem Sei $n \geq 1$. Jede n -Menge hat

genau 2^{n-1} Teilmengen mit ungerade
vielen Elementen und 2^{n-1} Teilmengen
mit gerade vielen Elementen.

Bew. Sei M eine n -Menge und $x \in M$.

Sei $A \subseteq M$. Definiere $A' \subseteq M$ wie folgt:

$$A' := \begin{cases} A, & \text{falls } \#A \text{ ungerade} \\ A \cup \{x\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

→ $\#A'$ ungerade, und jede Teilmenge
von M mit ungerade vielen Elementen
entsteht so.

⇒ $f: 2^{M \setminus \{x\}} \rightarrow \mathcal{U} := \{N \subseteq M \mid \#N \text{ ungerade}\}$
bijektiv

$$\Rightarrow \#\mathcal{U} = \#(2^{M \setminus \{x\}}) = 2^{\#(M \setminus \{x\})} = 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow \#\{N \subseteq M \mid \#N \text{ gerade}\} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1} \quad \square$$

e) Lem Sei $n, m \geq 0$. Dann gibt es

$$\text{genau } \prod_{i=0}^{n-1} (m-i)$$

injektive Abbildungen aus einer gegebenen
 n -Menge in eine gegebene m -Menge.

Bew.

□

(2) Permutationen

Für eine (endliche) Menge X setzen
wir $\text{Sym}(X) := \{ f: X \rightarrow X \mid f \text{ bijektiv} \}$

Für $X = [n]$ lässt sich $\sigma \in \text{Sym}([n])$
schreiben als $=: \text{Sym}(n)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

oder kurz:

$$(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$$

oder (am besten) in Zykel schreiben

z.B.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad n=6$$

↓

○
$$(2, 1, 4, 5, 3, 6)$$

↓

$$(12)(345)(6)$$

Es gilt: $\# \text{Sym}(n) = \prod_{i=0}^{n-1} (n-i) =: n! = \prod_{j=1}^n j$

Bem. • Beachte

$$\text{Sym}(\emptyset) = \{ \emptyset \} \text{ und } \emptyset! = \prod_{j=1}^{\emptyset} j = 1$$

• $(\text{Sym}(X), \circ)$ heißt Symmetrische
Abbildung \uparrow Gruppe auf

(3) Binomialkoeffizienten

a) Def. Sei $z \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$.

$$\binom{z}{k} := \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (z-i)}{k!}$$

• Für $n \in \mathbb{N}$ heißt

$$\binom{n}{k} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (n-i)}{k!} = \frac{n!}{k! (n-k)!} \quad \text{Binomialkoeffizient}$$

• Sei X eine Menge und $k \in \mathbb{N}$:
für $k \leq n$, sonst $\binom{n}{k} = 0$.

$$\binom{X}{k} := \{Y \subseteq X \mid \#Y = k\}$$

b) LEM Sei X eine endliche Menge, $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \# \binom{X}{k} = \binom{\#X}{k}$$

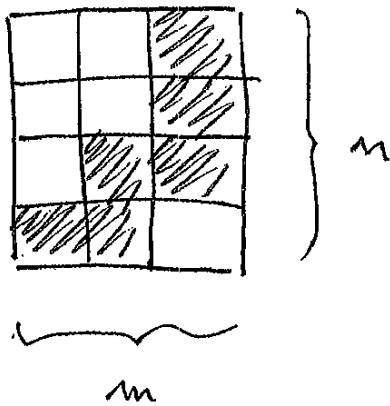
Bew. Menge der geordneten k -Tupel von Elementen aus X = Menge der injektiven

Abbildungen von $[k]$ nach X

$$\Rightarrow \# \binom{X}{k} = \frac{\#\{\text{inj. Tupel in } X\}}{k!} = \binom{\#X}{k}. \quad \square$$

Zus Es gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

c) Betrachte $(m \times n)$. Schachbrett und



alle Pfade auf ein.
anderfolgende Felder
von unten links
nach oben rechts,
die nur nach oben
oder nach rechts
gehen (mit Zurück).

Def. Ein Pfad heißt Treppe ("staircases")

- Jede Treppe definiert eine Folge von Schritten nach oben (O) oder rechts (R).

R O R O O

mit genau $(m-1)$ R und $(n-1)$ O.

- Umgekehrt definiert jede Folge mit genau $(m-1)$ R und $(n-1)$ O eine Treppe

Def. Eine Folge heißt Mischung ("shuffle").

Satz Die Anzahl der Treppen auf einem

$(m \times n)$ -Schachbrett beträgt $\binom{m+n-2}{m-1} = \binom{m+n-2}{n-1}$

Bew. Jede RO-Mischung der Länge

$(m-1) + (n-1)$ mit genau $(m-1)$ R

beträgt $\binom{m+n-2}{m-1}$. \square

d) Binomialatz Für $n \geq 0$ gilt

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

↳ verwende
 $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$
 im induktiven
 Beweis \rightarrow

[als Gleichung in $\mathbb{R}[x]$]

Wichtige Korollare:

• $x=1 \Rightarrow 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

• $x=-1 \Rightarrow 0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$
 & $n \geq 1$

○

e) Lemma $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

Bew Sei X eine $2n$ -Menge, von denen
 je n rot bzw. blau gefärbt werden.

Jede n -elementige Teilmenge von X
 enthält samt k rote und $n-k$ blaue

○

Elemente für ein $k \in \{0, \dots, n\}$.

Also $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ \square

f) Frage: Wie viele verschiedene Wörter (die
 keine sein dürfen) kann man
 aus den ~~Wort~~ Buchstaben des Wortes

MISSISSIPPI

bilden?

Antwort: $\frac{11!}{4!4!2!1!} = 34650$

Def Für $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ mit $k_1 + \dots + k_m = n$ heißt

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} := \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$$

Multinomialkoeffizient

○

Bem Der gewöhnliche Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ tritt auf als Multinomialkoeff. $\binom{n}{k, n-k}$.

Multinomialatz Für $n \geq 1$ gilt

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = n \\ k_1, \dots, k_m \geq 0}} \binom{n}{k_1, \dots, k_m} x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}$$

○

als Gleichung in $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$,

Bew (UA)

Bsp Koeffizient von $x^4 y^4 z^2 w$ in

$$(x+y+z+w)^{11}$$

ist 34650.

(4) Näherungen

a) Def $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

n-te harmonische Zahl.

Frage: Wie groß ist H_n ist etwa?

• $G_k := \left\{ \frac{1}{i} \mid \frac{1}{2^k} < \frac{1}{i} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \right\}$

○ $= \left\{ \frac{1}{2^{k-1}}, \frac{1}{2^{k-1}+1}, \frac{1}{2^{k-1}+2}, \dots, \frac{1}{2^k} \right\}$

$\Rightarrow \# G_k = 2^{k-1}$

$\Rightarrow \sum_{x \in G_k} x \leq (\# G_k) \cdot (\max G_k)$
 $= 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} = 1$

und

○ $\sum_{x \in G_k} x \geq (\# G_k) \cdot (\min G_k)$
 $\Rightarrow 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$

• Hieraus folgt:

$$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} 1 \leq \log_2 n + 1$$

und

$$H_n > \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \lfloor \log_2 n \rfloor$$

• $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} H_n = +\infty$

b) Def Sei $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ bzw.

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$O(f) := \{g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \text{ex. } m_0 \in \mathbb{N}, C > 0 : \\ \forall x \geq m_0: g(x) \leq C f(x)\}$$

$$\Omega(f) := \{g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \text{ex. } m_0 \in \mathbb{N}, c > 0 : \\ \forall x \geq m_0: g(x) \geq c f(x)\}$$

$$\Theta(f) := O(f) \cap \Omega(f).$$

Bsp i) $H_n \in \Theta(\log n)$

ii) Sei $p, q: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

Polynomfunktionen. Dann gilt:

$$p \in O(q) \Leftrightarrow \deg p \leq \deg q.$$

iii) Sei $p: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein Polynomfkt.

$$\Rightarrow p(x) \in O(\exp(x))$$

$$\text{und } p(x) \in \Omega(\log x)$$

O-Notation

c) Bsp Betrachte $f(n) := 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$.

Frage: Wie groß ist $f(n)$ in etwa?

... genau (NA).

- Offensiv: $f(n) \leq n \cdot n^3 = n^4$
- Außerdem ist die Hälfte aller Summanden größer oder gleich $\left(\frac{n}{2}\right)^3$
 $\Rightarrow f(n) \geq \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2}\right)^3 = \frac{n^4}{16}$
 $\Rightarrow f(n) \in \Theta(n^4)$.
- Wir suchen eine bessere Abschätzung:

i) $\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \dots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1} \quad \forall n, r \in \mathbb{N}$
(NA)

$\Rightarrow \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \dots + \binom{n}{3} = \binom{n+1}{4}$

ii) Setze $g(k) := \binom{k}{3} \Rightarrow g(k) = \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}$
 $\in \frac{k^3}{6} + O(k^2)$

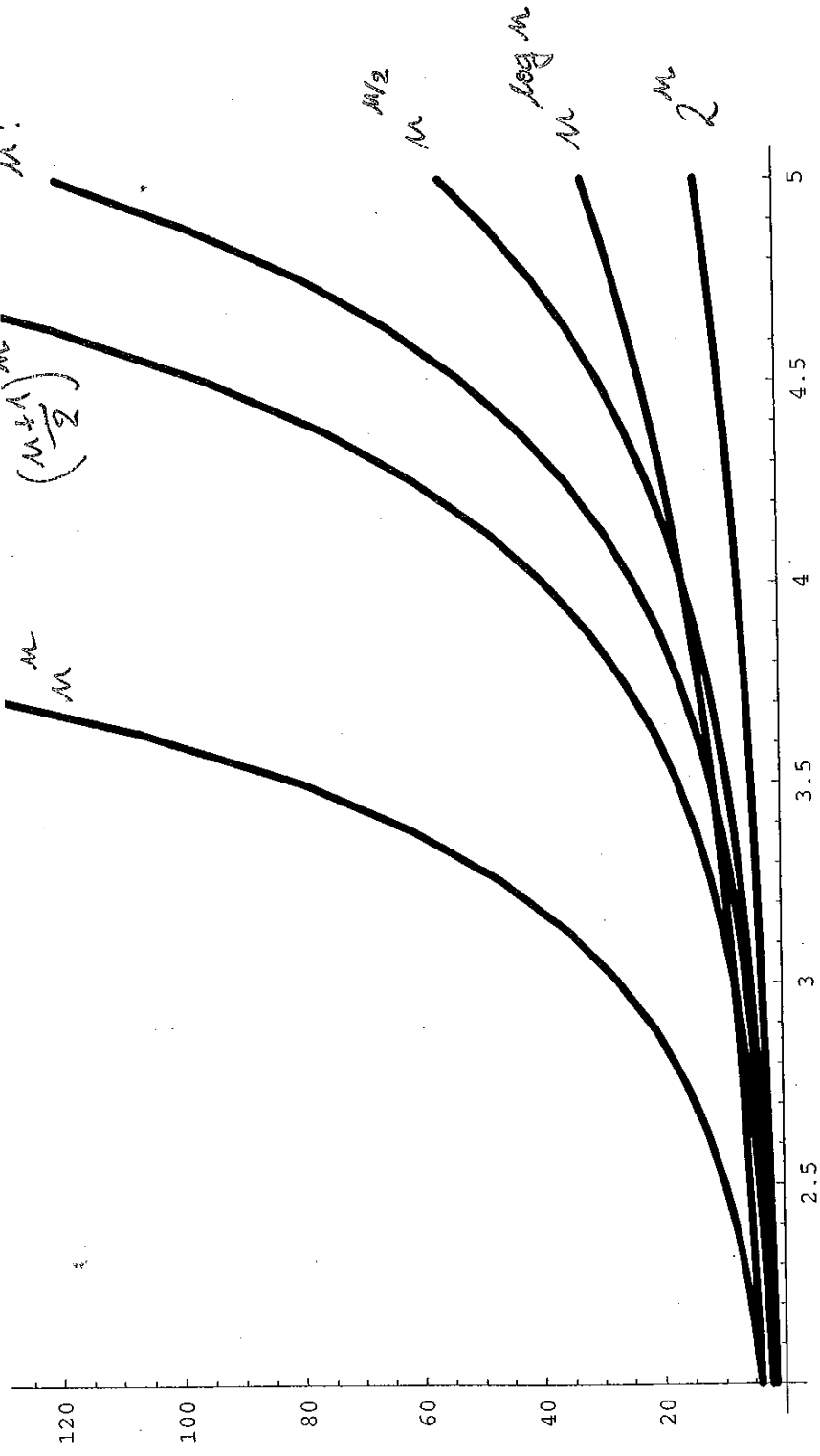
$\Rightarrow f(n) = \sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=1}^n 6g(k) + \sum_{k=1}^n (k^3 - 6g(k))$

$\in 6 \binom{n+1}{4} + O\left(\sum_{k=1}^n k^2\right) \subseteq \frac{n^4}{4} + O(n^3)$

```

In[19]:= Plot[{2^n, Factorial[n], n^Log[n], n^(n/2), ((n+1)/2)^n, n^n},
{n, 2, 5}, PlotStyle -> {Thickness[0.006]}]

```



Out[19]= - Graphics -

c) Frage: Wie groß ist $n!$?

i) Offenbar gilt

$$2^{n-1} \leq \prod_{i=1}^n i = n! \leq n^{n-1}$$

ii) Satz Für jedes $n \geq 1$ gilt

$$n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

iii) Def Zu $a, b \geq 0$ ist

$\frac{a+b}{2}$ das arithmetische Mittel
und \sqrt{ab} das geometrische Mittel

Lemma Für $a, b \geq 0$ gilt $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Bew Offenbar gilt $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$,

also $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$. □

iv) Bew von ii):

$$\text{Es gilt } (n!)^2 = \prod_{i=1}^n i(n+1-i),$$

$$\text{also } n! = \prod_{i=1}^n \sqrt{i(n+1-i)}$$

Das Lemma iii) besagt dann

$$\sqrt{i(n+1-i)} \leq \frac{i+n+1-i}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$\Rightarrow n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Für die untere Schranke ist $\exists i: i(n+1-i) \geq n$

┌ Für $i=1$ und $i=n$ gilt $i(n+1-i) = n$.

Für $2 \leq i \leq n-1$ gilt

$$i(n+1-i) \geq 2 \cdot \frac{n}{2} = n$$

$$\Rightarrow n! = \prod_{i=1}^n \sqrt{i(n+1-i)} \geq (\sqrt{n})^n = n^{n/2} \quad \square$$

v) Satz Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $1+x \leq e^x$

Bew. Analysis.

vi) Satz Für jedes $n \geq 1$ gilt

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

o) Bew. [obere Schranke] per Induktion nach n .

Ind. anfang $n=1$:

$$e\left(\frac{1}{e}\right)^1 = 1 = e \cdot 1 \left(\frac{1}{e}\right)^1$$

Ind.annahme: ~~für alle n gilt~~

~~$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n$$~~

Es gilt $n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Ind. schluss:

$$\begin{aligned} \Rightarrow (n+1)! &= (n+1)n! \leq (n+1)en\left(\frac{n}{e}\right)^n \\ &= \left[e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \right] \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} e \end{aligned}$$

$$\mathbb{Z}: \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} e \leq 1$$

$$\Gamma \quad e \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = e \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \stackrel{v)}{\leq} e \left(e^{-\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} \\ = e \cdot e^{-1} = 1. \quad _ \square$$

untere Schranke: $\binom{n}{k}$

ii) Satz (Stirling-Formel)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = 1$$

Bzw. siehe Knuth, TAOCP I.

d) Frage: Wie groß sind Binomialkoeffizienten?

ii) Es gilt

$$\binom{n}{k} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{k-i} = \binom{n}{n-k}$$

$$\Rightarrow \binom{n}{k} \leq \min(n^k, n^{n-k}) = n^{\min(k, n-k)}$$

und

$$\binom{n}{k} \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k$$

$$\left[\text{wegen } n \geq k > i \geq 0 \Rightarrow \frac{n-i}{k-i} \geq \frac{n}{k} \right]$$

ii) Satz Für $n \geq 1$ und $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

Bew. Für beliebige $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n \quad \text{3d)}$$

Insbesondere gilt für $x \geq 0$:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \dots + \binom{n}{k}x^k \leq (1+x)^n$$

Falls zusätzlich $0 < x \leq 1$:

$$\frac{1}{x^k} \binom{n}{0} + \frac{1}{x^{k-1}} \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k} \leq \frac{(1+x)^n}{x^k}$$

$$\stackrel{x \leq 1}{\Rightarrow} \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k} \leq \frac{(1+x)^n}{x^k}$$

Setze nun $x := \frac{k}{n}$.

$$\Rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k} \leq \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \left(\frac{n}{k}\right)^k$$

~~C.V.~~ Aus C.V) folgt, dass

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \leq \left(e^{k/n}\right)^n = e^k$$

$$\Rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k} \leq e^k \left(\frac{n}{k}\right)^k = \left(\frac{en}{k}\right)^k \quad \square$$

e) Frage: Wie groß sind die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$?

i) Es gilt $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

$$\Rightarrow \frac{2^n}{n+1} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq 2^n$$

↑
max. Binomialkoeff.

ii) Satz Für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\frac{2^{2m}}{2\sqrt{m}} \leq \binom{2m}{m} \leq \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}}$$

Bew. Setze $P := \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2m}$

$$\Rightarrow P = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2m)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2m)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2m)} = \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2}$$

$$= \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{m}} \leq P \leq \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

Es gilt

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(2m)^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1 \cdot 3}{2^2}\right) \left(\frac{3 \cdot 5}{4^2}\right) \dots \left(\frac{(2m-1)(2m+1)}{(2m)^2}\right) = (2m+1) P^2$$

Da jeder Faktor < 1 ist, gilt $(2m+1)P^2 < 1$

$$\text{ bzw. } P \leq 1/\sqrt{2m}.$$

Für die untere Schranke betrachte

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(2m-1)^2}\right) \\ &= \left(\frac{2 \cdot 4}{3^2}\right) \left(\frac{4 \cdot 6}{5^2}\right) \cdots \left(\frac{(2m-2)(2m)}{(2m-1)^2}\right) = \frac{1}{2(2m)P^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{1}{2\sqrt{m}}$$

□ □

○

Bem. • Aus der Stirling-Formel folgt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\binom{2m}{m}}{\frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}} = 1.$$

• Def. $\pi(n) := \#\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ prim}, p \leq n\}$

Primzahlssatz:

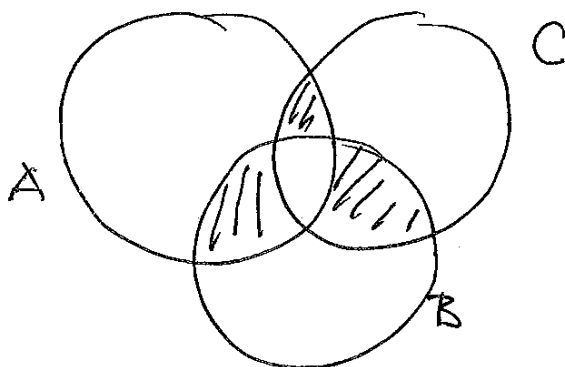
← logarithmus naturalis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{\log n} = 1$$

$$\Rightarrow \pi(n) \in \Theta\left(\frac{n}{\log n}\right)$$

(5) Inklusion - Exklusion

a) Beim Inklusions-Exklusions-Prinzip geht es darum die Elemente in einer Menge zu zählen, die als Vereinigung kleinerer Mengen geschrieben ist (die aber nicht disjunkt sind).



$$\begin{aligned} A \cup B \cup C &= [A \setminus (B \cup C)] \cup [B \setminus (A \cup C)] \\ &\cup [C \setminus (A \cup B)] \cup [(A \cap B) \setminus C] \\ &\cup [(A \cap C) \setminus B] \cup [(B \cap C) \setminus A] \\ &\cup A \cap B \cap C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \#(A \cup B \cup C) &= \#A + \#B + \#C \\ &\quad - \#(A \cap B) - \#(B \cap C) - \#(A \cap C) \\ &\quad + \#(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

b) Satz (Prinzip der Inklusion-Exklusion)

Seien A_1, \dots, A_n endliche Mengen.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \# \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \# \bigcap_{i \in I} A_i \\ &= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{\#I-1} \# \bigcap_{i \in I} A_i \end{aligned}$$

○ Bew Betrachte beliebiges Element

$$x \in A_1 \cup \dots \cup A_n$$

$$\Leftrightarrow x \in A_1 \cap \dots \cap A_j \text{ und } x \notin A_{j+1} \cup \dots \cup A_n$$

Der Beitrag von x auf der linken Seite der behaupteten Gleichung ist 1. Wir bestimmen

den Beitrag von x auf der rechten Seite.

Das Element x tritt auf in Schnitt von

k der j Mengen A_1, \dots, A_j für

$k \in \{1, \dots, j\}$. Insgesamt gibt es $\binom{j}{k}$ solcher

Schnittmengen; jede wird mit dem

Vorzeichen $(-1)^{k-1}$ gezählt

$$\Rightarrow j - \binom{j}{2} + \binom{j}{3} - \dots + (-1)^{j-1} \binom{j}{j} = 1$$

2d) \square

Binomial sb
 $x = -1$

c) Zufällige Permutationen

Def Eine Permutation $\sigma \in \text{Sym}[n]$ heißt fixpunktfrei, falls $\forall k \in [n]$ gilt $k^\sigma \neq k$.

Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällige Permutation fixpunktfrei?

[Dabei wird die Gleichverteilung auf der Menge aller $n!$ Permutationen vorausgesetzt.]

Dazu setze $\text{Fix}(k) := \{ \sigma \in \text{Sym}[n] \mid \sigma(k) = k \}$
Permutationen mit Fixpunkt k

Die Menge der fixpunktfreien Permutationen ist $\text{Sym}[n] \setminus \bigcup_{k=1}^n \text{Fix}(k)$.

Nun gilt offenbar

$$\# (\text{Fix}(k_1) \cap \dots \cap \text{Fix}(k_\ell)) = (n-\ell)!$$

für $k_1 < k_2 < \dots < k_\ell$.

Inklusion-Exklusion

$$\begin{aligned} \Rightarrow \# \bigcup_{k=1}^n \text{Fix}(k) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)! \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \# \text{ fixpunkt freie Permutation} &=: D_n \\ &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - + \dots + (-1)^{\frac{n!}{n!}} \\ &= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - + \dots + (-1)^{\frac{1}{n!}} \right) \end{aligned}$$

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} \approx 0.36787$$

Schnelle Konvergenz

$$\circ \Rightarrow \# D_n \approx \frac{n!}{e}$$

d) Eulersche φ -Funktion

i) Def $\varphi(n) := \# \{ k \in \{1, \dots, n\} \mid \text{ggT}(k, n) = 1 \}$

ii) Offenbar: Falls p prim ist, so gilt $\varphi(p) = p - 1$.

iii) Sei $n = p^\alpha$ eine Primzahlpotenz, $\alpha \geq 1$.

○ Jede Zahl, die nicht teilerfremd ist zu n , ist durch p teilbar, d.h. unter den Zahlen von 1 bis $n = p^\alpha$ sind dies genau die Zahlen

$$p, 2p, 3p, \dots, p^{\alpha-1} \cdot p,$$

mit gesamt $p^{\alpha-1}$ viele.

$$\Rightarrow \varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p} \right).$$

iv) Lemma Es gilt

$$(1+x_p)(1+x_1)\dots(1+x_{n-m}) = \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left(\prod_{i \in I} x_i \right)$$

als Gleichung in $\mathbb{R}[x_p, \dots, x_{n-m}]$.

v) Satz Für $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ gilt

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

○ Bew. Mit Inklusion-Exklusion folgt

$$\varphi(n) = n - \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, r\}} (-1)^{(\#I-1)} \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i}$$

$$= n \cdot \sum_{I \subseteq \{1, \dots, r\}} \frac{(-1)^{\#I}}{\prod_{i \in I} p_i}$$

$$\uparrow = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

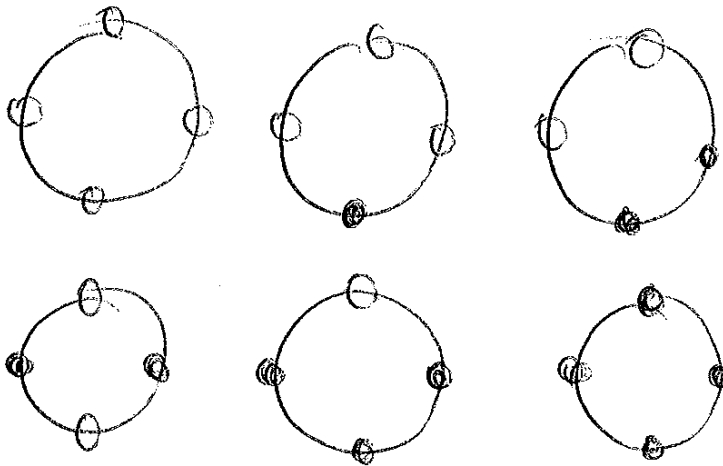
○ setze $x_i = 1/p_i$ in iv) □

§2 Abzählung von Mustern

(1) Beispiel

- a) Betrachte ~~ein~~ Halsketten mit n Perlen, die schwarz oder weiß gefärbt sind. Zwei solche Ketten werden als gleich betrachtet, wenn sie durch Drehung aufeinander abgebildet werden („die Halsketten werden getragen“). Wieviele verschiedene solche Ketten gibt es?

$n=4$:



Antwort: 6

- b) Betrachte ein (3-dimensionales) Würfel, dessen Facetten schwarz oder weiß gefärbt sind. Zwei Positionen des Würfels werden als gleich betrach

Wann ist diese Drehung als lineare
 hervorgehen?

Bsp

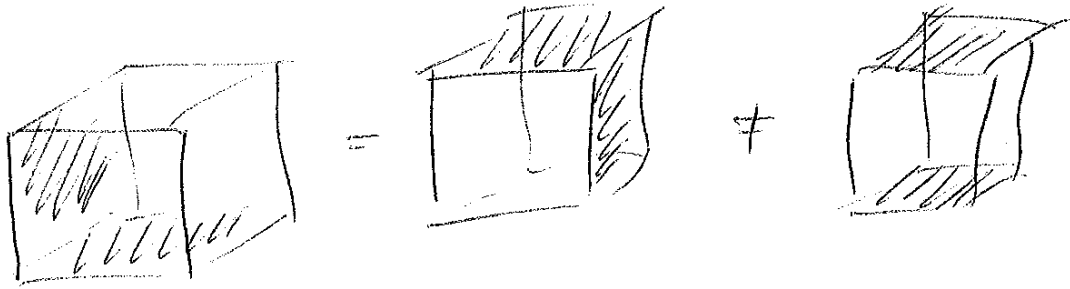


Tabelle (für # schwarze \leq # weiße)

Schwarze	Weiße	# ↓	vertauschen s/w	gesamt
0	6	1	2	2
1	5	1	2	2
2	4	2	2	4
3	3	2	1	2
				10

(2) Permutationsgruppe

auch: $\dots \leq \text{Sym}(S)$
 für S bel. Menge

Def Eine Gruppe $\Gamma \leq \text{Sym}[n]$ heißt

Permutationsgruppe (von (Permutationen-)
 grad) n].

Bsp $C_n = \langle (1\ 2\ 3 \dots n) \rangle$ Zyklische Gruppe
 der Ordnung n .

• $\text{Alt}[n] = \langle (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \dots, (1\ 2\ n) \rangle$

alternierend Gruppe

Isomorphie: G operiert auf $[n]$ via η .

Def Sei G eine (abstrakte) endliche

Gruppe. Eine Gruppe Homomorphismus

$$\eta: G \rightarrow \text{Sym}[n]$$

$$\eta(g_1 g_2) = \eta(g_1) \eta(g_2)$$

heißt Permutationsdarstellung (von Grad n).

Bem. • Per kanonischer Einbettung

$$\iota: \Gamma \rightarrow \text{Sym}[n] \text{ heißt jede}$$

Permutationsgruppe eine kanonische

Permutationsdarstellung.

Kern

$$\text{• Für Ker } \eta = \{ g \in G \mid \eta(g) = \text{id} \}$$

$$\text{ist } \text{Im } \eta = \{ \eta(g) \mid g \in G \}$$

eine Untergruppe von $\text{Sym}[n]$, also

eine Permutationsgruppe, und

$$\text{es gilt } \text{Im } \eta \cong G / \text{Ker } \eta$$

Bsp 1) Die Drehungen des 3-Würfels mit

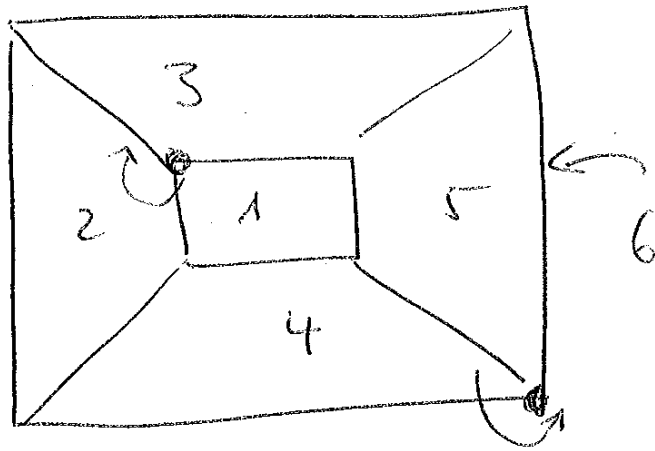
rotten Raumdiagonalen (also diejenigen

Drehungen, die zwei gegenüberliegende

Ecken vertauschen) definiert eine

Permutationsdarstellung von C_3

~~in~~ Sym von Grad 6:



$$\eta: (123) \mapsto (123)(465)$$

Im Kern einer Permutationsdarstellung
ist trivial \Rightarrow triv.

$$ii) \quad \eta: C_4 \rightarrow \text{Sym}[2] = C_2: (1234) \mapsto (12)$$

hier $\eta = \{id, (13)(24)\} \neq \{id\}$
nicht triv.

(3) Bahnen

a) Sei $\eta: G \rightarrow \text{Sym}[n]$ eine Permutations-
darstellung.

Not Für $m \in [n]$ schreiben wir

$$m^g := \cancel{m}^{\eta(g)} = [\eta(g)](m)$$

Def Für $m \in [n]$ heißt

$$m^G := \{mg \mid g \in G\}$$

die Bahn von m unter der Operation von G bzgl. η .

b) Bsp Eine ~~gebundene~~ Halbkette mit n Kugeln in r Farben lässt sich

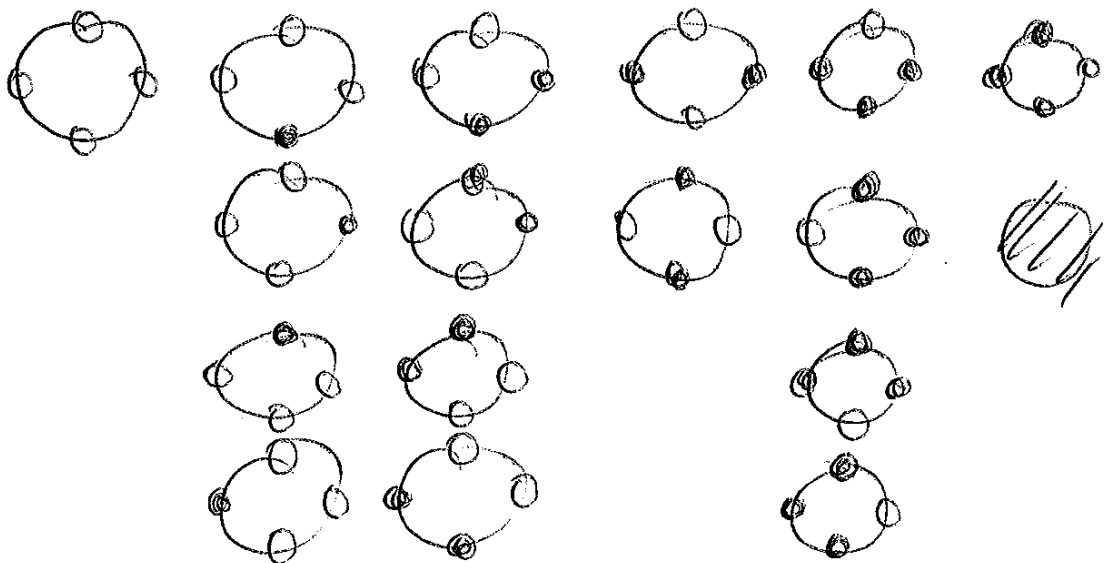
○ codieren als Abbildung $H: [n] \rightarrow [r]$.

Die Operation von C_n auf $[n]$ induziert eine Operation auf $[r]^{[n]}$

$$\text{per } [r]^{[n]} \times C_n \rightarrow [r]^{[n]} : (H(i), g) \mapsto H(g(i))$$

Die Bahnen dieser Operation entsprechen genau den gebundenen Halbketten:

○ (hier: $n=4, r=2$)



Man erhält so 6 Bahnen der
Länge 1, 2 und 4.

1) Lem ~~ma~~ Für $u, v \in [n]$ gilt entweder
 $u^G = v^G$ oder $u^G \cap v^G = \emptyset$.

~~ii) $\parallel u^G$ \perp $\parallel v^G$~~

Bew. ~~ist~~ Angenommen $u^G \cap v^G \neq \emptyset$.

Dann ex. $w \in [n]$, $g, h \in G$:

$$u^g = w = v^h, \text{ Für } x \in u^G \text{ ex.}$$

$$i \in G \text{ mit } u^i = x. \Rightarrow$$

$$x^i = u^i = u^g \cdot g^{-1} \cdot i = w^{g^{-1}i} = v^{h \cdot g^{-1}i}$$

Es folgt $u^G \subseteq v^G$, und die
umgekehrte Inklusion folgt aus Symmetrie.

~~ist~~



d) Eine Permutationsdarstellung

$$\eta: G \rightarrow \text{Sym } \Omega \quad [\eta(gh) = \eta(g) \cdot \eta(h)]$$

ist dasselbe wie eine Abbildung

$$\tilde{\eta}: \Omega \times G \rightarrow \Omega \quad \text{Wirkung / Operation}$$

mit i) $\tilde{\eta}(u, 1) = u \quad \forall u \in \Omega$

ii) $\tilde{\eta}(u, gh) = \tilde{\eta}(\tilde{\eta}(u, g), h)$

vgl. $\textcircled{U.A.}$ $\forall g, h \in G$.

○

e) Lemma Sei $U \leq G$ Untergruppe.

Dann gilt $\#U \mid \#G$ ~~.....~~

Bew. Betrachte die Permutationsdarstellung

$$\tilde{\eta}: G \times U \rightarrow G \quad \text{von } U \text{ auf der Menge } G.$$

$g^u = \tilde{\eta}(g \cdot u) = u^{-1} \cdot g$

○

Mit $u \in U$ durchläuft auch u^{-1} sämtliche Elemente von U , und es gilt $g^U = Ug$.

Aus c) folgt damit, dass je zwei (Rechts-) Nebenklassen von U gleich oder disjunkt sind. Für $g, h \in G$

ist die Abbildung

$$ug \mapsto uh = ug \cdot g^{-1} \cdot h$$

eine Bijektion von Ug nach Uh .

Dann ist $G/U = \{Ug \mid g \in G\}$
 eine Partition von G in gleichmächtige
 Mengen, und es folgt die Behauptung. \square

Def $[G:U] := \#G/U = (\#G) / \#U$
Index von U in G .

f) Betrachte wiederum eine beliebige
 Operation $\tilde{\eta} : \Omega \times G \rightarrow \Omega, m \in \Omega$.

○ Def $\text{Stab}_G(m) := \{g \in G \mid ~~m^g = m~~ m^g = m\}$.
Stabilisator von m

~~Es gilt~~ Für $g, h \in \text{Stab}(m)$ gilt
 $m^{gh} = (m^g)^h = m^h = m$

und $m^{g^{-1}} = (m^g)^{g^{-1}} = m^{g \cdot g^{-1}} = m^1 = m$,

○ Also ist $\text{Stab}(m)$ eine Untergruppe von G .

g) Prop Für $m \in \Omega$ ist die Abbildung

$$\beta : m^G \rightarrow G / \text{Stab}(m),$$

$m^g \mapsto \text{Stab}(m)g$ für die
 eine Bijektion, insbesondere gilt ⁴ ~~das~~ _{Bahmlänge}

$$\#m^G = \#(G / \text{Stab}(m)) = [G : \text{Stab}(m)]$$

Bew

i) β ist wohldefiniert: Seien $g, h \in G$
mit $u^g = u^h \Rightarrow u^{gh^{-1}} = u$
und $gh^{-1} \in \text{Stab}(u)$. Dann ist

$$\text{Stab}(u)h = \text{Stab}(u)gh^{-1}h = \text{Stab}(u)g.$$

ii) β ist injektiv: Seien $g, h \in G$

mit $\text{Stab}(u)g = \text{Stab}(u)h$

$\Rightarrow gh^{-1} \in \text{Stab}(u) \Rightarrow u^{gh^{-1}} = u$

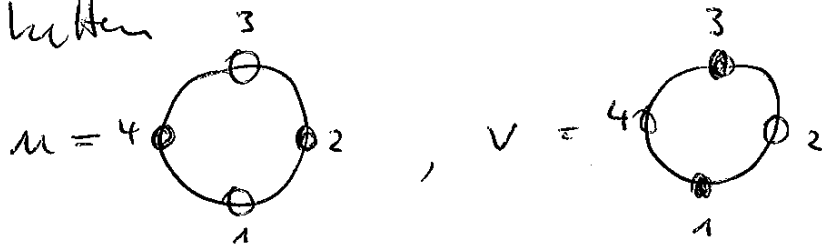
$\Rightarrow u^g = u^h.$

iii) Offenichtlich ist β surjektiv. □

h) Bsp Halbkette mit $n=4, r=2$.

$G = C_4$. Betrachte die beiden

Halbketten



Für $g = (1234)$ ist $G = \langle g \rangle$,
und es gilt $u^g = v$ sowie $v^g = u$.

$\Rightarrow \{u, v\} = u^G = v^G$ ist eine
Bahn (der Länge 2)

Formen in

$$\text{Stab}_G(u) = \text{Stab}_G(v) = \{ \text{id}, g^2 \}$$

die zu $C_2 \cong \text{Sym}[2]$ isomorphe

Untergruppe von G . Es gilt

$$\# u^G = [G : \text{Stab}_G(u)] = 2.$$

(4) a) Wiedrum betrachten wir die Wirkung
 $\tilde{\eta}$ von G auf Ω .

○

$$\text{Def } \text{Fix}(g) := \{ u \in \Omega \mid u^g = u \}$$

Fixpunktmenge.

b) Zweifaches Abzählen aller Paare

$$\{ (u, g) \mid u^g = u \}$$

liefert

○

$$\sum_{u \in \Omega} \# \text{Stab}(u) = \sum_{g \in G} \# \text{Fix}(g).$$

c) Satz (Lemma von Burnside-Frobenius)

$$\# \{ u^G \mid u \in \Omega \} = \frac{1}{\# G} \sum_{g \in G} \# \text{Fix}(g)$$

Bew Aus Prop 3, g) folgt für $m \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \# G &= (\# m^G) \cdot (\# \text{Stab}_G(m)) \\ &= (\# m^G) \cdot (\# \text{Stab}_G(v)) \text{ für } v \in m^G \\ &= \sum_{v \in m^G} \# \text{Stab}_G(v) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\# \{m^G \mid m \in \Omega\}) \cdot (\# G)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\{m^G \mid m \in \Omega\}} \sum_{v \in m^G} \# \text{Stab}_G(v) \\ &= \sum_{m \in \Omega} \# \text{Stab}_G(v) = \sum_{g \in G} \# \text{Fix}(g). \quad \square \end{aligned}$$

d) Beisp Halbkette mit $n=4$, $r=2$, $G = C_4$

$$\begin{array}{cccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & \circ & \circ & \circ & \circ & \\ & \circ & \circ & & \circ & \\ & \circ & \circ & & \circ & \end{array} \quad \Omega = [2]^{[4]}$$

$g \in G$	$\# \text{Fix}(g)$
(1234)	2
$(13)(24)$	4
(1432)	2
(1)	16

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\# G} \sum_{g \in G} \# \text{Fix}(g) \\ &= \frac{1}{4} (2 + 4 + 2 + 16) \\ &= \frac{24}{4} = 6. \end{aligned}$$

(5) a) Sei $\eta: G \rightarrow \text{Sym } \Omega$ eine

Permutationsdarstellung. Für $g \in G$

lässt sich $\eta(g)$ als Produkt disjunkter
Zyklen schreiben:

$$(*) \quad \eta(g) = (u, u^g, u^{g^2}, \dots)(v, v^g, v^{g^2}, \dots) \dots$$

$$\begin{aligned} \text{Mit } \text{Fix}_G \Omega &:= \{g \in G \mid \forall m \in \Omega: m^g = m\} \\ &= \bigcap_{m \in \Omega} \text{Fix}_G(m) \end{aligned}$$

folgt, dass $g \in \text{Fix}_G \Omega$ ~~ist~~ genau dann
gilt, wenn $\eta(g) = \text{id}$, also jeder Zyklus
in der Darstellung (*) trivial ist.

b) $b_k(g) := \#$ Zyklen der Länge k
in der Darstellung (*).

Def Das Polynom

$$Z(G; z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} z_1^{b_1(g)} z_2^{b_2(g)} \dots z_n^{b_n(g)}$$

$$\in \mathbb{Q}[z_1, z_2, \dots, z_n]$$

mit Zyklenindikator von

(der Operation von) G (auf Ω ~~...~~),

wobei $n = \# \Omega$).

(7) a) Sei $\eta: G \rightarrow \text{Sym } \Omega$ eine Permutationsdarstellung. Für $g \in G$ lässt sich $\eta(g)$ als Produkt disjunkter Zyklen schreiben:

$$(*) \quad \eta(g) = (u, u^g, u^{g^2}, \dots)(v, v^g, v^{g^2}, \dots) \dots$$

Mit $\text{Fix}_G \Omega := \{g \in G \mid \forall u \in \Omega: u^g = u\}$

$$\circ \quad = \bigcap_{u \in \Omega} \text{Fix}_G(u)$$

folgt, dass $g \in \text{Fix}_G \Omega$ ~~ist~~ genau dann gilt, wenn $\eta(g) = \text{id}$, also jeder Zyklen in der Darstellung (*) trivial ist.

b) $b_k(g) := \#$ Zyklen der Länge k in der Darstellung (*)

Def Das Polynom

$$Z(G; z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} z_1^{b_1(g)} z_2^{b_2(g)} \dots z_n^{b_n(g)}$$

$$\in \mathbb{Q}[z_1, z_2, \dots, z_n]$$

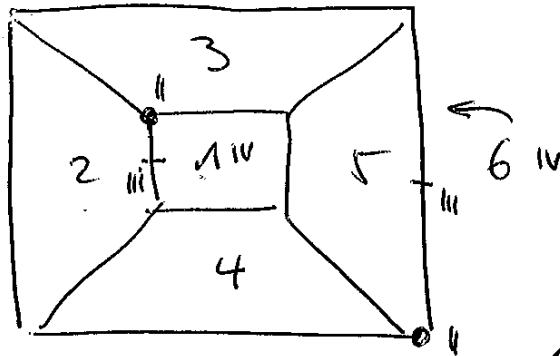
heißt Zyklusindikator von

(der Operation von) G (auf Ω ~~...~~),

wobei $n = \#\Omega$).

c) Bsp $\Omega =$ Facetten des 3. Würfels
 $G =$ Drehgruppe $\#G = 24.$

Außer der Identität gibt jede Drehachse entweder durch zwei gegenüberliegende Ecken, Kanten oder Facetten:



		typisches El.	Monom Anzahl an Zykelnid.	Multi
Id	I	(1)	Z_1^6	1
Ecken	II	(123)(465)	Z_3^2	4 · 2
Kanten	III	(12)(34)(56)	Z_2^3	6
Facetten	IV	(2354)	$Z_1^2 Z_4$	3 · 2
Fac ²		(25)(34)	$Z_1^2 Z_2^2$	3

Zykelzerlegung

$$Z(t; z_1, z_2, \dots, z_6)$$

$$= \frac{1}{24} \left(z_1^6 + 3 z_1^2 z_2^2 + 6 z_1^2 z_4 + 6 z_2^3 + 8 z_3^2 \right)$$

(6) a) Sei G eine endliche Gruppe, die auf der Menge $[n]$ operiert, $n \geq 1$.

Def $[v]^{[n]} \times G \rightarrow [v]^{[n]}$,
 $(H, g) \mapsto (i \mapsto H(i^g)) =: H^g$
 auf $[v]^{[n]}$ induziert O_v .

b) Def Für $H \in [v]^{[n]}$ ist

$$w(H) = \prod_{i=1}^n x_{H(i)} \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$$

das Gewicht von H .

c) Es gilt

$$w(H^g) = \prod_{i=1}^n x_{H(i^g)} = \prod_{j=1}^n x_{H(j)} = w(H)$$

da $\text{Ab. } [n] \rightarrow [n], i \mapsto i^g$ ist eine Bijektion.

D.h. das Gewicht ist auf jede Bahn der induzierten Wirkung von G auf $[v]^{[n]}$ konstant; d.h. das Gewicht einer Bahn ist wohldefiniert.

d) Def $w([r]^{[n]}; G) := \sum_{\{u^G \mid u \in \Omega\}} w(u^G)$

Muster-Enumerator

Bsp Halbkubeln mit $n=4, r=2$.

$$w([2]^{[4]}; C_4) = w^4 + w^3 s + 2w^2 s^2 + w s^3 + s^4$$

Statt $x_1: w$
 $x_2: s$

Setzt man $w=s=1$,
erhält man
 $1+1+2+1+1=6$
die Anzahl der Bahnen.

e) Satz (Polya)

$$w([r]^{[n]}; G) = Z(G; \sum_{j=1}^r x_j, \sum_{j=1}^r x_j^2, \dots, \sum_{j=1}^r x_j^n)$$

Bew. Für $H \in [r]^{[n]}$ betrachte die
Bahn H^G mit der Einschränkung der Op. von G

BF 4c) $\Rightarrow 1 = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \# \text{Fix}(g) \quad (*)$

Wegen c) haben alle Elemente in H^G
dasselbe Gewicht $w(H)$.

$\Rightarrow w(H^G) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \# \text{Fix}(g) \cdot w(H)$
Mult. von (*)
mit $w(H)$

$$= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sum_{H' \in H^G, H'^g = H'} w(H')$$

Summation über alle Bahnen ergibt

$$w([r]^{[n]}; G) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sum_{H \in [r]^{[n]}, H^g = H} w(H). \quad (**)$$

Sei nun $\eta: G \rightarrow \text{Sym}[n]$ die zur Operation von G auf $[n]$ zugehörige Permutationsdarst.

Wie in 5a):

$$\eta(g) = \underbrace{(\cdot)(\cdot)\dots(\cdot)}_{b_1(g)} \underbrace{(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)\dots(\cdot\cdot)}_{b_2(g)} \dots \quad (***)$$

[vgl. $b_k =$ aus b]

Für $H^g = H$ ist H auf allen Zykeln der Darstellung (***) konstant. Daher existieren

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1b_1}; a_{21}, \dots, a_{2b_2}; \dots \in [r]$$

als Bilder der ~~Bahnen~~ der entsprechenden Zykeln.

$$\Rightarrow w(H) = (x_{a_{11}} x_{a_{12}} \dots x_{a_{1b_1}}) (x_{a_{21}}^2 x_{a_{22}}^2 \dots x_{a_{2b_2}}^2)$$

In der Gleichung (***) treten alle Abb.

$H \in [r]^{[n]}$ auf, die auf den Zykeln von $\eta(g)$ konstant sind

$$\Rightarrow \sum_{H \in [r]^{[n]}, H^g = H} w(H) = \left(\sum_{i=1}^r x_i \right)^{b_1} \left(\sum_{i=1}^r x_i^2 \right)^{b_2} \dots \left(\sum_{i=1}^r x_i^n \right)^{b_n}$$

Dieser letzte Ausdruck entspricht genau der Summande von g im Zylinderindikator:

$$\begin{aligned}
 W([r]^{[m]}; G) &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \left[\left(\sum_{j=1}^r x_j \right)^{d_1(g)} \cdots \left(\sum_{j=1}^r x_j^m \right)^{d_m(g)} \right] \\
 &= Z(G; \sum_{j=1}^r x_j, \sum_{j=1}^r x_j^2, \dots, \sum_{j=1}^r x_j^m)
 \end{aligned}$$

04) Kor

$$\# \{H^G \mid H \in [r]^{[m]}\} = Z(G; r, r, \dots, r)$$

Bew. Setze $x_j = 1 \quad \forall j \in [r]$.

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^r x_j^k = r \quad \forall k. \quad \square$$

g) Bsp Halbkubik mit $n=4, r=2$

$$\circ \quad Z(C_4; z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{4}(z_1^4 + z_2^2 + 2z_4)$$

~~$$Z(C_4; z_1, z_2)$$~~

$$Z(C_4; s+w, s^2+w^2, s^3+w^3, s^4+w^4)$$

$$= \frac{1}{4} \left[(s+w)^4 + (s^2+w^2)^2 + 2(s^4+w^4) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left(s^4 + 4s^3w + 6s^2w^2 + 4sw^3 + w^4 + s^4 + 2s^2w^2 + w^4 + 2s^4 + 2w^4 \right)$$

$$= s^4 + s^3w + 2s^2w^2 + sw^3 + w^4$$

b) Anzahl Heilsketten für r, n beliebig:

Betrachte die kanonische Wirkung von C_n auf $[n]$. Um den Satz von Polya anwenden zu können, muss wir den Zyklenindikator $Z(C_n; z_1, \dots, z_n)$ bestimmen.

$$C_n = \langle g \rangle \text{ mit } g = (1\ 2\ 3 \dots n)$$

$$\text{und } C_n = \{ \mathbb{1}, g, g^2, \dots, g^{n-1} \}$$

Dann gilt:

- g^k ist das Produkt von n/d disjunkten Zykeln der Länge d , und ~~g^k~~ d teilt n .

- d kleinste Zahl mit $n/d \cdot k$

$$\Rightarrow \frac{n}{\gcd(n, k)} \mid d \Rightarrow d = \frac{n}{\gcd(n, k)}$$

- $\# \{ i \in [n] \mid \gcd(i, n) = \frac{n}{d} \} = \varphi(d)$

$$\bullet Z(C_n; z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \varphi(d) z_d^{n/d}$$

$$\Rightarrow \# \{ H^{C_n} \mid H \in [r]^{[n]} \}$$

$$= Z(C_n; r, r, \dots, r)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \varphi(d) r^{n/d}$$

Für festes n ist dies ein Polynom in r .

Bsp $n=4$:

$$\# \{ H^{C_4} \mid \text{He}[r]^{[4]} \}$$

$$= \frac{1}{4} (\varphi(1) \cdot r^4 + \varphi(2) \cdot r^2 + \varphi(4) \cdot r)$$

$$= \frac{1}{4} (r^4 + r^2 + 2r)$$

2) 3-Würfel mit r Farben :

○ In 5c) hatten wir den Zyklenindikator der Drehgruppe G des Würfels bzgl. der Wirkung auf den 6 Facetten ausgerechnet:

$$Z(G; z_1, \dots, z_6) = \frac{1}{24} (z_1^6 + 3z_1^2 z_2^2 + 6z_1^2 z_4 + 6z_2^3 + 8z_3^2)$$

⇒ # 3-Würfel mit r Farben :

$$\frac{1}{24} (r^6 + 3r^4 + 12r^3 + 8r^2)$$

$$= \frac{1}{24} r^2 (r+1) (r^3 - r^2 + 4r + 8)$$

○

r	# Zahlen
2	10
3	57
4	240

(7)_a) Ziel: Bestimme die Anzahl der verschiedenen Muster nicht schlagender Turmstellungen auf einem $n \times n$ Schachbrett:

- Turmstellung = Permutationsmatrix ;
d.h. # Turmstellungen = $n!$
- Symmetrien: Drehungen und Spiegelungen eines Quadrats. $\curvearrowright \quad \leftrightarrow$

○ $D_4 = \langle \underbrace{(1\ 2\ 3\ 4)}_{=: g}, \underbrace{(12)(34)}_{=: h} \rangle$
operiert auf den vier Ecken des Schachbretts.
bridge-grp der Ordnung 8.

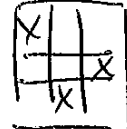
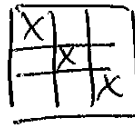
b) Bsp



$n=1$

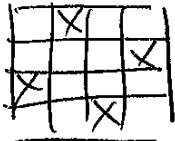
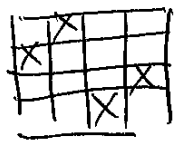
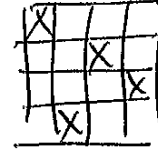
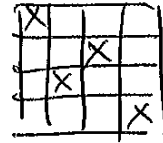
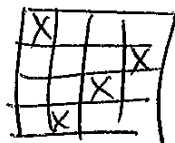
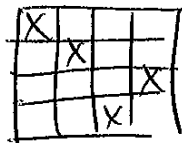
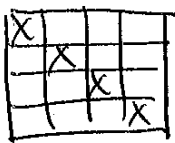


$n=2$

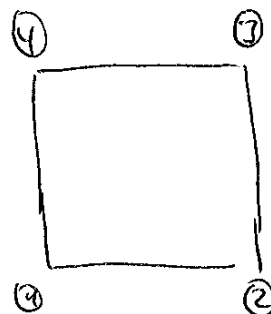


$n=3$

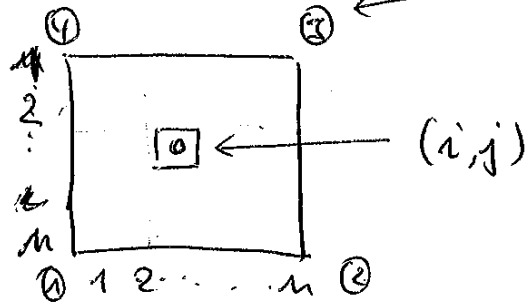
○



$n=4$



c) Wirkung von D_4 auf den Feldern
des Schachbretts:



$$(i, j)^g = (n+1-j, i)$$

$$(i, j)^h = (i, n+1-j)$$

○

$$D_4 = \{ \mathbb{1}, g, g^2, g^3, h, gh, g^2h, g^3h \}$$

d) Für die Anwendung des Lemmas
von Burnside-Frobenius müssen ^{wir} für jedes
Element aus D_4 bestimmen, wieviele
Turmstellungen fixiert werden.

○ • $T = \{ (i, \pi_i) \mid i \in [n] \}$ Turmstellung;
für $\pi \in \text{Sym}[n]$

• Annahme: $T^g = T$; d.h. $T \in \text{Fix}(g)$.

$$\Rightarrow (i, \pi_i)^g = (n+1-\pi_i, i) \in T$$

$$\text{d.h. } \pi(n+1-\pi_i) = i \quad \forall i \in [n]$$

Notation: $\pi_i = \pi(i)$

Für $j := \pi_i$ ist dann

$$\pi(m+1-\pi_j) = j.$$

Da aber π bijektiv und $\pi(i) = j$, folgt

$$m+1-\pi_j = i \iff \pi_j = m+1-i.$$

Analog ergibt sich

$$\pi(m+1-i) = m+1-j.$$

- Insgesamt zerfällt π in disjunkte Zyklen der Form

$$(i, j, m+1-i, m+1-j)$$

~~oder $m+1-i$~~ oder der Zyklen schreibt sich
weiter.

Bem

- ~~○~~ Falls $\pi(i) = i$, so folgt $i = \pi(\pi(i)) = m+1-i$,
d.h. $i = \frac{m+1}{2}$, und n ist ungerade.

- ~~○~~ Falls $\pi(i) = j \neq i$, so ist
 $(i, j, m+1-i, m+1-j)$
ein 4-Zyklus.

Insgesamt folgt für $T \in \text{Fix}(g)$:

- ~~○~~ π besitzt $\frac{n-1}{4}$ Fixpunkte und $\frac{n-1}{4}$
4-Zykel, falls n ungerade, und $\frac{n}{4}$
4-Zykel, falls n gerade.

Insbesondere gilt: Falls g einen Fixpunkt hat, ist $n \equiv 0(4)$ oder $n \equiv 1(4)$.

e) In jedem 4-Zyklus

$$(i, j, n+1-i, n+1-j)$$

find genau zwei Zahlen $\leq \frac{n}{2}$ und zwei Zahlen $\geq \frac{n}{2}$. Nach Wahl der

vier Zahlen $\{i, j, n+1-i, n+1-j\}$

gibt es genau zwei 4-Zykel mit diesen Träger, nämlich:

$$(i, j, n+1-i, n+1-j)$$

und

$$(i, n+1-j, n+1-i, j)$$

Bsp $n=5$

	X			
				X
		X		
X				
		X	X	

(1 2 5 4)

			X	
X				
		X		
				X
	X			

(1 4 5 2)

4) Auf wieviele Arten kann man
4-elementige Mengen der Form

$$\{i, j, n+1-i, n+1-j\}$$

wählen? Zuerst kann man sich andere

Zahl $\leq \frac{n}{2}$ wählen, die nicht andere
liegen darf. Danach kann man

andere Zahl, die nicht in diesem Zyklus
ist und weiter $\leq \frac{n}{2}$ wählen, die noch
nicht vorkam etc.

$$\Rightarrow \text{Anzahl} = \begin{cases} \frac{n-3}{2} \cdot \frac{n-7}{2} \cdots 1 & \text{für } n=4k+1 \\ \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-6}{2} \cdots 1 & \text{für } n=4k \end{cases}$$

k Terme

Jede solche Menge liefert zwei verschiedenen
4-Zykel, vgl. 2).

$$\Rightarrow \# \text{Fix}(g) = \begin{cases} (n-3)(n-7) \cdots 2 & \text{für } n=4k+1 \\ (n-2)(n-6) \cdots 2 & \text{für } n=4k \end{cases}$$

Die gleiche Analyse gilt für den 4-Zykel
 g^3 , d. h. $\# \text{Fix}(g^3) = \# \text{Fix}(g)$.

Analog gilt für $n \geq 2$:

$$\# \text{Fix}(g^2) = \begin{cases} (n-1)(n-3) \cdots 2 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ n(n-2) \cdots 2 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

g) Das Element $h \in D_4$ ist ein vertikale Spiegelung, die kein Turnenklung fixiert;

- ~~Rechte~~ jede Rechte ist invariant
- kein Feld bleibt fest
- in jeder Rechte steht aber nur ein Turm

$$\Rightarrow \# \text{Fix}(h) = 0$$

o Analog gilt für die horizontale Spiegelung $g^2 h$, dass $\# \text{Fix}(g^2 h) = 0$.

h) Es stellt sich heraus, dass gilt

$$\text{Fix}(gh) = \text{Fix}(g^3 h) = \cancel{\{\pi \in \text{Sym}\}}$$

$$= \{ (i, \pi_i) \mid i \in [n] \} \mid \pi \in \text{Sym}[n], \pi^2 = \text{id} \}$$

o Setze Involution

$$i_n := \# \text{Involution in } \text{Sym}[n].$$

Es gilt $i_1 = 1$ und

$$i_{n+1} = i_n + n i_{n-1} \quad (\text{für } i_0 = 1)$$

jede Involution in $\text{Sym}[n]$ hat

nicht fest zu einer Involution in $\text{Sym}[n+1]$

(und mit ihm ein Fixpunkt)

n+1 kann auf n Arten in eine Transposition eingebaut werden.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
i_n	1	1	2	4	10	26	76	232	764

i) Insgesamt ergibt sich nun für

$$a_1 := \# \text{Fix}(g) = \# \text{Fix}(g^3), \quad \text{vgl. f)}$$

$$a_2 := \# \text{Fix}(g^2)$$

○

als Anzahl der Muster von Turmschichten auf einem $n \times n$ -Schachbrett:

$$m_n = \begin{cases} \frac{1}{8} (n! + 2a_1 + a_2 + 2i_n) & \text{für } n \equiv 0, 1 \pmod{4} \\ \frac{1}{8} (n! + a_2 + 2i_n) & \text{für } n \equiv 2, 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

○

n	1	2	3	4	5	6	7	8
m_n	1	1	2	7	23	115	694	5282

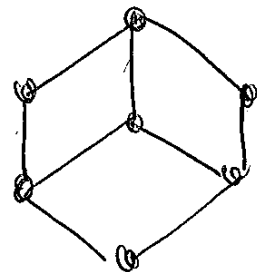
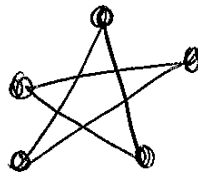
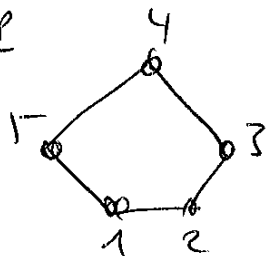
||

$$\frac{1}{8} (24 + 4 + 8 + 20)$$

(8) Graphen, Wdh.

a) Def Ein Graph ist ein Paar (V, E) ,
 wobei V eine Menge ist und
 $E \subseteq \binom{V}{2}$. D.h. unsere Graphen
 sind ungerichtet, ohne Schleifen
 und ohne Mehrfachkanten.
 Die Elemente von V heißen Knoten,
 die Elemente von E Kanten.

b) Bsp



$$= ([5], \{ \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{1, 5\} \})$$

c) Def Seien $\Gamma = (V, E)$ und $\Gamma' = (V', E')$
 Graphen. Eine Bijektion

$$\sigma: V \rightarrow V'$$

heißt Graphen isomorphismus

von Γ auf Γ' , falls $\forall e \in \binom{V}{2}$

$$\text{gilt } e \in E \Leftrightarrow \sigma(e) \in E'$$

die durch

$$\sigma \text{ induziert Bijektion } \binom{V}{2} \rightarrow \binom{V'}{2}$$

Falls ein solcher Graphen-Isomorphismus existiert, heißen Γ und Γ' isomorph; notiert als $\Gamma \cong \Gamma'$.

d) Bun Ein naive Test auf Graphen-Isomorphie probiert sämtliche $n!$ Permutationen der Eckenmenge aus (für $n = \#V$)

○

• Komplexitätsstatus offen!

• Implementierungen:

- Brendan McKay: nauty

- Thomas Rehder: isypol


[beide via polymake 2.0.0]

e) Bun Die kanonische Wirkung von $\text{Sym}[n]$ auf $[n]$ induziert eine Wirkung von $\text{Sym}[n]$ auf der Menge aller Graphen mit Knotenmenge $[n]$. Zwei Graphen $\Gamma = ([n], E)$ und $\Gamma' = ([n], E')$ sind isomorph genau dann, wenn sie in derselben Bahn liegen.

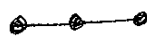
(9) Frage Wieviele paarweise (nicht-isomorphe)
Graphen gibt es auf n Ecken?

a) Def $f(n) := \#$ nicht-isomorphe Graphen auf
 n Ecken.

b) Bsp $n=1$:  $\Rightarrow f(1) = 1$

$n=2$:  $\Rightarrow f(2) = 2$

$n=3$:  $\Rightarrow f(3) = 4$



c) Auf einer festen Eckenmenge, z.B. also $[n]$,
sind die Graphen durch ihre Kantenmenge
eindeutig bestimmt.

$$\Rightarrow f(n) \leq 2^{\binom{n}{2}}$$

Anfänglich ist jeder Graph mit Eckenmenge $[n]$
zu höchstens $n! = \# \text{Sym}[n]$ Graphen auf
derselben Eckenmenge isomorph.

$$\Rightarrow \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} \leq f(n)$$

d) Zur Abschätzung des Wachstums von $\mu(n)$ betrachten wir Logarithmen zur Basis 2:

$$\log_2 2^{\binom{n}{2}} = \binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\log_2 \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} = \binom{n}{2} - \log_2 n!$$

$$\geq \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - n \log_2 n = \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{2 \log_2 n}{n}\right)$$

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \log_2 n}{n} = 0$$

Damit ist das Wachstum von $2^{\binom{n}{2}}/n!$ nicht wesentlich langsamer als das von $2^{\binom{n}{2}}$.

§ 3 Planare Graphen

(1) a) Def (vagu) Ein Graph heißt planar, falls er überschneidungsfrei in die Ebene gezeichnet werden kann.

b) Es gilt, das Konzept der Zeichnung zu präzisieren.

Def • Eine stetige Abbildung $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt stetige Kurve [auch: Bild $\gamma([0,1])$ Kurve]

• Eine Kurve γ heißt geschlossen, falls $\gamma(0) = \gamma(1) \in \mathbb{R}^2$.

• Eine geschlossene Kurve $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

heißt Jordankurve, falls ihr Bild homöomorph zur Kreislinie S^1 ist.

• ~~Eine Kurve $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$~~

• Zu Kurven $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\gamma': [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

~~heißt $\gamma * \gamma': [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$: mit $\gamma(1) = \gamma'(0)$~~

~~heißt~~

$\gamma * \gamma': [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t), & \text{falls } t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma'(2t-1), & \text{falls } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

Fortsetzung von γ .

- Ein Jordankurvenbogen ist eine nicht geschlossene Kurve, die sich zu einer geschlossenen Jordankurve fortsetzen lässt.

c) Sei $\Gamma = (V, E)$ ein endlicher Graph.

Def. Eine ebene Zeichnung von Γ (oder Einbettung von Γ in \mathbb{R}^2) ist ein

Paar von Abbildungen (β, γ) , wobei

$$\beta: V \rightarrow \mathbb{R}^2$$

ninjektiv und

~~$$\gamma: V \times V$$~~

$$\gamma: \{(v, w) \in V \times V \mid \{v, w\} \in E\} \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2)$$

mit

(i) $\forall \{v, w\} \in E: \gamma(v, w) = \gamma^{-1}(w, v):$

Jordankurvenbogen mit $\gamma(v, w)(0) = \beta(v)$

und $\gamma(v, w)(1) = \beta(w)$ & $\gamma(v, w)[0, 1] \cap \beta(V) = \{\beta(v), \beta(w)\}$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \beta(V):$

es höchstens ein Kante $\{v, w\} \in E$

mit $x \in \gamma(v, w)[0, 1]$.

~~(iii) \forall~~

• Γ heißt planar, falls Γ eine

ebene Zeichnung besitzt.

d) Satz Sei γ eine geschlossene Jordankurve.
 Dann hat $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma[0,1]$ genau zwei (Weg-)
 Zusammenhangskomponenten.

e) Def. Sei Γ ein ebener Graph mit ebener
 Zeichnung (β, ν) . Dann heißen die
 Zusammenhangskomponenten von

$$\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup \{ \gamma(v,w)[0,1] \mid \{v,w\} \in E \}$$

(offene) Länder (oder Gebiete) von Γ bzgl. (β, ν) .

Beim E gibt stets genau ein unbeschränktes
 Land, das äußere Land.

~~e) Def.~~

~~o) Def. Sei Γ ein ebener Graph mit ebener
 Zeichnung (β, ν) . Der Multigraph $\Gamma^*(L, E^*)$
 mit~~

~~$$L = \text{Länder von } \Gamma \text{ bzgl. } (\beta, \nu)$$~~

~~und~~

~~$E^* =$ je zwei Multikanten zwischen
 zwei über ein Kante benachbarte
 Ländern.~~

~~heißt dualer Graph von Γ bzgl. (β, ν) .~~

f) Prop Sei $\Gamma = (V, E)$ ein endlicher Graph mit einer ebenen Zeichnung (β, ν) . Dann ist ~~für~~ für jeden Kreis $(v_0, v_1, \dots, v_m = v_0)$ in Γ die nichttriviale ~~Zeichnung~~ Kurve $\gamma_{v_0, v_1} * \gamma_{v_1, v_2} * \dots * \gamma_{v_m, v_0}$ eine geschlossene Jordankurve. $m \geq 3$.

Bew. Für jeden Jordankurvebogen $\gamma_{v_i, v_{i+1}}$ ist das Bild $\gamma_{v_i, v_{i+1}} [0, 1]$ homöomorph zu einer Strecke. Daher ist die Zeichnung

$$\gamma_{v_0, v_1} * \dots * \gamma_{v_m, v_0} [0, 1]$$

homöomorph zu einem m -Eck, d. h. zu \mathbb{R}^2 . □

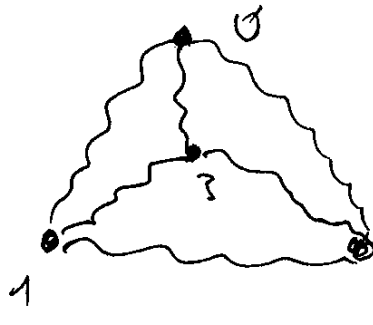
g) Kor Sei $\Gamma = (V, E)$ ein endlicher Graph mit einer ebenen Zeichnung (β, ν) . Dann ist für jedes ~~kurze~~ beschränkte Landa L von Γ bzgl. (β, ν) die Menge der Kanten im Rand von L Bild einer geschlossenen Jordankurve.

h) Bsp/Lem Der Graph $K_5 = ([5], \binom{5}{2})$

ist nicht planar.

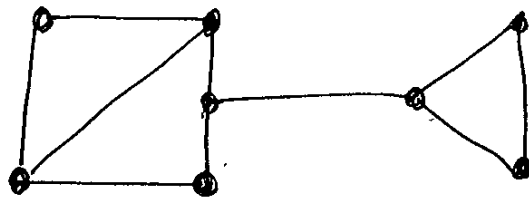
Bew. Angenommen K_5 hätte eine ebene Zeichnung (β, μ) . Die drei Knoten 0, 1, 2 ~~bilden~~ liegen auf einem Kreis in $K_5 \Rightarrow \gamma = \gamma_{0,1} * \gamma_{1,2} * \gamma_{2,0}$ geschlossenem Jordankurve. Da $\gamma_{3,4}$ die Kurve μ nicht schneidet, liegen ~~entweder~~ 3 und 4 in derselben Komponente von $\mathbb{R}^2 \setminus \mu[0,1]$.

Z.B. also im ~~inneren~~ Inneren.



~~Falls~~ Nun liegt 4 entweder in Kurve von $\gamma_{0,1} * \gamma_{1,3} * \gamma_{3,0}$ oder in Inneren von $\gamma_{1,2} * \gamma_{2,3} * \gamma_{3,1}$ oder in Inneren von $\gamma_{0,2} * \gamma_{2,3} * \gamma_{3,0}$. In jedem Fall schneidet $\mu_{4,x}$ die jeweils ~~den~~ Rand des Dreieck $n.v.w$ für $x \in [5] \setminus \{n.v.w. 4\}$. Analog, falls 3 und 4 außen. [

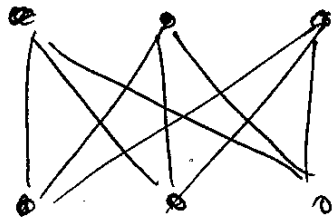
i) Bem Falls Γ ein zweifach zsh. ebener Graph ist, so ist jedes Land (auch das unbeschränkte) das Innen- oder Außen einer geschlossenen Jordankurve zu einem Kreis in Γ .



eben & nicht 2-zsh.

○

j) Satz (Kuratowski) Ein Graph Γ ist genau dann planar, falls kein Teilgraph von Γ zu einer Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$ isomorph ist.



$K_{3,3}$ [bipartit]

○

Bem • 3 Häuser / 3 Brunnen

• Planarität von Graphen lässt sich in linearer Zeit testen
Hopcroft & Tarjan 1974

• Robertson & Seymour & Thomas 2004
Wagner's Vermutung / graph minor

(2) Sei $\Gamma = (V, E)$ ein endlicher Graph
 mit einer Zeichnung (β, γ) .
 Zusammenhängender.

a) Satz Der Multigraph $\Gamma^* = (L, E^*)$

mit

$L =$ Länder von Γ bzgl. (β, γ)

und

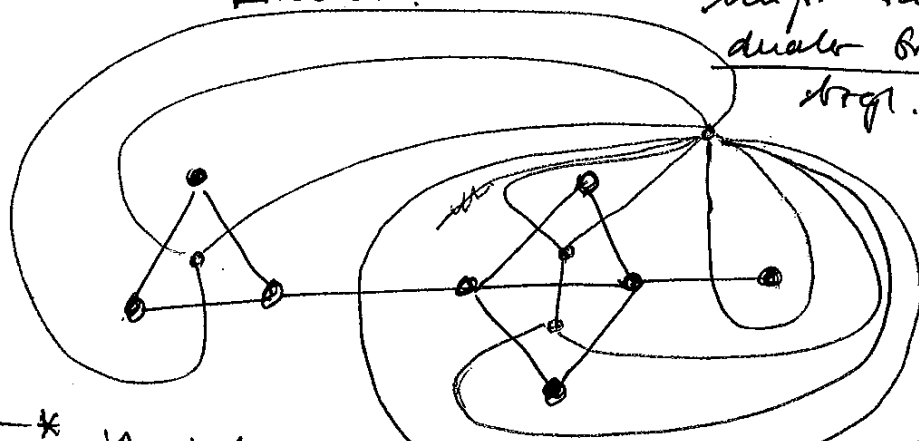
$E^* =$ je eine Multikante zwischen

Zwei über eine Kante benachbarten

Ländern.

heißt zu Γ
dualer Graph
 bzgl. (β, γ)

Bsp



Bem Γ^* ist planar.
 und zth.

und $\Gamma^{**} = \Gamma$

(1/1)

b) Satz (Eulerscher Polycederatz)

$$\#V - \#E + \#L = 2.$$

Bew. Da Γ zusammenhängend ist.

besitzt Γ ein aufspannendes Baum B .

Es sei $E^*(B) \subseteq E^*$ die Menge der
 zu den Baumkanten in B dualen
 Kanten.

$\underline{\text{Z}}$ Der Teilgraph $(L, E^* \setminus E^*(\mathbb{B}))$

des dualen Graphen Γ^* ist ein Baum.

Γ • Angenommen $(L, E^* \setminus E^*(\mathbb{B}))$ nicht zth.

Dann existieren zwei Kreise l_1 und l_2 , die nicht über Dualkanten aus $E^* \setminus E^*(\mathbb{B})$

zu erreichen sind $\nexists \mathbb{B}$ berührt

- • Angenommen $(L, E^* \setminus E^*(\mathbb{B}))$ enthält einen Kreis $(l_0, l_1, \dots, l_m = l_0)$ und $\{l_i, l_{i+1}\} \in E^* \setminus E^*(\mathbb{B})$. Dann trennt ~~er~~ (wegen $\Gamma^{**} = \Gamma$) ~~die Knoten~~ $v \in V$, ~~die durch Dualkanten in~~ $E(l_0, l_1, \dots, l_m = l_0)$ ~~von~~ der Kreis $(l_0, l_1, \dots, l_m = l_0)$ die Knoten ~~aus~~ V in zwei Teile [Jordanischer Kurvensatz] $\nexists \mathbb{B}$ aufspaltet.
-

$$\Rightarrow \#E = \#E(\mathbb{B}) + \#(E^* \setminus E^*(\mathbb{B}))$$

$$\stackrel{**}{=} \underbrace{(\#V - 1)}_{\text{weil } \mathbb{B} \text{ Baum}} + \underbrace{(\#L - 1)}_{\text{weil } (L, E^* \setminus E^*(\mathbb{B})) \text{ Baum}} = \#V + \#L - 2$$

□

(3) a) Def. Sei $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ endlich.

Dann heißt

$$\text{conv } X = \{ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \mid 0 \leq \lambda_i, \sum \lambda_i = 1 \}$$

das von X erzeugte Polytop.

• Sei $P = \text{conv } X$ ein Polytop.

Ein affines Hyperebenen $H \subset \mathbb{R}^d$

schneidet P , falls $H \cap P \neq \emptyset$ und

$H^+ \supseteq P$. Der Schnitt von P mit
einer Schnitthyperebene heißt Schnitt von P .

b) Def. Stärken von Polytopen sind Polytope.

• $\dim P := \dim \text{aff}(P)$. Dimension.

• Die 0. Stärken (Ecken) und die
1. Stärken (Kanten) eines Polytopes P
bilden einen Graphen $\Gamma(P)$.

• Falls $\dim P = 3 \Rightarrow \Gamma(P)$ planar.
Länder = 2. Stärken.

• $\dim P = d \Rightarrow \Gamma(P)$ ist d. zsh.

c) Bsp / Anwendung

Sei P ein 3. Polytop mit v Ecken, e Kanten
und f 2. Flächen (Facetten).

Bem. Falls alle Facetten entweder Fünf-
oder Sechsecke sind, so enthält P mindestens
12 Fünfecke.

Bew. Zähle Kanten. Facetteninhalten
(= Ecken · Facetteninhalten)

$$2e = 5 f^{(5)} + 6 f^{(6)} \geq 3v \quad , \quad f = f^{(5)} + f^{(6)}$$

(*) (**)

$$\text{Euler} \Rightarrow 2e = 2v + 2f - 4$$

$$\Rightarrow 2v + 2f^{(5)} + 2f^{(6)} - 4 = 5f^{(5)} + 6f^{(6)}$$

(*)

$$\Rightarrow 2v = 3f^{(5)} + 4f^{(6)} + 4$$

$$\Rightarrow \frac{10}{3}f^{(5)} + 4f^{(6)} \geq 3f^{(5)} + 4f^{(6)} + 4$$

(**)

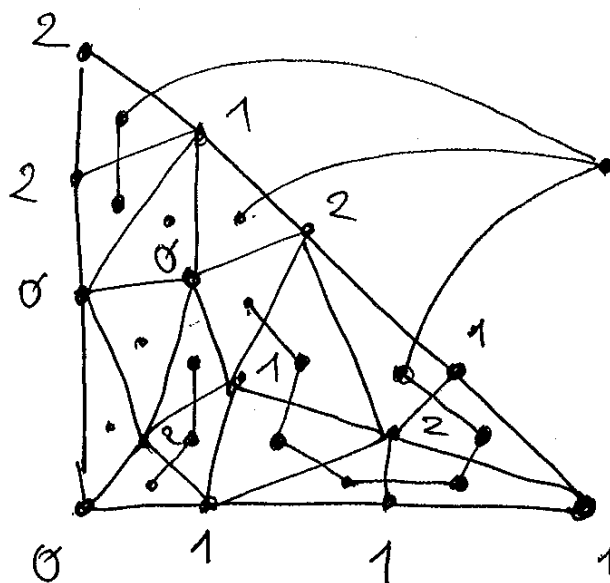
$$\Rightarrow f^{(5)} \geq 12.$$

Zusatz: Falls $2e = 3v \Rightarrow f^{(5)} = 12.$

Buckyballs.

§ 4 Die Methode des doppelten Abzählens

(1) a) Sei Δ Triangulierung eines ebenen Dreiecks. [bzw. Sei Δ ein planarer Graph, dessen beschränkte Länder Dreiecke sind (maximal planarer Graph); wir unterteilen den Rand des äußeren Landes in drei Kantenzüge.]



Betrachten die Ecken des ~~großen~~ ~~äußeren~~ großen Dreiecks mit 0, 1, 2 und wähle eine beliebige ~~Zuordnung~~ Abbildung der Knoten in die Menge $\{0, 1, 2\}$, so dass auf der ~~Kante~~ Dreieckskante \overline{xy} nur die ~~Bezeichnung~~ x und y vorkommen.

b) Satz (Apollonius-Lemma)

In der unter a) beschriebenen Situation gibt es stets ein kleines Dreieck in Δ , dessen Ecken mit 0, 1, 2 beschriftet sind.

Bew. Wir definieren einen Graphen $\Gamma = \Gamma(\Delta)$, der Teilgraph des zu Δ dualen (Multi-)graphen Δ^* ist.

$V(\Gamma) =$ alle Länder von Δ (auch das Äußere).

$E(\Gamma) =$ Dualkanten zu (1,2)-Kanten.

- Ein kleines Dreieck in Δ hat in Γ ungeraden Grad genau dann, wenn ~~die~~ drei Ecken von Δ mit 0, 1, 2 beschriftet sind:

┌ Entweder es gibt keine (1,2)-Kante
⇒ Grad = 0

Oder: es gibt eine (1,2)-Kante und ~~das Dreieck~~ die dritte Ecke ist nicht mit 0 beschriftet, also Γ mit 1

⇒ ex. genau zwei (1,2)-Kanten \perp .

- In Knotengrad des äußeren Landes in Γ ist ungerade:

Γ Auf der Kante $\overline{12}$ des großen Dreiecks ~~Wird die ungerade Anzahl off~~ alternieren die Knotenbezeichnungen eine ungerade Anzahl off. ┘

○ \Rightarrow 3.8c) Es existiert ein kleineres Dreieck ungeraden Grades in Γ . □

(2) a) Betrachte das obere Dreieck

$$\Delta = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Zur Erinnerung: Eine Funktion

$$f: \Delta \rightarrow \Delta$$

heißt stetig, falls für alle $x \in \Delta$ und für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ ex., so dass

$$\forall y \in \Delta \text{ mit } \|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon.$$

Ein Punkt $x \in \Delta$ mit $f(x) = x$ heißt

Fixpunkt von f .

b) Satz (Brouwer'scher Fixpunktsatz)

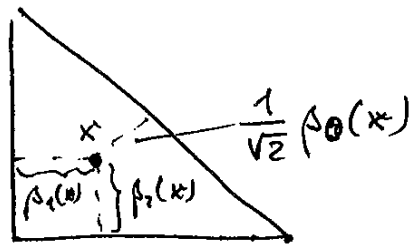
Jede stetige Funktion $f: \Delta \rightarrow \Delta$
besitzt einen Fixpunkt.

Bew. Zu $x = (x_1, x_2) \in \Delta$ definiere:

$$\beta_1(x) = x_1, \quad \beta_2(x) = x_2, \quad \beta_3(x) = 1 - x_1 - x_2.$$

Es gilt $\forall x \in \Delta: \beta_i(x) \geq 0$ & $\sum \beta_i(x) = 1$

○ baryzentrische Koordinaten.



Setze $M_i := \{x \in \Delta \mid \beta_i(x) \geq \beta_i(f(x))\}$

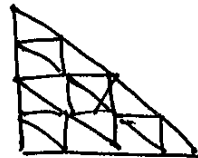
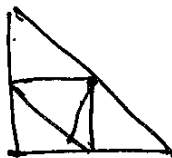
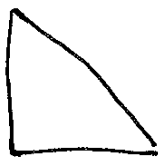
Offenbar gilt:

für $i=1,2,3$

$$M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \text{Fix } f = \{x \in \Delta \mid f(x) = x\},$$

$$\text{und } M_1 \cup M_2 \cup M_3 = \Delta.$$

Betrachte Folgen von Triangulierungen
von Δ :



...

Wähle Bezeichnung für die Knoten
 in früheren Triangulierungen, so dass die
 Voraussetzungen unter a) erfüllt sind
 und $\text{Ber}(x) = i \Rightarrow x \in M_i$.

\exists solche eine Bezeichnung existiert.

Für $x = (1, 0)$ gilt $f(x) = (0, 1, 0)$,
 also $\beta_1(x) = 1 \geq \beta_1(f(x))$ und $x \in M_1$.

Analog gilt $(0, 1) \in M_2$ und $(0, 0) \in M_3$.

Außerdem: Sei $x \in \text{conv}\{(1, 0), (0, 1)\}$

$$\Leftrightarrow \beta_1(x) + \beta_2(x) = 1 \Rightarrow \beta_1(x) \geq \beta_1(f(x))$$

oder $\beta_2(x) \geq \beta_2(f(x))$, d.h. $x \in M_1 \cup M_2$.

Analog gilt $\beta_3(x) + \beta_1(x) = 1 \Rightarrow x \in M_3 \cup M_1$

und $\beta_3(x) + \beta_2(x) = 1 \Rightarrow x \in M_3 \cup M_2$. \square

Sperner-Lemma \Rightarrow In jeder der immer
 feiner werden Triangulierungen von Δ es

ein kleines Dreieck $(a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3})$
 mit Ecken mit $0, 1, 2$

beschriftet sind, d.h. $a_{i,j} \in M_j$. $\forall i \geq 0 \forall j=0,1,2$

Betrachte die Punktfolge $(a_{1,1}, a_{2,1}, \dots)$,

und wähle konvergente Teilfolge.

$(a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \dots)$

mit $k_1 < k_2 < \dots$ Setze $a := \lim_{i \rightarrow \infty} a_{k_i}$

Es gilt $\forall i: a_{k_i} \in M_i \Rightarrow f_{\mathbb{P}}(a_{k_i}) \geq f_{\mathbb{Q}}(f(a_{k_i}))$

$\Rightarrow f_{\mathbb{P}}(a) \geq f_{\mathbb{P}}(f(a)) \Rightarrow a \in M_{\mathbb{P}}$
f. h. g.

Entsprechend existieren konvergente Teilfolgen

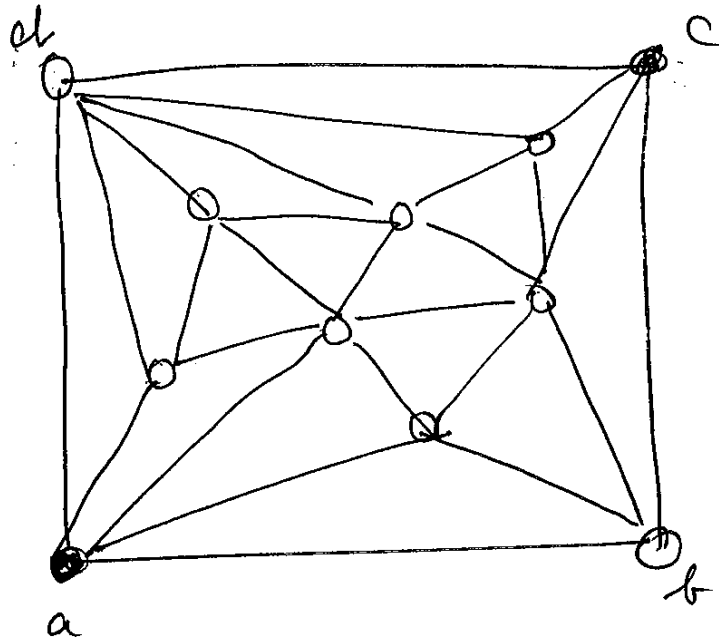
- für M_2 und M_3 . Da die Durchmesser der
Beide aber immer kleiner werden, stimmen
die drei Grenzwerte überein, und es
gilt $a \in M_{\mathbb{P}} \cap M_2 \cap M_3$, d. h. $f(a) = a$. \square

(3) Betrachte das folgende 2-Personen-Nullsumme
Gewinntspiel. Es sei Δ Triangulierung

- eines Quadrats Q , so dass kein
Knoten ~~ste~~ von Δ (außer den Ecken von Q)
auf dem Rand von Q liegt. Bezeichnen
die Ecken von Q mit a, b, c, d (~~off~~
~~der~~ in zyklischer Reihenfolge).

Zwei Spieler, Alice und Bob setzen (sequenz)
abwechselnd schwarz bzw. weiße Stein
auf die Knoten von Δ (außer $a, b, c,$

Alice gewinnt, falls es an Ende ein durchgehende Folge schwarzer Stein von a nach c gibt. Bob gewinnt, falls es ein durchgehende Folge weißer Stein von b nach d gibt.



Jordanscher Kurvensatz \Rightarrow Es können nicht beide gewinnen.

Prop Es gibt kein Unentschieden.

Bew Angenommen es gibt ein Unentschieden in einem Spiel, das zu Ende gespielt wurde, d.h. jedes Feld ist durch ein schwarzen oder weißen Stein besetzt.

Beschriftung a sind alle mit a durch
 den Knoten schwarzer Stein verbundene
 Felder mit 1, entsprechend b sind alle
 mit b durch weiße Stein verbundene Felder
 mit 2. Alle übrigen Felder sind mit 0
 beschriftet. Da weder Alice noch Bob gewonnen
 haben, sind c und d mit 0 beschriftet.

Kontrahieren die Knoten $\{c, d\}$ und wende
 das Approx. Lemma an \Rightarrow ex. ein (lokales)

Dreieck, dessen Ecken mit 0, 1, 2 beschriftet
 sind. Da aber der mit 0 beschriftete
 Knoten durch einen (schwarzen oder weißen)

Stein besetzt ist, ist er auch mit a
 oder b verbunden \square

Bem Falls das Spiel symmetrisch ist für
 Alice und Bob, so hat Alice (als
 Beginnender) eine Gewinnstrategie.

§ 5 Endliche projektive Ebenen

(1) a) Def Ein Tripel $(P, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ von Mengen mit $P \cap \mathcal{L} = \emptyset$ und $\mathcal{I} \subseteq P \times \mathcal{L}$ ~~symmetrische~~ Relation ~~ist~~ heißt Incidenzstruktur.

Bsp i) K Körper

$$(K^2, \{x + Ky \mid x, y \in K, y \neq 0\}, \epsilon)$$

affine Ebene

ii) $(\mathbb{R}^2, \text{Geraden in } \mathbb{R}^2, \epsilon)$

b) Def Eine projektive Ebene ist ein

Incidenzstruktur $(P, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, für die gilt

i) $\forall x, y \in P, x \neq y \Rightarrow \exists! L \in \mathcal{L} : x \mathcal{I} L \ \& \ y \mathcal{I} L$

ii) $\forall L, M \in \mathcal{L}, L \neq M \Rightarrow \exists! * \in P : x \mathcal{I} L \ \& \ x \mathcal{I} M$

iii) ~~$\exists *_{1, 2, 3, 4} \in P$~~ $\exists *_{1, 2, 3, 4} \in P$ (paarweise versch.)

und $\exists L_1, L_2, L_3, L_4 \in \mathcal{L}$ (— " —),

so dass

$$*_{1, 2} \mathcal{I} L_1, \quad *_{1, 3} \mathcal{I} L_2, \quad *_{1, 4} \mathcal{I} L_3,$$

$$*_{2, 4} \mathcal{I} L_4.$$

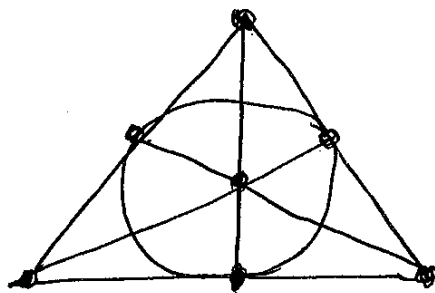
Bsp i) K Körper

$PG_2 K := (G_{3,1} K, G_{3,2} K, \subseteq)$ heißt

die projektive Ebene über K ,

wobei $G_{n,k} K = \{U \mid U \subseteq K^n \text{ mit } \dim U = k\}$

ii)



Fano. Ebene

$[= PG_2 \mathbb{F}_2]$

(2) Sei $P = (P, \mathcal{L}, \mathbb{I})$ eine projektive Ebene.

a) Für $L \in \mathcal{L}$ sei $[L] := \{x \in P \mid x \mathbb{I} L\}$

die zugehörige Punktreihe, und zu

$x \in \mathcal{L}$ sei $\mathcal{L}_x := \{L \in \mathcal{L} \mid x \mathbb{I} L\}$

das zugehörige Geradenbüschel.

Lemma Die Abbildung

$$\langle x, L \rangle : \mathcal{L}_x \rightarrow [L] : M \mapsto L \wedge M$$

für $x \notin L$ ist bijektiv und
Verknüpfung abb.

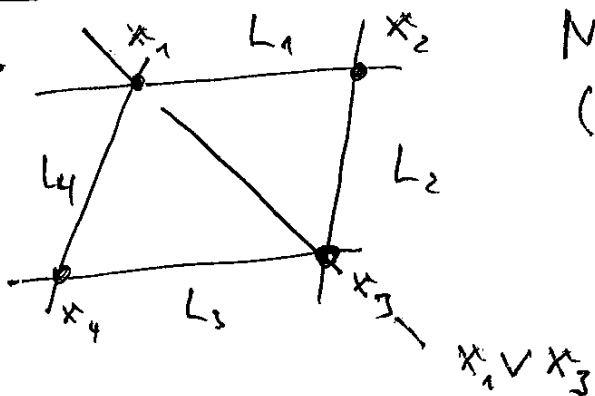
$$\langle L, x \rangle : [L] \rightarrow \mathcal{L}_x : y \mapsto x \vee y$$

b) Sei nun P endlich (d.h. P und \mathcal{L} endlich). Ein Konsequenz aus a) ist dann, dass es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$n = \#\mathcal{L}_{x_i} = \#[L] \quad \forall x_i \in P \\ \forall L \in \mathcal{L}$$

Lemma $n \geq 3$.

Bew



Nach iii) ex. Viereck $(x_1, L_1, x_2, L_2, x_3, L_3, x_4, L_4, x_1)$

Falls $x_1 v x_3 = L_1$, dann wären x_1, x_2, x_3 kollinear und $L_1 = L_2$ ~~bei~~ L_4 .

Analog folgt $x_1 v x_3 \neq L_4$

$\Rightarrow \#\mathcal{L}_{x_i} \geq 3$. □

Def Die Zahl $n-1$ heißt Ordnung von P .

Bem $PG_2 \mathbb{F}_q$ hat Ordnung q .

Vermutung: ~~q muss Prim sein~~

Die Ordnung einer endlichen projektiven Ebene ist eine Primzahlpotenz.

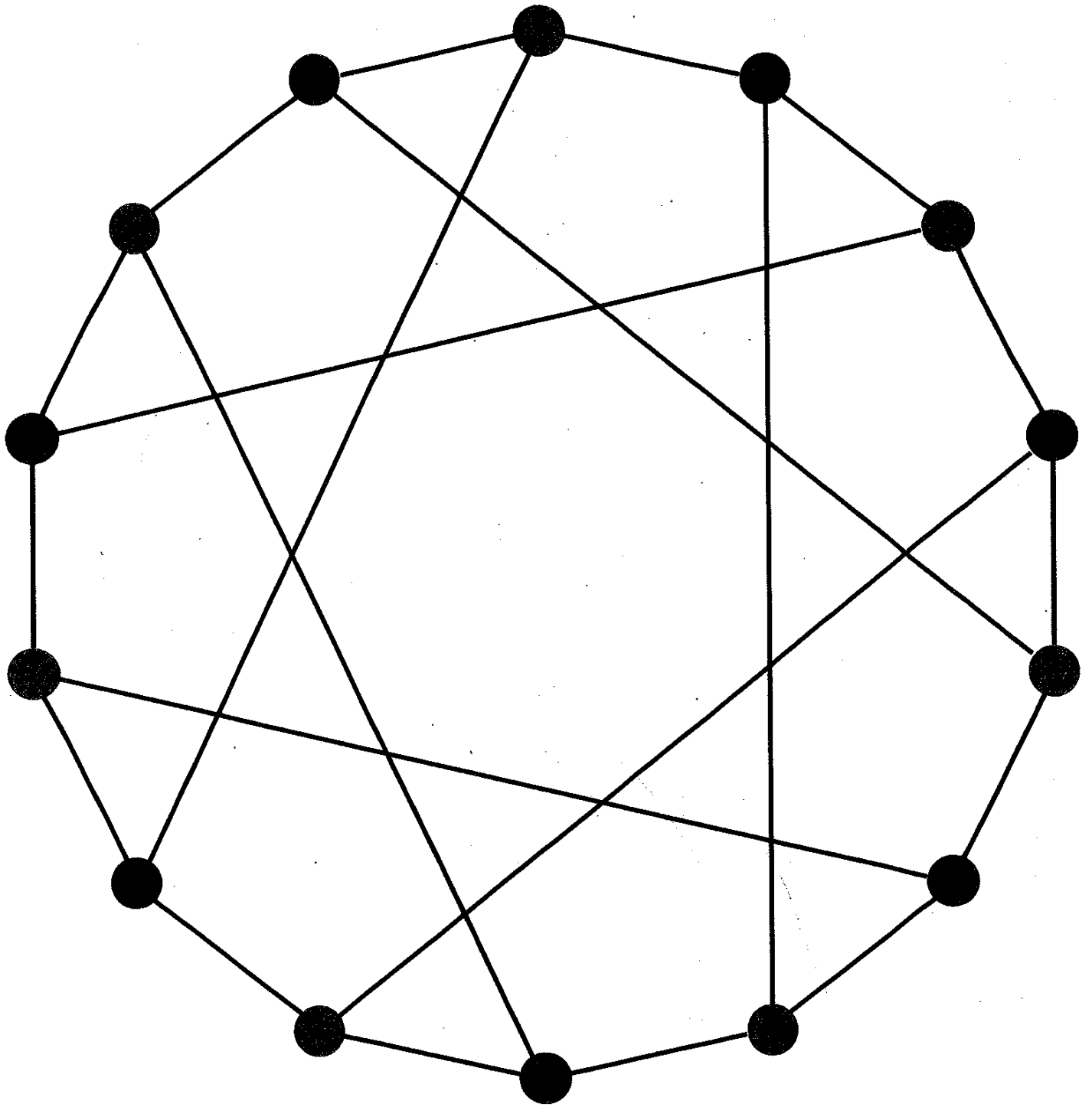
c) Prop Sei $P = (P, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ eine endliche projektive Ebene der Ordnung $q \in \mathbb{N}$.
 $\Rightarrow \#P = \#\mathcal{L} = q^2 + q + 1$.

Bew. Wir beweisen $\#P = q^2 + q + 1$
 [die andere Gleichung beweist man analog bzw. man folgert hi aus dem Dualitätsprinzip (siehe unten)].

Sei $x \in P$. Jeder Punkt $y \in P \setminus \{x\}$ liegt auf genau einer der $q+1$ Geraden durch x . Jede dieser Geraden enthält genau q Punkte (außer x).

$$\Rightarrow \#P = 1 + (q+1)q = 1 + q + q^2. \quad \square$$

od) Zu einer projektiven Ebene $P = (P, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ist auch $P^* = (\mathcal{L}, P, \mathcal{I}^{-1})$ eine projektive Ebene, die zu P dual projektiv Ebene.



(3) a) Def Eine Matrix $Q = \{1, \dots, n\}^{n \times n}$

in der in jeder Zeile und Spalte

jede der Zahlen $1, \dots, n$ genau

einmal vorkommt, heißt lateinisches Quadrat
der Ordnung n .

Bsp für $G = (\{x_1, \dots, x_n\}, *)$ eine Gruppe

Dann ist die Multiplikationstabelle

von G ein lateinisches Quadrat.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

Bem Indizes sind spezielle lateinische Quadrate
b) Def Zwei lateinische Quadrate

$A, B \in \{1, \dots, n\}^{n \times n}$ derselben

Ordnung heißen orthogonal,

falls

$$\#\{(A(i,j), B(i,j)) \mid 1 \leq i, j \leq n\} = n^2.$$

Bsp

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$
$$B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

c) Sei $A, B \in \{1, \dots, n\}^{n \times n}$ orthogonal
 lateinische Quadrate und

$$\pi \in \text{Sym}(\{1, \dots, n\})$$

ein ~~Bi~~ Permutation. Dann ist $A^\pi \in \{1, \dots, n\}^{n \times n}$
 mit

$$A^\pi(i, j) := \pi(A(i, j))$$

wiederum ein lateinisches Quadrat. Zusätzlich
 ist A^π orthogonal zu B .

Bsp A, B wie unter b) und $\pi = (12)$.

Dann ist

$$A^\pi = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

orthogonal zu B .

d) Satz Sei M eine Menge von paarweise
 orthogonalen lateinischen Quadraten
 der Ordnung n . Dann ist $\# M \leq n-1$.

Bew Wegen c) können wir \mathbb{F} annehmen,
 dass jedes der lateinischen Quadrate A_1, A_2, \dots
 in M als erste Zeile $(1, 2, \dots, n)$ hat

Wir betrachten ~~die~~ ^{die} Koeffizienten

$$A_1(2,1), A_2(2,1), \dots, A_\ell(2,1)$$

Wegen $A_1(1,1) = \dots = A_\ell(1,1) = 1$

sind diese Koeffizienten alle ungleich 1.

Ansonsten sind sie paarweise verschieden,

da sonst für

$$A_i(2,1) = A_j(2,1) = k, \quad i \neq j$$

die lateinischen Quadrate A_i und A_j

wegen

$$A_i(1,k) = A_j(1,k) = k$$

nicht orthogonal wären. Insgesamt folgt

$$\ell \leq n-1. \quad \square$$

8) Sei $K = \mathbb{F}_q$ der Körper mit q Elementen.

x_0, x_1, \dots, x_{q-1} , wobei $x_0 = 0$ und $x_i = 1$.

Für $k \in \{1, \dots, q-1\}$ definieren wir

Matrizen $A_k \in [q]^{q \times q}$ mit

$$A_k(i,j) := x_i x_k + x_j$$

antih. Op. in \mathbb{F}_q .

(UA): $\{A_1, \dots, A_{q-1}\}$ paarweise orth. lateinischen Quadrate

*) Def Eine affine Ebene ist ein

Inzidenzstruktur $\mathcal{A} = (P, \mathcal{L}, I)$ mit:

i) Je zwei Punkte haben eine eindeutige Verbindungsgerade

ii) Je zwei Geraden haben höchstens einen Schnittpunkt.

iii) Zu jedem Paar $(x, L) \in P \times \mathcal{L} \setminus I$ ex. genau eine Gerade $M \in \mathcal{L}$ mit $x \notin M$, die L nicht schneidet (Parallele).

iv) Ex. Viereck.

Bem. • Der projektive Abschluss einer affinen Ebene ist eine projektive Ebene

• Sei $P = (P, \mathcal{L}, I)$ eine projektive Ebene und $L \in \mathcal{L}$ eine beliebige Gerade.

Dann ist

$$(P \setminus \{L\}, \mathcal{L} \setminus \{L\}, I \setminus \{(P \setminus \{L\}) \times (\mathcal{L} \setminus \{L\})\})$$

eine affine Ebene.

g) Sei A_1, A_2, \dots, A_{m-1} eine Familie paarweise orthogonaler lateinischer Quadrate der Ordnung n . Setze

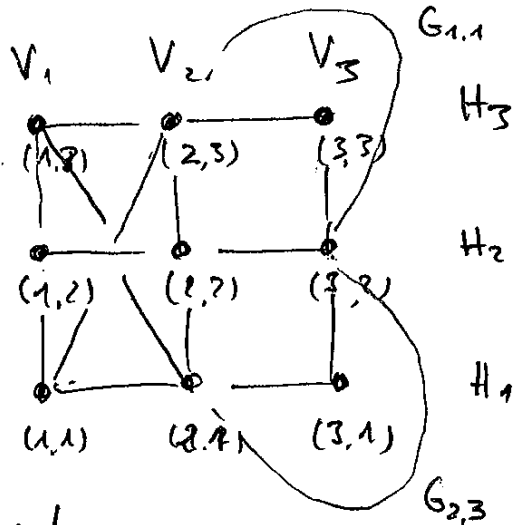
$$P := \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$$

Zur $i \in \{1, \dots, n\}$ definiere außerdem

$$H_i := \{(1, i), (2, i), \dots, (n, i)\}$$

und

$$V_i := \{(i, 1), (i, 2), \dots, (i, n)\}$$



Definiere

$$G_{k,m} := \{(i, j) \mid A_k(i, j) = m\}$$

Bsp Für $A_1 = A$ und $A_2 = B$ wie in b):

$$\boxed{G_{1,1}} = \{(1,1), (2,3), (3,2)\}$$

$$\boxed{G_{2,3}} = \{(1,3), (2,1), (3,2)\}$$

Satz Für $\mathcal{L} := \{V_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\} \cup \{H_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\} \cup \{G_{k,m} \mid k, m \in \{1, \dots, n\}\}$ ist $(P, \mathcal{L}, \epsilon)$ eine affine Ebene.

Bew [Skizze]

- i) $\{H_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ ist eine Parallelklasse von Geraden
 $\{V_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ — " —
 $\{G_{k,m} \mid m \in \{1, \dots, n\}\}$ — " — $\forall k$.

- ii) Je zwei Geraden haben höchstens einen Schnittpunkt:

┌ Sei $(v, w), (x, y) \in G_{k,m} \cap G_{k',m'}$

$\Rightarrow k \neq k'$. Es gilt

i)

$$A_k(v, w) = m = A_k(x, y) \quad \text{und}$$

$$A_{k'}(v, w) = m' = A_{k'}(x, y)$$

$$\Rightarrow (v, w) = (x, y)$$

A_k und $A_{k'}$ orthogonal



□

Bem Umgekehrt definiert sich eine affine Ebene der Ordnung q auch als Familie von $q-1$ paarweise orthogonale lateinischen Quadraten der Ordnung q

(4) Konstruktion (zweiter nicht-klassischer)
endliche projektive Ebenen

[vgl. Lazebnik & Thomas, Math of Comput
73 (247); 1547-1557, 2003]

a) Sei $P = (P, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ eine (endliche)
projektive Ebene. Der Graph

$$I(P) := (P \cup \mathcal{L}, \{ \{p, L\} \mid (p, L) \in \mathcal{I} \})$$

heißt Incidentgraph von P . [bipartit]

b) Sei G eine endliche abelsche Gruppe
der Ordnung q , und sei

$$f: G \times G \rightarrow G$$

eine Funktion, d.h. eine quadratische
Matrix mit Einträgen in G .

$$\text{Setze } P := G \times G = \{ (p_1, p_2) \}$$

und

$$\mathcal{L} := G \times G = \{ [L_1, L_2] \}$$

Wir definieren eine bipartite

Graphen Γ_f auf der Knotenmenge

$$P \cup \mathcal{L}.$$

durch

$$\{p, L\} \in E(\Gamma_f) \Leftrightarrow p_2 + L_2 = f(p_1, L_1)$$

\uparrow
Addition in G .

Lemma Γ_f ist g -regulär

Bew. Sei $p = (p_1, p_2)$ ein Punkt. Dann ex.

$\forall L_1 \in G$ genau ein $L_2 \in G$ mit

$$\{p, [L_1, L_2]\} \in E(\Gamma_f). \text{ Analog}$$

für jede Gerade $L = [L_1, L_2]$. \square

c) Definieren bipartiten Graphen Π_f , der Γ_f als nichterhobenen Teilgraphen enthält.

$$\text{Setze } \bar{P} := P \cup \{(p) \mid p \in G\} \cup \{(\infty)\}$$

$$\text{und } \bar{L} := L \cup \{[L] \mid L \in G\} \cup \{[\infty]\}$$

Dann ist

$$\Pi_f = (\bar{P} \cup \bar{L}, E(\Gamma_f) \cup \dots)$$

mit den ~~wobei~~ ~~den~~ zusätzlichen Kanten:

$$\{(p), [p, L_2]\} \quad \text{für } p, L_2 \in G$$

$$\{[L], (L, p_2)\} \quad L, p_2$$

$$\{(\infty), [L]\}$$

$$\{(p), [\infty]\} \quad \text{und } \{(\infty), [\infty]\}.$$

Der Graph Π_q ist bipartit, beide Farbklassen enthalten genau $q^2 + q + 1$ Knoten, und Π_q ist $(q+1)$ -regulär.

Prop Π_q ist der Incidencigraph einer endlichen projektiven Ebene der Ordnung q genau dann, wenn Π_q keinen Kreis

$C_4 \cong K_{2,2}$ der Länge vier enthält.

Bew (UA)

d) Seien $p = (p_1, p_2)$ und $p' = (p'_1, p'_2)$ Punkte, die auf der Geraden $L = [L_1, L_2]$ liegen, d.h.

$$p_2 + L_2 = f(p_1, L_1) \text{ \& } p'_2 + L_2 = f(p'_1, L_1)$$

$$\Leftrightarrow f(p_1, L_1) - p_2 = f(p'_1, L_1) - p'_2$$

$$\Leftrightarrow f(p_1, L_1) - f(p'_1, L_1) = p_2 - p'_2$$

Hieraus folgt das Lemma:

Lemma Γ_q enthält keinen Kreis C_4

$$\Leftrightarrow f(a, b) - f(a', b) \neq f(a, b') - f(a', b')$$

$$\forall a \neq a', b \neq b' \in \mathcal{C}$$

$$\Leftrightarrow f(a, b) - f(a, b') \neq f(a', b) - f(a', b')$$

Zu $a, a' \in G$ definiere wir die Zeilendifferenz

$$d = d_{a, a'} : G \rightarrow G : b \mapsto f(a, b) - f(a', b)$$

Kor Π_f ist Incidencigraph einer projektiven

Ebene \Leftrightarrow Jede Zeilendifferenz ist eine Permutation

\Leftrightarrow Jede Spaltdifferenz ist eine Permutation.

○ Def $f : G \rightarrow G$ heißt planar, falls die Bedingungen des Korollars erfüllt sind.

Bsp $G = (\mathbb{F}_5, +)$ $f : G * G \rightarrow G :$

0	0	0	0	0
0	1	2	3	4
0	2	4	1	3
0	3	1	4	2
0	4	3	2	1

$\Rightarrow \Pi_f$ Inc. graph von $\mathbb{P}G_2 \mathbb{F}_5$.

e)

Def $\sigma \in \text{Sym}(G)$ ~~ist~~ Orthomorphismus, falls $(a \mapsto \sigma(a) - a) \in \text{Sym}(G)$.

Ben Führt zu Orthomorphismen graph von G , Cliques der Größe $q-2$
 $[(0, 0, 0, \dots, 0)$ und id trivial] liefern planare F

(I) a) Sei G ein Graph mit n Knoten, der
 immer zu $K_{2,2} \cong C_4$ isomorphem
 Teilgraph enthält.

Satz Dann hat G höchstens $\frac{1}{2}(n^{3/2} + n)$
 Kanten.

Bem. Schranke fast scharf:

Sei G Incidenzgraph einer endlichen
 proj. Ebene der Ordnung q .

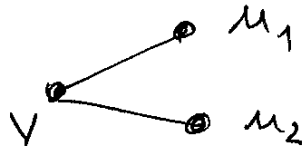
$$\Rightarrow \#V(G) = 2(q^2 + q + 1) =: n$$

$$\begin{aligned} \#E(G) &= (q^2 + q + 1)(q + 1) \geq (q^2 + q + 1)^{3/2} \\ &= \left(\frac{n}{2}\right)^{3/2} \approx 0.35 n^{3/2} \end{aligned}$$

• Es lassen sich $K_{2,2}$ -frei Graphen
 mit n Knoten und $\frac{1}{2}(n^{3/2} - n)$ viele
 Kanten konstruieren (für n PZ-Potenz).

• Verbinden von Dreiecken erlaubt
 immerhin noch ~~et~~ etwa $n^2/4$
 Kanten, Bsp: $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$.

b) Bew. des Satzes: Setze $V := V(G)$, $E := E(G)$.
 Sei M die Menge der ~~Wurzelknoten~~ (nicht isolierten) Teilgraphen
 von G der folgenden Form:



- $\forall \{n_1, n_2\} \in \binom{V}{2}$ ex. höchstens ein
 solches $v \rightarrow \#M \leq \binom{n}{2}$.
- $\forall v \in V$ ex. ~~höchstens~~ genau $\binom{\deg v}{2}$ (ungerade)
 Paare $\{n_1, n_2\} \Rightarrow \#M = \sum_{v \in V} \binom{\deg v}{2} \leq \binom{n}{2}$ (*)

Zusätzlich wissen wir: $\#E = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \deg v$.

- $\text{OE: } \forall v \in V: \deg v \geq 1$.

$$\Rightarrow \binom{\deg v}{2} \geq \frac{1}{2} (\deg v - 1)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{v \in V} (\deg v - 1)^2 \leq 2n^2$$

$$\Rightarrow \sum_{v \in V} (\deg v - 1) \cdot 1 \leq \sqrt{\sum_{v \in V} (\deg v - 1)^2} \sqrt{n}$$

Multiplication von

Cauchy-Schwarz

$$\leq \sqrt{2n^2} \sqrt{n} = n^{3/2}$$

$$\Rightarrow \#E = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \deg v \leq \frac{1}{2} (n^{3/2} + n). \quad \square$$

is listed for each dual pair, the numbers for a plane and its dual being the same.

The names of the planes and their descriptions are taken from Royle [20]. The three self-dual planes are the Desarguesian plane $PG(2,16)$ together with SEMI2 and SEMI4, the semifield planes with kernels F_2 and F_4 . The other planes are HALL – the Hall plane, LMRH – the Lorimer-Rahilly plane, JOWK – the Johnson-Walker plane, DSFP – the derived semifield plane, DEMP – the Dempwolff plane, and MATH – the Mathon plane (together with their duals).

It might be noted that one of the planes produced is *not* a translation plane, namely MATH. Representative normalized plane functions are given for the three self-dual planes in Table 3 and for the six non-self-dual planes in Table 4. Since only the additive structure of F_{16} is involved, the field can be regarded as F_2^4 under addition, and its elements thus correspond in a natural way to the numbers $0, \dots, 15$. These numbers are written in hexadecimal in Tables 3 and 4.

TABLE 3. Normalized plane functions for some self-dual planes of order 16

PG(2,16)	SEMI2	SEMI4
0000000000000000	0000000000000000	0000000000000000
0123456789abcdef	0123456789abcdef	0123456789abcdef
02318ab9cefd4675	02318ab9cefd4675	02318ab9cefd4675
0312cfde47568b9a	0312cfde47568b9a	0312cfde47568b9a
048c62eabf37d951	04c8519dfb37ae62	049d51c8ea73bf26
05af278d369c14be	05eb14fa729c638d	05be14af63d872c9
06bde85371ca9f24	06f9db2435cae817	06acdb71248ef953
079ead34f86152cb	07da9e43bc6125f8	078f9e16ad2534bc
08c4b37fd5196ea2	084ce6a291d57f3b	08e6a24c7f91d53b
09e7f6185cb2a34d	096fa3c5187eb2d4	09c5e72bf63a18d4
0af539c61be428d7	0a7d6c1b5f28394e	0ad728f5b16c934e
0bd67ca1924fe538	0b5e297cd683f4a1	0bf46d9238c75ea1
0c48d1956a2eb7f3	0c84b73f6ae2d159	0c7bf38495e26a1d
0d6b94f2e3857a1c	0da7f258e3491cb6	0d58b6e31c49a7f2
0e795b2ca4d3f186	0eb53d86a41f972c	0e4a793d5b1f2c68
0f5a1e4b2d783c69	0f9678e12db45ac3	0f693c5ad2b4e187

4.4. Computational method. Programs were written in the C language and were run on 800MHz Pentium machines operating Red Hat Linux version 7.2, at the Department of Pure Mathematics in Cambridge.

All the data for $q \leq 11$ can be computed in less than a couple of seconds. For $q = 13$ the orthomorphisms were found in about three seconds but the construction and analysis of the graph $\text{Orth}(F_{13})$ took a further twenty-five minutes.

For $q = 16$, the list of 15296512 orthomorphisms was found in just under a day by sixty machines working in parallel. The analysis of the graph and the enumeration of the K_{14} 's, along with their orbits, was performed by thirteen machines acting in parallel over a period of about four days (these machines being the available ones with the required 380Mb of memory).

In order to find isomorphisms between the thirty-three orbits and to find isomorphisms between the planes produced by the above method and the known planes listed on [20], the excellent nauty program of Brendan McKay [15] was used, via

TABLE 4. Normalized plane functions for some non-self-dual planes

HALL	LMRH	JOWK
0000000000000000	0000000000000000	0000000000000000
0123456789abcdef	0123456789abcdef	0123456789abcdef
02318ab9cefd4675	02318ab9cefd4756	02318ab9dfec5764
0312cfde47568b9a	0312cfde47568ab9	0312cfde56479a8b
048c62eb5f3a79d1	048d2e5a916c3f7b	049d51c8ea73bf26
05af278cd691b43e	05ae6b3d18c7f294	05be14af63d872c9
06bde85291c73fa4	06bca4e35f91782d	06acdb71359fe842
079ead35186cf24b	079fe184d63ab5c2	078f9e16bc3425ad
08c4b37da51f9e62	08c637afe2b419d5	08c4e63ba25d19f7
09e7f61a2cb4538d	09e572c86b1fd43a	09e7a35c2bf6d418
0af539c46be2d817	0af7bd162c495e83	0af56c827db14e93
0bd67ca3e24915f8	0bd4f871a5e2936c	0bd629e5f41a837c
0c48d196fa25e7b3	0c4b19f573d826ae	0c59b7f3482ea6d1
0d6b94f1738e2a5c	0d685c92fa73eb41	0d7af294c1856b3e
0e795b2f34d8a1c6	0e7a934cbd2561f8	0e683d4a97c2f1b5
0f5a1e48bd736c29	0f59d62b348eac17	0f4b782d1e693c5a

DSFP	DEMP	MATH
0000000000000000	0000000000000000	0000000000000000
0123456789abcdef	0123456789abcdef	0123456789abcdef
02318ab9cefd4756	02318ab9cfde5764	02318ab9cefd6457
0312cfde47568ab9	0312cfde46759a8b	0312cfde4756a9b8
04c96e1ab53fd287	04e96bf3581ca2d7	049d51c8eb72fa63
05ea2b7d3c941f68	05ca2e94d1b76f38	05be14af62d9378c
06f8e4a37bc295d1	06d8e14a97c2f5b3	06acdb71349e8f25
07dba1c4f269583e	07fba42d1e69385c	078f9e16bd3542ca
084eb72fda156c93	087e36cba25d49f1	08e6b35da14f7c92
096df24853bea17c	095d73ac2bf6841e	09c5f63a28e4b17d
0a7f3d9614e82bc5	0a4fbc726d831e95	0ad739e45c812bf6
0b5c78f19d43e62a	0b6cf915e428d37a	0bf47c83d52ae619
0c87d9356f2abe14	0c975d38fa41eb26	0c7be2951f68d3a4
0da49c52e68173fb	0db4185f73ea26c9	0d58a7f296c31e4b
0eb6538ca1d7f942	0ea6d781359fbc42	0e4a682cf3b795d1
0f9516eb287c34ad	0f8592e6bc3471ad	0f692d4b7a1c583e

the dreadnaut utility. This program allows the user to compute certain invariants of a graph which assist in establishing isomorphisms (or the absence of them) between graphs. Two invariants that are thought to work well with the graphs of projective planes, called `cellfano` and `cellfano2`, have been added to the library of invariants in version 2.0 of `nauty`; the second of these new invariants was used in the detection of isomorphisms between the planes in this study, and only about four minutes were needed on average to determine whether two planes were isomorphic (the time required being very much larger without the use of the invariant).

(6) a) Def Ein Tripel $(Q, +, \cdot)$ heißt Quasikörper, falls + und \cdot

binäre Operationen auf der Menge Q sind mit

- i) $(Q, +)$ ist eine Gruppe (mit Neutral 0)
- ii) $(Q \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Loop
(d.h. Gruppe ohne Assoziativität)
- iii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a, b, c \in Q$
- iv) $a \cdot x = b \cdot x + c$ besitzt genau eine Lösung $\forall a, b, c \in Q$.

b) Def Ein Quasikörper $(Q, +, \cdot)$

heißt Fachkörper, falls zusätzlich gilt

v) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \forall a, b, c \in Q$.

c) Bem Jeder Quasikörper der Ordnung ≤ 8 ist ein Körper.

d) Bsp (Dickson. Farbkörper)

$(\mathbb{F}_q, +, *)$ für

$$a * b := \begin{cases} ab & \text{falls } b \in \mathbb{F}_q \\ a^3 b & \text{sonst.} \end{cases}$$

e) [vgl. 3e)]

Sei $(Q, +, \cdot)$ ein Quasikörper mit

n Elementen $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2, \dots, x_{n-1}$

Dann bilden die $n \times n$ -Matrizen

$$A_n(i, j) := x_i \circ x_{i+k} + x_j$$

die Familie von paarweise orthogonale
latinitische Quadrate.

[Bew wie ÜA].

§ 6 Triangulierungen konvexer Polygone

(1) Wdh. • $S \subset \mathbb{R}^d$ konvex \Leftrightarrow

$$\forall x, y \in S: [x, y] := \{ \lambda x + (1-\lambda)y \mid \lambda \in [0, 1] \} \subseteq S.$$

• $\text{conv}(S) :=$ kleinste konvexe Menge, die S enthält
konvexe Hülle

• P konvexes n -Eck $\Leftrightarrow \exists v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^2$:
 $P = \text{conv} \{v_1, \dots, v_n\}$ & $\forall i \in [n]$:
 $\text{conv} \{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\} \not\subseteq P.$

(2) Sei $P = \text{conv} \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ konvexes
 n -Eck. Setze $V := \{v_1, \dots, v_n\}$

Def Eine Familie von Dreiecken $i=1, \dots, l$
 $\text{conv } W_i$ für $W_i \in \binom{V}{3}$ heißt

Triangulierung von P , falls

$$i) \quad P = \bigcup_{i=1}^l W_i$$

& ii) $\forall i \neq j: W_i \cap W_j$ ist ein
(möglicherweise leeres) Stk von W_i und W_j

←
leer, Ecke oder Kante

Für $1 \leq i < j < k < l \leq n$ kreuzen sich die Diagonalen il und jk (und alle anderen nicht).

Bsp Triangulierung des 5-Ecks, angegeben durch nicht-kreuzende Diagonalen:

$$\{\{1,3\}, \{1,4\}\}$$

Def $t_n := \#$ Triangulierungen eines konvexen n -Ecks.

Bsp $t_3=1, t_4=2, t_5=5, t_6=14, \dots$

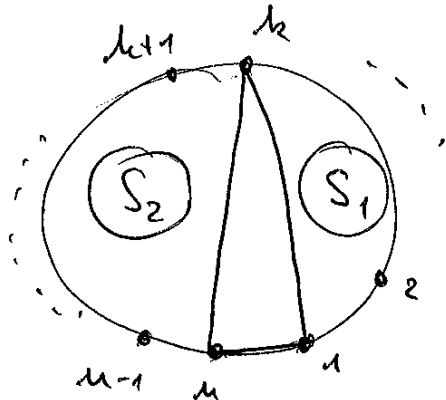
Prop Für $t_2 := 1$ erfüllt die Folge der Zahlen t_2, t_3, t_4, \dots die Rekursion

$$t_n = t_2 t_{n-1} + t_3 t_{n-2} + \dots + t_{n-1} t_2.$$

Bew. In jeder Triangulierung von P kommt die Kante $\{1, n\}$ in genau einem Dreieck vor; dies ist $\{k, k+1, n\}$. Die Gesamtzahl aller Triangulierungen ist die Summe der Triangulierungen mit dem Dreieck $\{k, k+1, n\}$ für $k=2, 3, \dots, n-1$.

Für jedes k ist $P \setminus \text{conv}\{1, k, n\}^\circ$

Vereinigung eines k -Ecks S_1 und
eines $(n-k+1)$ -Ecks S_2



- Die Polygone S_1 und S_2 können unabhängig trianguliert werden. Also beträgt die Anzahl der Triangulierungen von P mit dem Dreieck $\{1, k, n\}$ genau $t_k \cdot t_{n-k+1}$. \square

Bsp $t_7 = t_2 \cdot t_6 + t_3 \cdot t_5 + t_4 \cdot t_4 + t_5 \cdot t_3 + t_6 \cdot t_2$
 $= 1 \cdot 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1$
 $= 42$

$t_8 = 1 \cdot 42 + 1 \cdot 14 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 14 \cdot 1 + 42 \cdot 1 = 132$

(4) Satz Die Anzahl t_n der Triangulierung eines konvexen n -Ecks beträgt

$$\frac{1}{n-1} \binom{2n-4}{n-2}$$

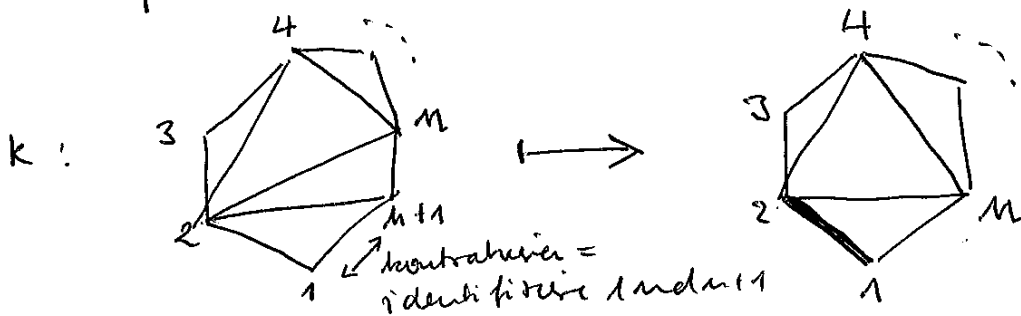
n -te Catalanzahl

Bew. Wie drum sind die Ecken $1, 2, \dots, n$
~~des n -Ecks P~~
 zyklisch angeordnet.

$\mathcal{T}_n :=$ Menge aller Triangulierungen ~~von P~~
 eines n -Ecks

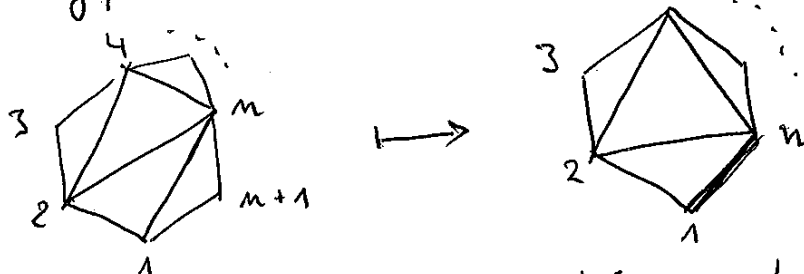
$$t_n := \# \mathcal{T}_n$$

Kontraktion der Kante $\{1, n+1\}$ definiert
 injektive Abbildung k von \mathcal{T}_{n+1} auf \mathcal{T}_n :



Größe der Faser $k^{-1}(T)$ für $T \in \mathcal{T}_n$

$$= \deg_T 1 \quad [\text{wobei } T \text{ aufgefasst als planarer Graph}]$$



(„verdoppelt“ ausgewählte Kante $\{1, k\}$
 zu Dreieck $\{1, k, n+1\}$)

$$\Rightarrow t_{n+1} = \sum_{T \in \mathcal{T}_n} \deg_T 1$$

Drei zyklische Gruppe der Ordnung n
 operiert transitiv auf der Menge der
 Ecken $1, 2, \dots, n$

$$\Rightarrow n t_{n+1} = \sum_{i=1}^n \sum_{T \in \mathcal{T}_n} \deg_T i = \sum_{T \in \mathcal{T}_n} \left(\sum_{i=1}^n \deg_T i \right)$$

Handshake-Lemma $\Rightarrow \sum_{i=1}^n \deg_T i = 2 \cdot \#E(T)$
 $= 2(2n-3)$

$$\circ \Rightarrow t_{n+1} = \frac{2(2n-3)}{n} \cdot t_n$$

$$\text{bzw. } t_n = \frac{2(2n-5)}{n-1} t_{n-1}$$

$$\Rightarrow t_n = \frac{2^{n-2} (2n-5)(2n-7) \dots 3 \cdot 1}{(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2}$$

per
 Induktion

$$= \frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!} = \frac{1}{n-1} \binom{2n-4}{n-2} \quad \square$$

Bem ex. $c_0, c_1 \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$c_0 4^n n^{-3/2} < \frac{1}{n-1} \binom{2n-4}{n-2} < c_1 4^n n^{-3/2}$$

für $n \gg 0$.

(5) Satz Es gibt so viele Triangulierungen eines konvexen $(n+2)$ -Ecks wie:

i) Binäre Wurzelbäume mit n Knoten (und $n-1$ Kanten)

↳ binär := jeder Knoten hat höchstens zwei Nachfolger →

ii) vollständige Klammerungen eines Produkts mit $(n+1)$ Faktoren

iii) Sequenzen der Länge $2n$ mit genau n Plus- und n Minuszeichen, so dass jede Anfangssequenz mindestens so viele Plus- wie Minuszeichen hat.

iv) Monotonen Pfade in \mathbb{Z}^2 von $(0,0)$ nach (n,n) , die in jedem Schritt weitergehen in Richtung $(1,0)$ oder $(0,1)$, so dass niemals die Diagonale überschritten wird.

Catalan-Strukturen

[vgl. Stanley, Enumerative Comb. II, Exercise 6.19]

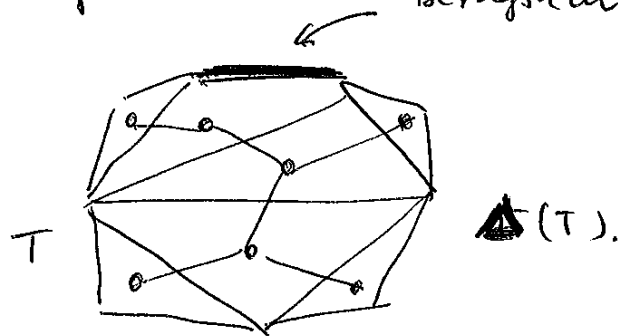
Bew. i) Zu $T \in \mathcal{T}_{n+2}$ betrachte den

Graphen $\Delta(T)$ mit

Knoten: Dreiecke in T

Kanten: Dreiecke teilen sich eine
(diagonale) Kante.

Bezeichne die Kante $\{1, n+2\}$ des $(n+2)$. Eckes
als Bezugskante;

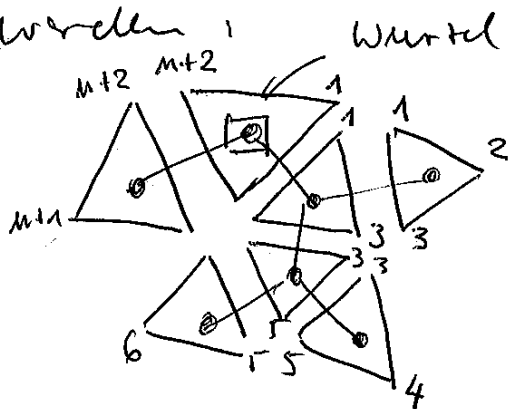


Fast man T als planaren Graph auf,
so ist $\Delta(T)$ der Dualgraph, der auf
den beschränkten Ländern reduziert wird.

Der Graph $\Delta(T)$ ist ein Baum, weil T
aufplanar ist. Erwähne den Knoten,
dessen zugehöriges Dreieck die Bezugskante
enthält zur Wurzel. Der Baum ist
bifurk, weil jedes Dreieck genau drei
Kanten hat, also zu höchstens drei
anderen Dreiecken benachbart, somit
Vorgänger und höchstens zwei

Nachfolger. Die Wurzel hat höchstens zwei Nachfolger, weil das Wurzeldreieck mindestens einen Randkante hat.

Dieser Prozess kann umgekehrt werden.



□

Bem Die übrigen Äquivalenzen ~~wurden~~

"i) \Leftrightarrow ii) \Leftrightarrow iii)" wurden in § 3

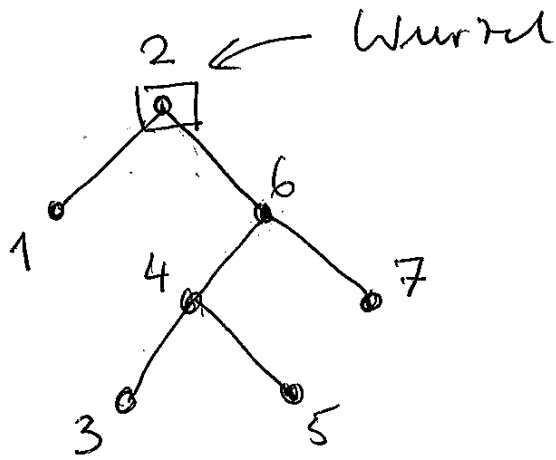
behandelt. Die Äq. "i) \Leftrightarrow iv)" ist WA

Bem Es gibt die folgende Beziehung ^{gekennzeichnet}

zwischen den n Knoten des ^{gekennzeichneten} Wurzelbaums und den $m+2$ Ecken des Polygons:

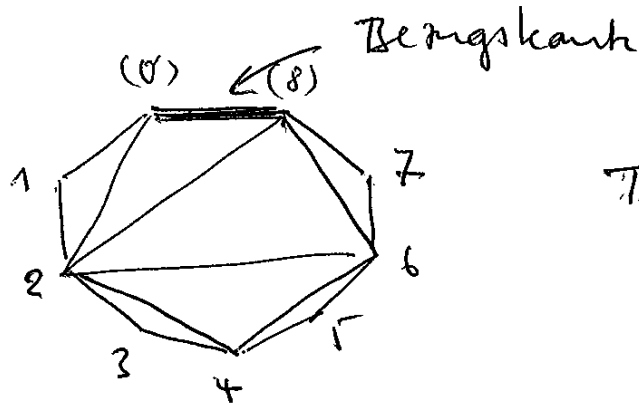
- Starte mit der Wurzel
- falls aktueller Knoten kein Blatt:
 - ~~links mit dem linken Teilbaum~~
 - numeriere Knoten im linken Teilbaum
 - numeriere ggf. rechten Teilbaum.

Bsp



geplanter
W. Baum

Symmetrische
Ordnung
der Knoten.



Triangulierung



↓ ↑ ↓ ↓ ↓ ↑ ↓ ↑ ↑ ↓ ↑ ↑

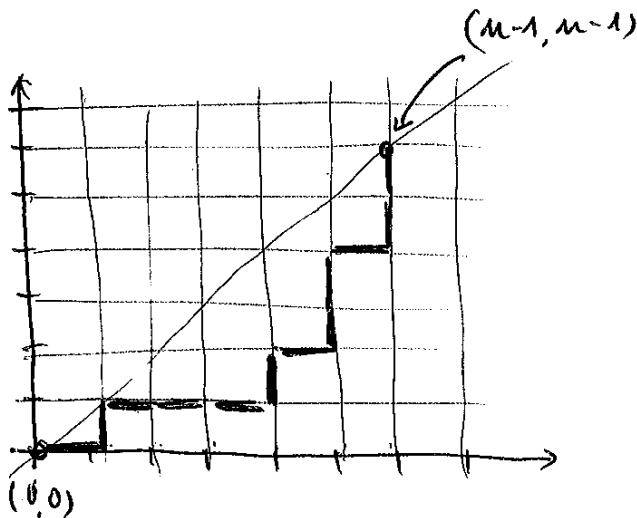
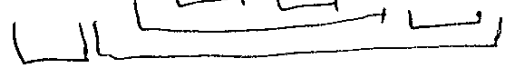
Pfeilsequenz

+ - + + + - + - - - + - - -

Vorzeichen

() ((() ()) ())

Klammerung



Gitterpfad.

(6) Beobachtung:

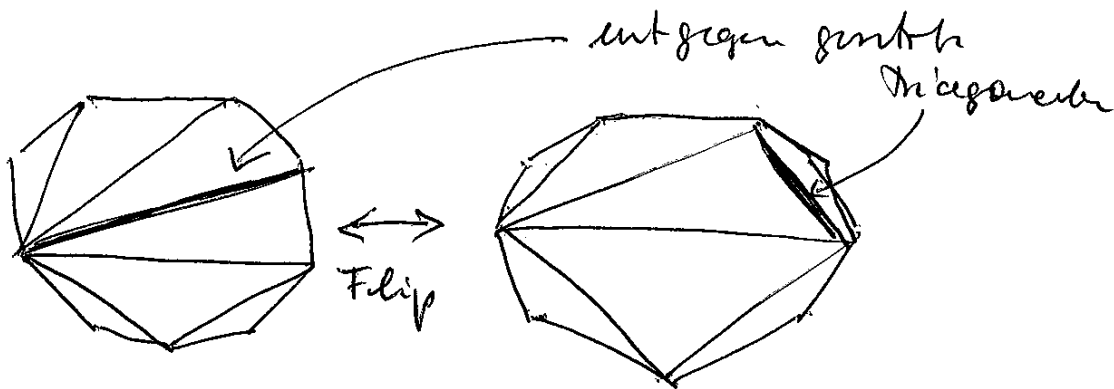
- i) Jedes konvexe Viereck hat genau zwei Triangulierungen $[T_4 = 2]$.
- ii) Sei Δ Triangulierung eines konvexen Polygons P . Jede Diagonale teilt es genau zwei benachbarte Dreiecke, die gemeinsam ein konvexes Viereck bilden.

(Diagonal-)

Def Flip = Austausch einer Diagonale

durch die entgegengesetzte.

Bsp



(7) ~~Sei~~ Sei P ein konvexes $(n+2)$ -Eck.

Def Flipgraph von P : $\Phi(P)$

Knoten: Triangulierungen

Kanten: Flips.

Bem Eigenschaften von $\Phi(P)$:

i) Anzahl der Knoten = $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

ii) Jede Triangulierung besitzt genau $n-1$ Diagonalen [dual zu Kanten des dualen Baums]. Jede definiert eine Flip

$\Rightarrow \Phi(P)$ ist $(n-1)$ -regulär

$\Rightarrow \# \text{Kanten} = \frac{n-1}{2(n+1)} \binom{2n}{n}$

iii) $\Phi(P)$ ist 3-er:

† Wähle bel. Ecke i . Genau $n-1$

der Ecken von P sind nicht zu i benachbart. $\Rightarrow n-1$ Diagonalen;

definiert Triangulierung; ist Standard.

Triangulierung. Sei Δ ~~ein~~ nicht

~~ist~~ die ist Standard Triangulierung,

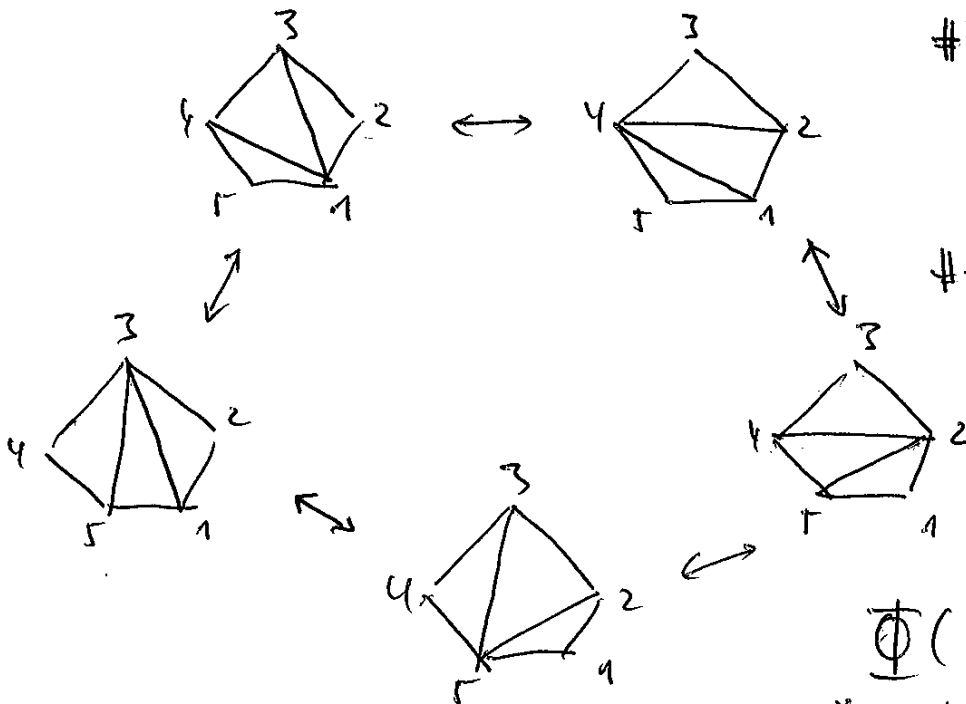
~~Sei nicht i zu zwei benachbarte~~

~~Wählen von Δ wähle Dreieck~~

$i j k$, so dass j und k nicht
 benachbart sind. Flippen der
 Diagonale $j k$ ergibt Triangulierung,
 die in der der Grad der Ecke i um
 1 größer ist.

\Rightarrow Jede Triangulierung kann mit
 höchstens $n-1$ Flips in die i -te
 Standard-Triangulierung gebracht werden.
 D.h. der Durchmesser von $\Phi(P)$
 beträgt höchstens $2n-2$.

Bsp



$$n=3$$

$$\#V = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 6}$$

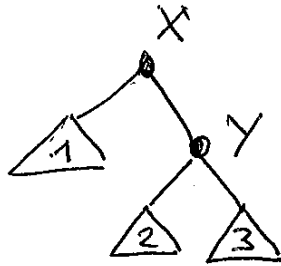
$$= 5$$

$$\#E = \frac{n-1}{2} \binom{2n}{n}$$

$$= 5$$

$\Phi(\Gamma\text{-Ecke})$
 Durchmesser
 = 2.

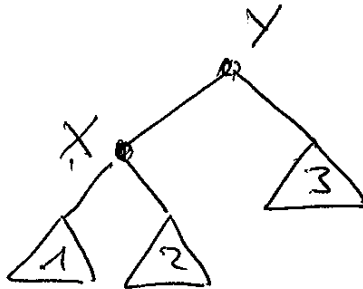
(8) Betrachte binären Baum



[Teilbaum 1, 2, 3
dürfen belie-
big]

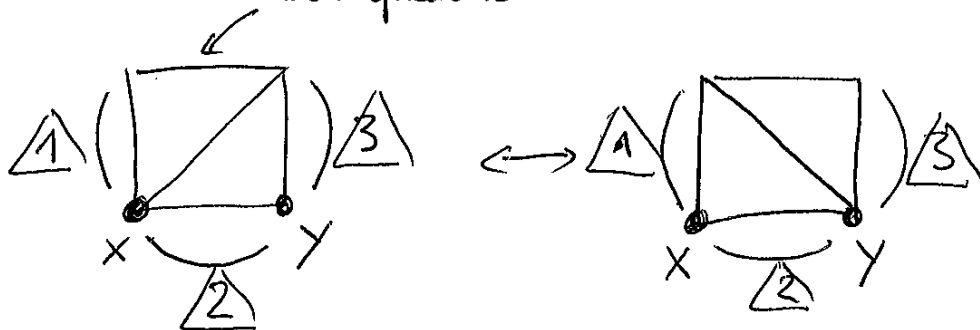
Durch Rotation der Kante (X, Y)

entsteht der Baum

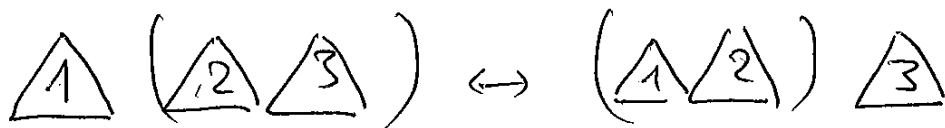


AVL-Bäume
Cormen, Leiserson,
Rivest, Stein

- Entspricht Diagonalskip:
Kernkante



- Entspricht Anklammerung



(9) Wie groß ist

$f_m :=$ Durchmesser $\Phi(n\text{-Ecke})$?

Prop i) $f_m \leq 2m - 10 + \frac{12}{m}$

$$\Rightarrow f_m \leq 2m - 10 \quad \forall m > 12$$

$\forall m \geq 5$.

ii) $f_{m+1} \leq f_{m+1} \leq f_m + 3$

Bew. Betrachte Triangulierungen Δ und Δ'

des n -Ecks $P = \text{conv}(1, 2, \dots, n)$.

~~Setze~~ Sei d_i und d_i' die ~~die~~ Knotengrade

der Ecken i in Δ bzw. Δ' (ausgestrichelt

als planarer Graph). In 7, iii) wurde

gezeigt, dass es in $\Phi(P)$ einen Pfad

von Δ nach Δ' über $(2m-2 - d_i - d_i')$

Flips gibt (über die i -te Standard

Triangulierung).

$$\Rightarrow f_m \leq 2m - 6$$

1. Idee: minimiere über alle i :

2. Idee: mittel über alle i :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2m-2 - d_i - d_i') = 2m-2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n d_i + \sum_{i=1}^n d_i' \right)$$

$$= 2m-2 - \frac{8m-12}{n} = 2m-10 + \frac{12}{n}$$

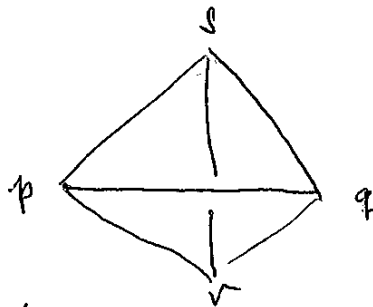
$$\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n d_i' = 2(2m-3)$$

(10) Satz (Heaton, Tarjan & Thurston 1993)

$$S_n = 2n - 10 \quad \forall n \gg 0.$$

Bem [geometrische Interpretation von Flips]

- betrachte konvexes Viereck als
keine Projektion eines Tetraeders:

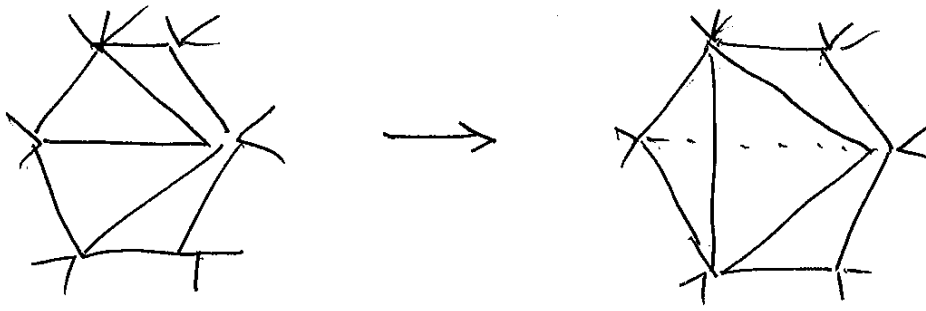


- die beiden Triangulierungen des
Vierecks entsprechen Vorder- und
Rückseite des Tetraeders.

Idee • Starte mit ~~dem~~ Triangulierung Δ

des n -Ecks P . Betrachte dies als
abstrakter simplicialkomplex [Triangulierung
eines 2 -dimensionalen Balls].

- Für jeden Flip auf dem Weg von
 Δ nach Δ' lege sukzessive
Tetraeder an, die diese Flips repräsentieren.
Es entsteht ein Folge abstrakter
 3 -dimensionaler simplicialkomplexe.



• Ohne Einschränkung:

+ Δ und Δ' haben keine Dreiecke gemeinsam

○ + Δ und Δ' haben sogar keine Diagonale gemeinsam

⇒ unterschiedl. Komplex in 3-Ball,
 dessen Rand $\Delta \cup_p \Delta'$ ist;
 hierfür werden die Ränder von Δ
 und Δ' (beide = P) wiederum
 identifiziert.

Lem Falls die Triangulierung 2. Sphäre

$\Delta \cup_p \Delta'$ nicht zu einer Triangulierung
 des 3-Balls mit $< k$ Tetraedern
 fortgesetzt werden kann, dann

gilt $\text{dim}_{\mathbb{Z}(P)}(\Delta, \Delta') \geq k$.

(11) Ber [Interpretation der Schwärze $2n-10$]
für $n \geq 13$

- triangulierte 2. Sphäre
= maximal planarer Graph,
dessen äußeres Land ein Dreieck
ist.

- dualer Graph ist 3-regulär

⇒ triangulierte 2. Sphäre mit
Euler
 n Ecken hat genau $2n-4$
Dreiecke

- falls $n \geq 13$, dann existiert
eine Ecke von Grad ≥ 6 ;

+ wähle solche eine Ecke v , und
menge ab über über den $\leq 2n-10$
Dreiecken, die v nicht enthalten.

Vermutung: Für alle $n \geq 13$ existiert

ein nichttriviales 3-Polytop mit n Ecken,
dessen Kanten (auch kombinatorisch)
nicht mit weniger als $2n-10$ Tetraedern
trianguliert werden kann.

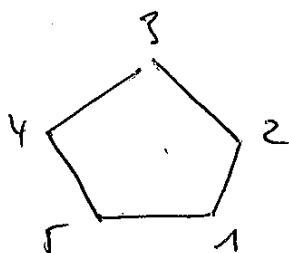
Sei P_n ein konvexes n -Eck.

Def Der abstrakte Simplicialkomplex mit $\Sigma(P_n)$

Eckenmenge V : Diagonale in P

Seiten: Mengen paarweise sich nicht berührende Diagonale.

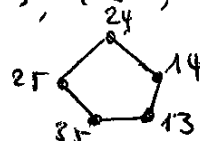
○ Bsp



ist Simplizialkomplex von P_n .

$$V = \{ \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\} \}$$

$$\Sigma = \langle \{13,14\}, \{24,25\}, \{13,35\}, \{24,14\}, \{25,35\} \rangle$$



○ Bem : $\# V = \binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n$
 $= \frac{n(n-3)}{2}$

• Facetten von $\Sigma(P)$ \leftrightarrow Triangulierungen von P

$$\Rightarrow \# \text{Facetten} = \frac{1}{n-1} \binom{2n-4}{n-2}$$

• $\dim \Sigma(P_n) = n-4$.

• $\Sigma(P_n) \approx \mathbb{S}^{n-4}$

Betrachte das folgende

System von linearen Gleichungen / Ungleichungen
in \mathbb{R}^{n-1} :

$$x_j - x_i \geq (i-j)^2 \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq n-1$$

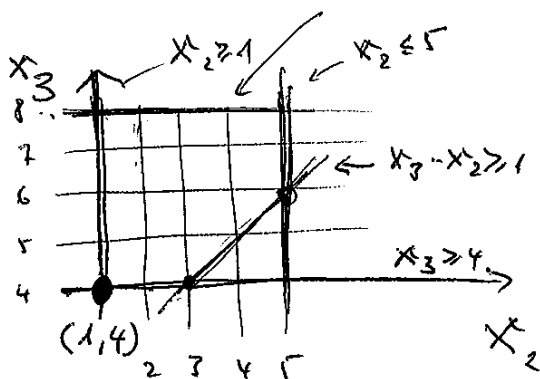
$$x_1 = 0$$

$$x_{n-1} = (n-2)^2$$

○

Die Menge der zulässigen Punkte ist ein
(n-3)-dimensionales Polytop, das (n-3)-
dimensionale Assoziater. A_{n-3}

Bsp $n=5$ $x_3 \leq 8$



$$x_2 - x_1 = x_2 \geq 1 \quad \checkmark$$

$$x_3 - x_1 = x_3 \geq 4 \quad \checkmark$$

$$x_3 - x_2 \geq 1$$

$$x_4 - x_2 = 9 - x_2 \geq 4$$

$$x_4 - x_3 = 9 - x_3 \geq 1$$

○

Bem. • A_{n-3} ist ein (n-3)-dimensionales
Polytop mit $\frac{1}{n-1} \binom{2n-4}{n-2}$ Ecken
und $\frac{n(n-3)}{2}$ Facetten. einfach.

$$\partial A_{n-3} \cong \sum (P_n)$$

als Simplexkomplex

(14) Bun

- Das Associaed A_{n-3} ist ein Sekundärpolytop von P_n
 - + Ecken entsprechen (regulären) Triangulierungen
 - + Kanten entsprechen Fächern
 - + Facetten entsprechen (regulären) größten Unterteilungen [hier: Diagonal splits].

○

- Gitterpolytope \rightarrow ~~torische Ideale~~
torische Ideale \rightarrow Größenfächer

- Seien P, Q Polytope und $f: P \rightarrow Q$ eine surjektive lineare Abbildung.

$$\gamma: Q \rightarrow P \text{ Schnitt} \Leftrightarrow f(\gamma(x)) = x \quad \forall x \in P$$

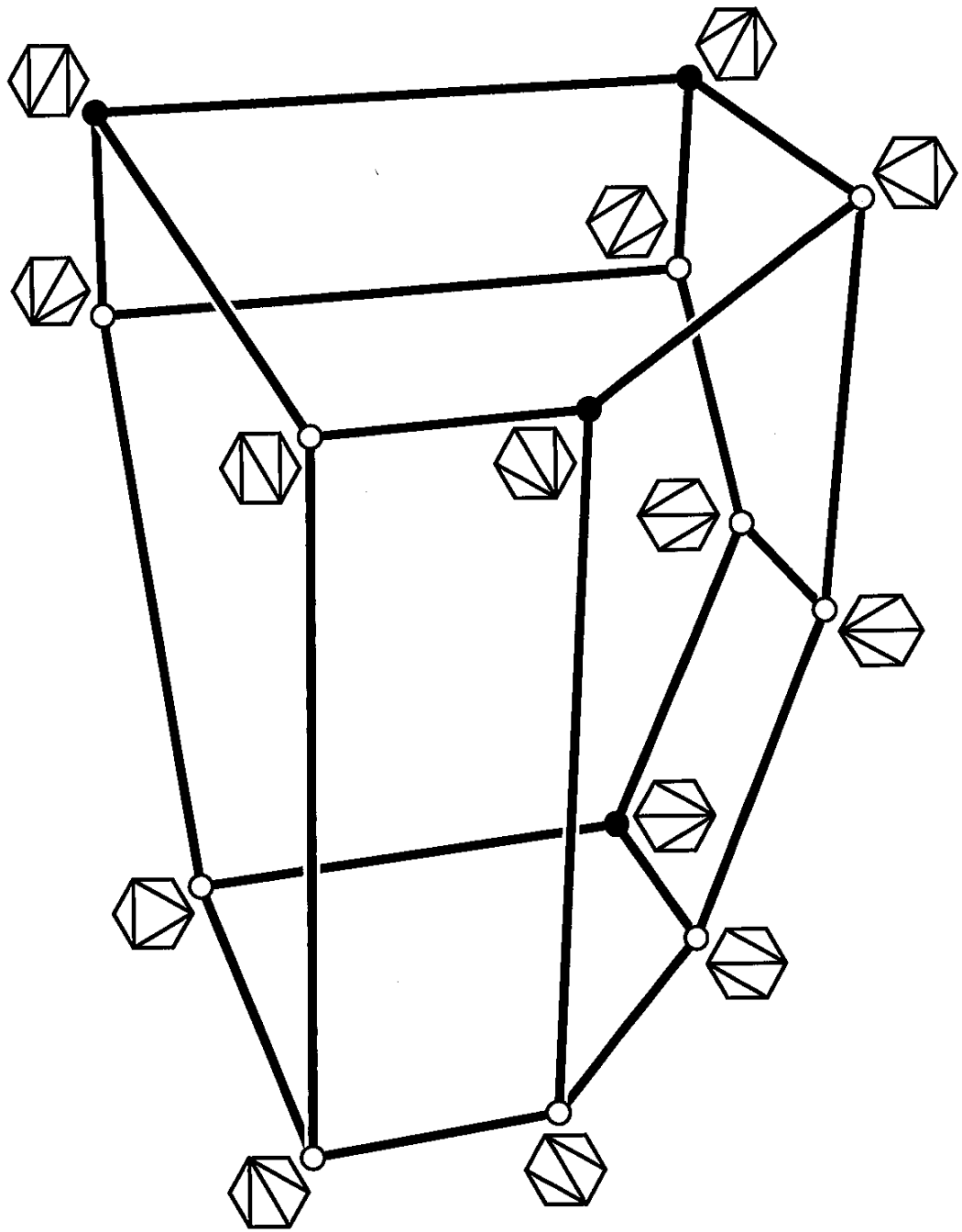
○ Setze $z(\gamma) := \frac{1}{\text{vol}(Q)} \int_Q \gamma(x) dx$.

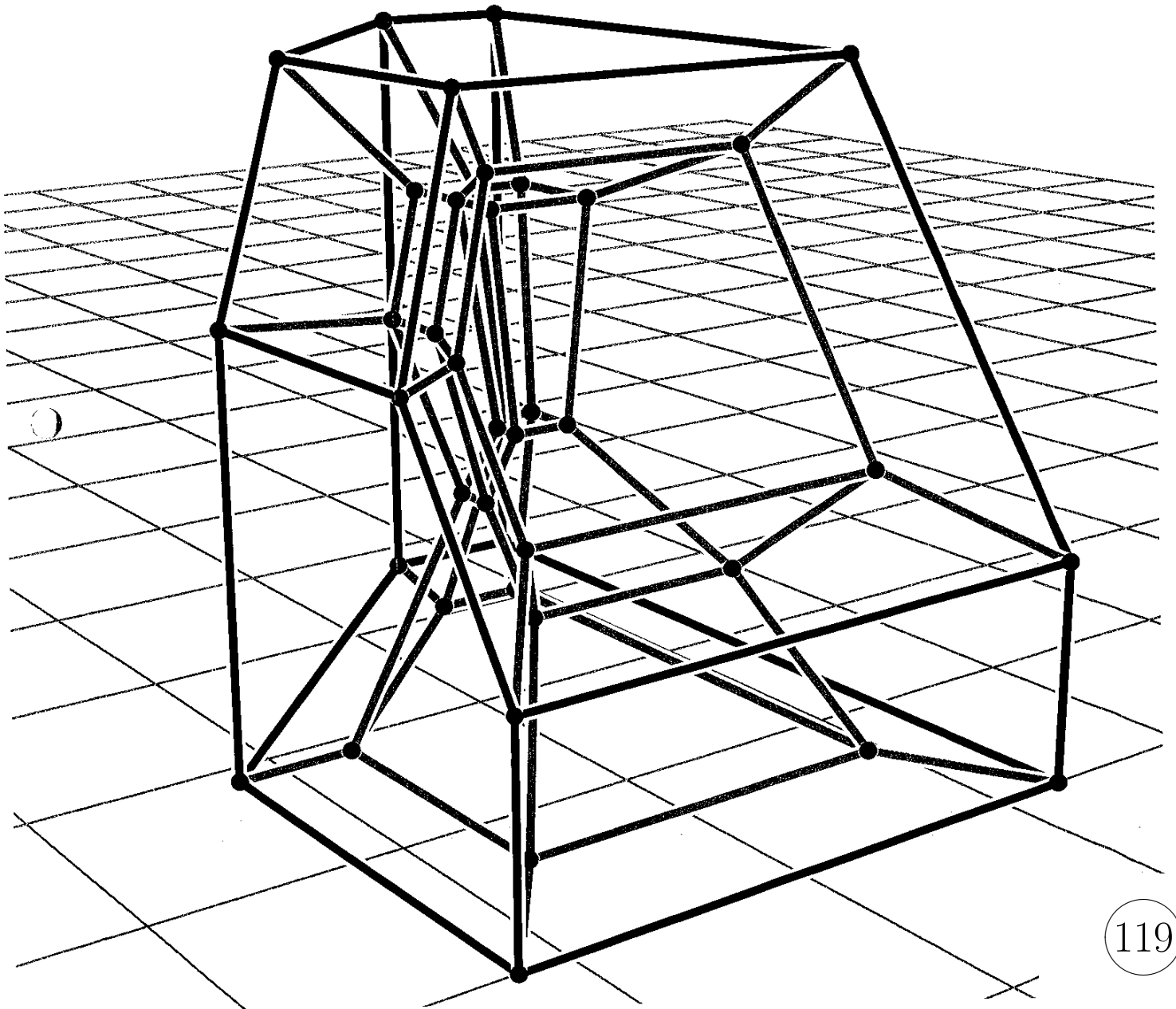
Faserpolytop $\Sigma(f) := \{z(\gamma) : \gamma \text{ Schnitt}\}$

(ist in Polytop)

Bsp Q Intervall, P Simplex

\leadsto Sekundärpolytop.





§ 7 Erzeugende Funktionen

- (1) a) Eine ~~unendliche~~ Folge von komplexen ~~ganzen~~ Zahlen (bzw. Elementen aus einem beliebigen Ring)

$$A = (a_0, a_1, a_2, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$$

lässt sich darstellen als formale Potenzreihe

$$A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$$

[hier in der Unbestimmten z]

Not: $\mathbb{C}[[z]]$ = Menge aller formaler Potenzreihen mit Koeff in \mathbb{C} .

Bem: Stellt man sich z als komplexe

Zahl vor, kann man nach Konvergenz der Reihe fragen. Im Konvergenzbereich

$$\text{definiert } A: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto A(z)$$

eine komplex analytische, d. h.

holomorphe Funktion.

Def Die Potenzreihe $A(z)$ heißt erzeugende Funktion der Folge $A = (a_0, a_1, \dots)$.

Not: Sei $A(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$.

$$[z^n] A(z) := a_n \quad \text{n-ter Koeffizient von } A.$$

b) Potenzreihen können addiert werden:

Zu $A, B \in \mathbb{C}[[z]]$ ist

$$[z^n] \overbrace{(A+B)}^{(A(z)+B(z))} = [z^n] A + [z^n] B.$$

Produkt und Folgeresultate werden definiert:

Sei $A = (a_0, a_1, \dots)$ und $B = (b_0, b_1, \dots)$

Dann ist

$$\begin{aligned} A(z)B(z) &= (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots)(b_0 + b_1 z + \dots) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)z^2 \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

d. h.

$$[z^n] (A(z)B(z)) = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Die Folge der Koeffizienten der Reihe $A(z)B(z)$ heißt Faltung von A und B .

Insgesamt: $(\mathbb{C}[[z]], +, \cdot)$ kann Ring mit 1, nullteilerfrei

c) Bsp / Anwendung

i) Binomialatz (1.3.d):

$$(1+z)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} z^k$$

Beachte: Wegen $\binom{r}{k} = 0$ für $k > r$
ist die Potenzen auf der rechten Seite
endlich.

In $\mathbb{C}[[z]]$ gilt offenbar die Gleichung

$$(1+z)^r (1+z)^s = (1+z)^{r+s} \quad \text{für } r, s \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} &= [z^n] \left((1+z)^r (1+z)^s \right) \\ &= [z^n] \left((1+z)^{r+s} \right) = \binom{r+s}{n}. \end{aligned}$$

Vandermondegleichung

ii)

$$(1-z)^r (1+z)^r = (1-z^2)^r$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{r}{n-k} (-1)^k &= (-1)^{n/2} \binom{r}{n/2} \\ &\text{für } n \in 2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Für $n=3$:

$$\binom{r}{0} \binom{r}{3} - \binom{r}{1} \binom{r}{2} + \binom{r}{2} \binom{r}{1} - \binom{r}{3} \binom{r}{0} = 0,$$

analog für bel. $n \in 2\mathbb{Z}+1$.

Für $n=2$:

$$\binom{r}{0}\binom{r}{2} - \binom{r}{1}\binom{r}{1} + \binom{r}{2}\binom{r}{0} = 2\binom{r}{2} - r^2 = -r$$

d) Satz (Binomialatz, vgl. 1.3d)

Für $x, y, r \in \mathbb{C}$ gilt

$$(x+y)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k y^{r-k}$$

*) falls $r \in \mathbb{N}$ oder $|x/y| < 1, y \neq 0$.

Bew. Im Fall $r \in \mathbb{N}$ ist die Summe

endlich und durch 1.3d) bewiesen.

Der Fall $|x/y| < 1$ lässt sich zurückführen auf [durch Substitution $x/y \rightarrow z$]:

$$\sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} z^k, \quad |z| < 1.$$

absolut konvergent!

Für eine holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

gilt die Taylorformel

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f(0)}{0!} z^0 + \frac{f'(0)}{1!} z^1 + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \dots \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \end{aligned}$$

Für $v^k := v(v-1)(v-2) \dots (v-k+1)$

und $f(z) := (1+z)^v$ gilt

$$f^{(k)}(z) = v^k (1+z)^{v-k}$$

Für $z=0$ heißt das

$$f^{(k)}(0) = v^k \cdot 1$$

und die Behauptung folgt aus $\frac{v^k}{k!} = \binom{v}{k}$.

\sum konvergent für $|z| < 1$. $\textcircled{\text{WA}}$

□

e) Für $|z| < 1$ folgt hieraus

$$\frac{1}{(1-z)^{n+1}} = (1-z)^{-n-1} = \sum_{k \geq 0} \binom{-n-1}{k} (-1)^k z^k$$

$$= \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{k} z^k \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

und im Spezialfall $n=0$:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots = \sum_{k \geq 0} z^k$$

geometrische Reihe

Tatsächlich gelten diese Gleichungen
sogar im Quotientenkörper $\mathbb{C}((z))$ von $\mathbb{C}[[z]]$.

$$f) \text{ Kor } \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k \geq 0} \binom{k}{n} z^k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(2) ~~in~~ In 1.5c) hatten wir uns mit
fixpunktfreie Permutationen befasst.

$D_n = \#$ fixpunktfreie Permutationen
in S_n .

$$=: n! \quad \underline{\text{Dehn'sche Fakultät}}$$

$$= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

Offenbar gilt:

$$n! = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} (n-k)!$$

bzw.

$$1 = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$

Da die erzeugende Funktion der

Folge $(\frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \dots)$ die Potenzreihe

e^z ist, gilt für

$$D(z) := \sum_{k \geq 0} \frac{k!}{k!} z^k$$

die Gleichung

$$\frac{1}{1-z} = e^z D(z)$$

$$\Leftrightarrow D(z) = \frac{1}{1-z} e^{-z} = \frac{1}{1-z} \left(\frac{1}{0!} z^0 - \frac{1}{1!} z^1 + \frac{1}{2!} z^2 - \dots \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = D_n / \#(\text{Sym}(n))$$

↑
Koeffizientenvergleich

(3) Lösung von Rekursionen I

a) Die Fibonaccifolge ist gegeben

durch

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2$$

| | | | | | | | | | | | | |
|----------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| <u>F_n</u> | n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| <u>F_n</u> | | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 |

○ b) Wir wollen diese Rekursion auflösen, d.h. wir wollen F_n aus n direkt berechnen.

i) Hierin setzen $F_n = 0$ für $n < 0$.

Dann gilt die vollständige Rekursion

$$(*) \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + [n=1]$$

ii) Brüche (*) aus als Gleichung der erzeugenden Funktion. Index. Gleichung entspricht Multiplikation mit einer Potenz von z :

$$F(z) = \sum F_n z^n = \sum F_{n-1} z^n + \sum F_{n-2} z^n$$

$$(**) \quad \quad \quad + \sum [n=1] z^n \\ = zF(z) + z^2F(z) + z$$

iii) Für gegebenes z ergibt sich also

$$(***) \quad F(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$$

iv) Brüche nun die rechte Seite i(***) als formale Reihe in z aus und bestimme die Koeffizienten.

○ Ansatz: $(1-z-z^2) = (1-\alpha z)(1-\beta z)$ (*)
für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)} = \frac{a}{1-\alpha z} + \frac{b}{1-\beta z}$$

für geeignete
 a, b

○ $\Rightarrow F(z) = z \left(\frac{a}{1-\alpha z} + \frac{b}{1-\beta z} \right)$

$$= z \left(a \sum \alpha^m z^m + b \sum \beta^m z^m \right)$$
$$= \sum_n (a \alpha^{n-1} + b \beta^{n-1}) z^n$$
$$\Rightarrow F_n = a \alpha^{n-1} + b \beta^{n-1}$$

Es bleibt, α, β, a, b zu bestimmen.

e) Exkurs:

$$\text{Zur } q(z) = 1 + q_1 z + \dots + q_d z^d \in \mathbb{C}[z]$$

sei

$$d \geq 1, q_d \neq 0$$

$$q^R(z) := z^d + q_1 z^{d-1} + \dots + q_d$$

das reziproke Polynom.

$$\text{Es gilt } q(z) = z^d q^R\left(\frac{1}{z}\right).$$

○ Falls $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von q^R sind, d.h.

$$q^R(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_d),$$

das ~~gilt~~ folgt

$$\begin{aligned} q(z) &= z^d \left(\frac{1}{z} - \alpha_1\right) \left(\frac{1}{z} - \alpha_2\right) \dots \left(\frac{1}{z} - \alpha_d\right) \\ &= (1 - \alpha_1 z)(1 - \alpha_2 z) \dots (1 - \alpha_d z) \end{aligned}$$

○ d) Angewandt auf die Fibonaccifolge bedeutet dies, dass wir α und β in $(*)^4$ als Nullstellen des reziproken Polynoms gewinnen.

$$q^R(z) = z^2 - z - 1 = \left(z - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(z - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

und

$$q(z) = 1 - z - z^2 = \left(1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} z\right) \left(1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} z\right)$$

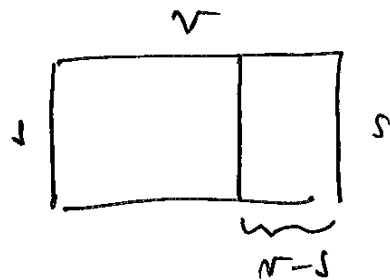
e) Exkurs:

Wir betrachten die Nullstellen
von $q^{\mathbb{R}}$ mit

$$\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \hat{\varphi} := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Die Zahl φ heißt goldener Schnitt.

Betrachte Rechteck



mit Kantenlängen v, s , $v \geq s$;

so dass

$$x := \frac{v}{s} = \frac{s}{v-s} = \frac{1}{x-1}$$

d. h. $x^2 - x - 1 = 0$

und $x = \varphi$ (wegen $x \geq 1$).

Wegen $z^2 - z - 1 = (z - \varphi)(z - \hat{\varphi})$

gilt $\hat{\varphi} = -\varphi^{-1}$, $\varphi + \hat{\varphi} = 1$.

[Koordinaten des regelmäßigen (Kosaeders):

$(0, \pm 1, \pm \varphi)$
 $(\pm 1, \pm \varphi, 0)$
 $(\pm \varphi, 0, \pm 1)$

4) Es bleibt, die Partialbruchdekomposition zu $(*)^4$ zu bestimmen.

Ansatz:

$$\frac{1}{(1-\varphi z)(1-\hat{\varphi} z)} = \frac{a}{1-\varphi z} + \frac{b}{1-\hat{\varphi} z}$$

$$\Rightarrow (a+b) - (a\hat{\varphi} + b\varphi)z = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ \hat{\varphi} a + \varphi b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\varphi}{\sqrt{5}}, \quad b = -\frac{\hat{\varphi}}{\sqrt{5}}$$

Insgesamt ergibt sich hier aus $(*)^5$:

$$F_n = a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1} \\ = \frac{\varphi}{\sqrt{5}} \varphi^{n-1} - \frac{\hat{\varphi}}{\sqrt{5}} \hat{\varphi}^{n-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n \right]$$

↑ nächstgelegene ganze Zahl
 $\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < 1$; denn $\sqrt{5} \approx 2.236$

$$g) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{\left[\frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n \right]}{\left[\frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^{n-1} \right]} = \varphi$$

(4) Lösen von Rekursionen II

a) Sei q_1, \dots, q_d Folge komplexer Zahlen für (festes) $d \geq 1$, $q_d \neq 0$.

$$\begin{aligned} q(z) &:= 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \dots + q_d z^d \\ &= (1 - \alpha_1 z)^{d_1} \dots (1 - \alpha_k z)^{d_k}, \end{aligned}$$

wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ paarweise verschiedene Nullstellen von $q^R(z)$ mit Vielfachheiten d_1, \dots, d_k .

b) Satz Für $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ sind äq.

(A1) $\forall n \geq 0$:

$$f(n+d) + q_1 f(n+d-1) + \dots + q_d f(n) = 0$$

[Rekursion der Länge d]

$$(A2) \quad F(z) := \sum_{n \geq n_0} f(n) z^n = \frac{p(z)}{q(z)}$$

für ein $p \in \mathbb{C}[z]$ vom Grad ~~\leq~~ $< d$

[Erzeugende Funktion rational]

$$(A3) \quad F(z) = \sum_{n \geq n_0} f(n) z^n = \sum_{i=1}^k \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}}$$

für $g_i \in \mathbb{C}[z]$ von Grad $< d_i$
 $1 \leq i \leq k$

[Partialbruchzerlegung in
rationalen Funktionen]

$$(A4) \quad f(n) = \sum_{i=1}^k p_i(n) \alpha_i^n$$

für $p_i \in \mathbb{C}[z]$ von Grad $< d_i$
[Explizite Darstellung] $1 \leq i \leq k$

c) Beweis.

i) Setze $V_i := \{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ erfüllt } (A_i) \}$

• Die Mengen V_1, V_2, V_3, V_4 sind

\mathbb{C} -Vektorräume (bzgl. punktweise
Addition und Skalarmultiplikation)

• $\forall i$, dim $V_i = d_i$:

⌈ (A1): wähle $f(0), f(1), \dots, f(d-1) \in \mathbb{C}$

(A2): wähle Koeffizienten
 p_0, p_1, \dots, p_{d-1} für p .

(A3): wähle d_i Koeff. für g_i $\forall i$
und $\sum d_i = d$.

(A4): wähle d_i Koeff. für p_i $\forall i$
und $\sum d_i = d$.

D.h. aus $V_i \subseteq V_j$ folgt $V_i = V_j$
 $\forall i, j$.

ii) Sei $f \in V_2$. Es gilt

$$\circ \quad q(z) \sum_{n \geq n_0} f(n) z^n = p(z)$$

Betrachte Koeffizienten von z^{n+d} :

$$f(n+d) + q_1 f(n+d-1) + \dots + q_d f(n) = 0$$

$$\Rightarrow f \in V_1 \quad ; \quad \text{also } V_1 = V_2.$$

iii) Sei $f \in V_3$. Dann gilt

$$\circ \quad \sum_{n \geq n_0} f(n) z^n = \frac{\sum g_i(z) \cdot \prod_{i \neq j} (1 - \alpha_j z)^{d_j}}{\prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i z)^{d_i}}$$
$$= \frac{p(z)}{q(z)}$$

$$\text{mit } \deg p(z) \leq \max_i (\deg g_i(z) + \sum_{i \neq j} d_j)$$

$$< \sum_{i=1}^k d_i = d$$

$$\Rightarrow f \in V_2 \quad ; \quad \text{also } V_1 = V_2 = V_3$$

iv) $\mathbb{Z} \quad V_3 \subseteq V_4$. Sei $f \in V_3$ und

$$F(z) = \sum_{i=1}^k \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}}$$

Dann gilt:

$$\frac{1}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{n \geq 0} \binom{d_i+n-1}{n} \alpha_i^n z^n$$

(*)

$$= \sum_{n \geq 0} \binom{d_i+n-1}{d_i-1} \alpha_i^n z^n$$

vgl. hierzu $\binom{n}{k}$:

~~$\sum_{n \geq 0} \binom{c+n-1}{n} z^n = (1-z)^{-c}$~~ $\forall c \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n \geq 0} \binom{c+n-1}{n} z^n = (1-z)^{-c}$$

Multipliziert man (*) mit

$$g_i(z) = g_0 + g_1 z + \dots + g_{d_i-1} z^{d_i-1},$$

so gilt hier

$$\begin{aligned} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{d_i-1} g_j \binom{d_i+n-j-1}{d_i-1} \alpha_i^{n-j} \right) z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j=0}^{d_i-1} \alpha_i^{-j} g_j \binom{n+d_i-j-1}{d_i-1} \alpha_i^n \right) z^n \end{aligned}$$

$$\text{Für } p_i(n) := \sum_{j=0}^{d_i-1} \alpha_i^{-j} g_j \binom{n+d_i-j-1}{d_i-1}$$

erhalten wir ein Polynom in n von

$$\text{Grad} \leq d_i-1 \Rightarrow f \in V_4. \quad \square$$

d) Bsp

$$f(n+2) - 6f(n+1) + 9f(n) = 0$$

$$\text{mit } f(0) = 0 \text{ und } f(1) = 1. \quad (A1)$$

$$\text{Dann: } d=2, \quad q(z) = 1 - 6z + 9z^2 \\ = (1-3z)^2$$

Wegen (A4) gilt

$$f(n) = (a + bn) 3^n$$

für $a, b \in \mathbb{C}$.

$$- 0 = f(0) = a \Rightarrow a = 0$$

$$- 1 = f(1) = (a+b) \cdot 3 = 3b \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

$$\text{Also: } f(n) = n 3^{n-1}$$

e) Formeln für $g_i(z)$ und $p_i(n)$.

Wir betrachten den Fall, dass

die Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ von $q^R(z)$

paarweise verschieden sind. D.h. $d_i = 1 \forall i$
und $d = k$.

$\Rightarrow \deg g_i(z) = d_i - 1 = 0$. konstant!

Sei $a_i \in \mathbb{C}$ mit $g_i(z) = a_i$.

$$\Rightarrow p_i(n) = \sum_{j=0}^0 \alpha_i^{-j} \binom{n + d_i - j - 1}{d_i - 1} = \binom{n}{0} = a_i$$

\swarrow für Term i \nearrow

Wegen

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\sum_{i=1}^d a_i \prod_{j \neq i} (1 - \alpha_j z)}{\prod_{i=1}^d (1 - \alpha_i z)}$$

folgt

$$p(z) = \sum_{i=1}^d a_i \prod_{j \neq i} (1 - \alpha_j z)$$

Für $z = \frac{1}{\alpha_i}$ ergibt sich hieraus

$$p\left(\frac{1}{\alpha_i}\right) = a_i \prod_{j \neq i} \left(1 - \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right)$$

$$\Rightarrow a_i = \frac{p\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)}{\prod_{j \neq i} \left(1 - \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right)} \quad \forall 1 \leq i \leq d$$

etc.

(5) a)

$$\text{Def } F \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_n \end{matrix} \middle| z \right) := \sum_{k \geq 0} \frac{\bar{a}_k \dots \bar{a}_m}{\bar{b}_1^k \dots \bar{b}_n^k} \frac{z^k}{k!}$$

heißt hypergeometrische Reihe mit

den m oberen Parametern $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$

und den n unteren Parametern b_1, \dots, b_n

$e \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$

○ Notationsvarianten:

$$F(a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_n; z)$$

Bem $a^{\bar{k}} = a(a+1) \dots (a+k-1)$

riêng factorial (Pochhammer Symbol)

b) Bsp

i) $F \left(\begin{matrix} \\ 1 \end{matrix} \middle| z \right) = F \left(\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} = e^z$

○ $m=n=0$ bzw. $m=n=1$

ii) $F \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_m, x \\ b_1, \dots, b_n, x \end{matrix} \middle| z \right) = F \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_n \end{matrix} \middle| z \right)$

iii) $F \left(\begin{matrix} 1, 1 \\ 1 \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{k \geq 0} 1^{\bar{k}} \frac{z^k}{k!}$

$$= \sum_{k \geq 0} z^k = \frac{1}{1-z}$$

geometrische Reihe

[daher: „hypergeometrisch“]

$$iv) F\left(\begin{matrix} a, 1 \\ 1 \end{matrix} \middle| z\right) = \sum_{k \geq 0} a^{\bar{k}} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} \binom{a+k-1}{k} z^k$$

$$= \frac{1}{(1-z)} a$$

Anw.

$$F\left(\begin{matrix} -a, 1 \\ 1 \end{matrix} \middle| z\right) = (1+z)^a \quad \underline{\text{Binomialformel}}$$

○ Bem. Falls ein oberer Parameter eine negative ganze Zahl ist, so ist die hypergeometrische Reihe endlich:

$$k > a \geq 0 \text{ \& } a \in \mathbb{N} \Rightarrow (-a)^{\bar{k}} = 0.$$

$$v) F\left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \middle| z\right) = \sum_{k \geq 0} \frac{a^{\bar{k}}}{b^{\bar{k}}} \frac{z^k}{k!} =: \mathcal{M}(a, b, z)$$

Konfluente hypergeometrische Reihe

○ de vorder Art,

$$vi) F\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z\right) = \sum_{k \geq 0} \frac{a^{\bar{k}} b^{\bar{k}} z^k}{c^{\bar{k}} k!}$$

Beispiele hypergeometrischer Reihe,

Spezialfall:

$$\ln(1+z) = z F\left(\begin{matrix} 1, 1 \\ 2 \end{matrix} \middle| -z\right) = z \sum_{k \geq 0} \frac{k! k!}{(k+1)!} \frac{(-z)^k}{k!}$$

$$= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

(6) a) Sei t_k der k -te Term von $F(a_1, \dots, a_m | z)$,

$$\text{d.h. } F(a_1, \dots, a_m | z) = \sum_{k \geq 0} t_k$$

$$\text{und } t_k = \frac{a_1^k \dots a_m^k z^k}{b_1^k \dots b_n^k k!}, \quad \text{\$ an geht}$$

$t_0 = 1$ und

$$\begin{aligned} \frac{t_{k+1}}{t_k} &= \frac{a_1^{k+1} \dots a_m^{k+1} b_1^k \dots b_n^k (k!) z^{k+1}}{a_1^k \dots a_m^k b_1^{k+1} \dots b_n^{k+1} (k+1)! z^k} \\ &= \frac{(k+1)a_1 \dots (k+1)a_m}{(k+1)b_1 \dots (k+1)b_n} z \end{aligned}$$

rationaler Funktion in z ,

Fundamentalsatz der Algebra: Jede rationale

Funktion (in z) hat die Form

$$\frac{(k+1)a_1 \dots (k+1)a_m}{(k+1)b_1 \dots (k+1)b_n}, \text{ const.}$$

Daher: Die hypergeometrischen Reihen

sind genau die ~~Funktion~~ Reihen $\sum_{k \geq 0} t_k$

mit $t_0 = 1$ und $\frac{t_{k+1}}{t_k}$ rationale

Funktion in z (und z als konstanter

Faktor).

b) ~~Try~~ $\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{k^2 + 7k + 10}{4k^2 + 1} \in \mathbb{C}(k)$

$$= \frac{(k+2)(k+5)(k+1) \cdot \frac{1}{4}}{(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})(k+1)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k \geq 0} t_k = t_0 \cdot F\left(\begin{matrix} 2, 5, 1 \\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \end{matrix} \middle| \frac{1}{4}\right).$$

c) Schema: Sei S ~~ein~~ ein Wert, den

wir als (Auswertung) einer hypergeometrischen Reihe darstellen wollen.

i) Schreibe S als summierte Reihe $\sum_{k \geq 0} t_k$ mit $t_0 \neq 0$.

ii) Falls t_{k+1}/t_k rationale Funktion in k , bestimme Parameter a_1, \dots, a_m , b_1, \dots, b_n und Argument z , so dass

$$S = t_0 F\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_n \end{matrix} \middle| z\right).$$

(7) a) Aus $\binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1} = \binom{r}{k}$ folgt

$$\begin{aligned} \binom{r+m+1}{m} &= \binom{r+m}{m} + \binom{r+m}{m-1} \\ &= \binom{r+m}{m} + \binom{r+(m-1)}{m-1} + \binom{r+(m-1)}{m-2} \\ &= \dots = \sum_{k=0}^m \binom{r+k}{k} \quad \text{für } m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$$b) \sum_{k \geq 0} \binom{r+m-k}{m-k} = \sum_{k \geq 0} \frac{(r+m-k)!}{r! (m-k)!} = \sum_{k \geq 0} t_k$$

multipl. herum, \uparrow
 da $\frac{1}{(m-k)!} = 0$ für $k > m$. (Pfeile unten)

$$\begin{aligned} \frac{t_{k+1}}{t_k} &= \frac{(r+m-k-1)! r! (m-k)!}{r! (m-k-1)! (r+m-k)!} = \frac{m-k}{r+m-k} \\ &= \frac{(k+1)(k-m) \cdot 1}{(k-m-r)(k+1)} \end{aligned}$$

und $t_0 = \binom{r+m}{m}$

$$\Rightarrow \binom{r+m}{m} F \left(\begin{matrix} 1, -m \\ -m-r \end{matrix} \middle| 1 \right) = \binom{r+m+1}{m}$$

bzw $F \left(\begin{matrix} 1, -m \\ -m-r \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{r+m+1}{r+1}$ für $\binom{r+m}{m}$, α

Bem i) Eine hypergeometrische Reihe mit nicht-positiven ganzen Zahlen als unteren Parameter ist nicht definiert.

ii) Akr:

$$F\left(\begin{matrix} 1, -n \\ -n-r \end{matrix} \middle| 1\right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F\left(\begin{matrix} 1, -n \\ -n-r+\epsilon \end{matrix} \middle| 1\right)$$

macht Sinn auch für $r, n \in \mathbb{N}$.

Analog: $\binom{r+n-k}{n-k} = \frac{(r+n-k)!}{r! (n-k)!}$?

Akr: Fakultät nur definiert für natürliche Zahlen.

c) Def $\frac{1}{z!} := \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n+z}{n} n^{-z}$, $z \in \mathbb{C}$.

Bem i) Die Folge konvergiert für beliebige komplexe Zahlen z .

ii) Für $z \in \mathbb{N}$ stimmt diese Definition mit der üblichen Def. der Fakultät überein.

(8) a) Wir wollen zur Differentialrechnung ein diskretes Analogon finden.

$$Df(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Differentialoperator Zu $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ diffbar.
bzw. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Delta f(z) := f(z+1) - f(z) = f \frac{f(z+1) - f(z)}{1}$$

diskrete Differenzoperator.

b) $D(z^m) = m z^{m-1}$ mod

$$\begin{aligned} \Delta(z^m) &= (z+1)^m - z^m \\ &= (z+1)z(z-1)\dots(z-m+2) \\ &\quad - z(z-1)\dots(z-m+1) \\ &= (z+1 - (z-m+1))z(z-1)\dots(z-m+2) \\ &= m z(z-1)\dots(z-m+2) \\ &= m z^{m-1} \end{aligned}$$

c) Zusätzlich ex. der Integraloperator \int ,
und es gilt der Hauptsatz der Diff.- und
Integralrechnung:

$$g(x) = Df(x) \Leftrightarrow \int g(x) dx = f(x) + C$$

↑
unbestimmtes Integral

Das diskrete Analogon lautet:

$$g(x) = \Delta f(x) \Leftrightarrow \sum g(z) \delta z = f(x) + C$$

↑
unbestimmte Summe

$\sum g(x) \delta x =$ Klasse aller Funktionen,
deren Differenz g ist.

beliebige Funktion f mit $f(x+1) = f(x)$,
z.B. $f(x) = a + b \sin 2\pi x$

d) Für die bestimmten Integrale gilt:

$$\int_a^b g(x) dx = f(b) - f(a)$$

Analog:

$$\sum_a^b g(x) \delta x := f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

Für $g(x) = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ gilt
dann z.B.

$$\sum_a^a g(x) \delta x = f(a) - f(a) = 0$$

und

$$\sum_a^{a+1} g(x) \delta x = f(a+1) - f(a) = g(a).$$

Anfordern

$$\begin{aligned} \sum_a^{b+1} g(x) \delta x - \sum_a^b g(x) \delta x \\ = f(b+1) - f(a) - f(b) + f(a) \\ = g(b) \end{aligned}$$

\Rightarrow Induktion $\sum_a^b g(x) \delta x = \sum_{k=a}^{b-1} g(k) = \sum_{a \leq k < b} g(k)$

für $a \leq b \in \mathbb{N}$.

Bsp $\sum_{0 \leq k < n} k^m = \sum_0^n k^m \delta k = \left. \frac{k^{m+1}}{m+1} \right|_0^n$

$$= \frac{n^{m+1}}{m+1} \quad \text{für } m, n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \sum_{0 \leq k < n} k = \frac{n^2}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

d) Bin [vgl. 5c]

$$\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} (-1)^k = (-1)^{m-1} \binom{m-1}{m-1}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum \binom{m}{k} (-1)^k \delta_k = (-1)^{k-1} \binom{m-1}{k-1} + C \\ \Delta \left((-1)^k \binom{m}{k} \right) = (-1)^{k+1} \binom{m+1}{k+1} \end{cases}$$

diskretes Analogon zur Integration:

(9) Gosper's Algorithmus

a) Problem: Finde unbestimmte Summe

$$\sum f(k) \delta_k = g(k) + C,$$

falls f und g hypergeometrische Terme

Def i) $F \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_n \end{matrix} \middle| z \right)_k = \frac{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_m \cdot z^k}{\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n \cdot k!}$

heißt k -te hypergeometrischer Term

der Reihe $F \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_n \end{matrix} \middle| z \right)$.

rationale Funktion in k .

ii) Falls es. Parameter $c, A_1, \dots, A_M, B_1, \dots, B_N$
 und Z , so dass

$$\sum F\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_n \end{matrix} \middle| z\right)_k \delta_k$$

$$= c F\left(\begin{matrix} A_1, \dots, A_M \\ B_1, \dots, B_N \end{matrix} \middle| Z\right)_k + C$$

heißt $F\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_n \end{matrix} \middle| z\right)_k$ summierbar

○ in hypergeometrischen Termen.

Bem. Auch der Fall $b_i \in \mathbb{N}$ kann praktikabel
 werden (~~bedeutet~~ (biquadranten kultbar).

iii) A_k heißt hypergeometrischer Term,

falls $\frac{A_{k+1}}{A_k} \neq 0$ rationale Funktion in k .

○