Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl. Math. oec. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2005
14. Juni 2005

4. Übungsblatt zur „Mathematische Software“

Hausübung
(Abgabe bis zum 28.06.2005)

Aufgabe H1 (MATCHING–Problem)

In dieser Aufgabe betrachten wir folgendes kombinatorisches Optimierungsproblem

CARDINALITY–BIPARTITE–MATCHING–Problem	
Instanz:	Graph $G = (V, E)$ mit $X, Y \subset V$, so dass $V = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$ und $E = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$.
Aufgabe:	Finde eine Kantenmenge $M \subseteq E$, so dass keine zwei Kanten aus M einen gemeinsamen Endknoten haben und $\lvert M\rvert$ maximal ist.

Eine Studentin ist eine Woche zu Besuch in Berlin, um sich in dieser Zeit auf der Berlinale folgende Filme anzuschauen, die jedoch nur an den ausgewiesenen Tagen vorgestellt werden. Sie möchte so viele Filme wie möglich, allerdings maximal einen pro Tag sehen.

Film	**Vorstellungstage**
Skagafjördur	Sonnabend, Montag
The Garden	Montag, Sonnabend, Sonntag
Forty Shades of Blue	Montag, Dienstag, Mittwoch
Gender X	Montag, Freitag
Abordage	Mittwoch, Donnerstag
Wer ist Helene Schwarz?	Dienstag
Heaven‘s Gate	Sonntag, Freitag

Aufgabe:

(a) Stellen Sie dieses MATCHING–Problem als bipartiten Graphen dar.

(b) Formulieren Sie

- das ganzzahlige lineare Programm (ILP),
- das relaxierte lineare Programm (ohne die Ganzzahligkeitsbedingungen) (LP),
- das duale Programm[1] zu (LP)

sowohl allgemein als auch für die obige Instanz.

(c) Berechnen Sie z. B. mithilfe von `CPLEX` die Optima für die unter (b) formulierten Programme. **Hinweis:** Die Optima aller drei Programme müssen identisch sein, da die Matrix der Nebenbedingungen *total unimodular* ist (siehe hierzu [1]).

(d) Wie läßt sich das duale Problem graphentheoretisch interpretieren?

(e) Visualisieren Sie mithilfe von `polymake` die Matching–Polytope für zusammenhängende bipartite Graphen mit genau drei Kanten.

Aufgabe H2 (Komplexität des Simplex–Algorithmus, Klee–Minty–Würfel)

Beweisen Sie, dass der Simplex–Algorithmus mit Bland‘s Pivot–Regel für das Problem

$$\begin{array}{rll} \max & x_n & \\ s.t. & 0 \leq x_1 \leq 1 & \\ & \epsilon x_i \leq x_{i+1} \leq 1 - \epsilon x_i & \quad \forall i = 1, \ldots, n-1 \end{array}$$

mit $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ ausgehend von der trivialen Startlösung $2^n - 1$ Iterationen benötigt.

Die Regel von Bland ist die in der Vorlesung vorgestellte Regel zur Auswahl des Pivot–Elements im Simplexverfahren, wobei (siehe Notation der Vorlesung) im Fall 2 zunächst der kleinste Index i^* mit $\nu_{i^*} < 0$ und anschließend im Fall 2b der kleinste Index j^* mit $\lambda_0 = (\beta_{j^*} - a_{j^*} x_0)/a_{j^*} y$ gewählt wird.

*

Literatur

[1] A. Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming.* John Wiley, 1986.

[1] Das duale Programm zu einem Problem der Form $\max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ lautet $\min\{y^T b : A^T y \geq c, y \geq 0\}$.