Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Michael Joswig
Dipl. Math. oec. Katja Kulas

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2005
17. Mai 2005

2. Übungsblatt zur „Mathematische Software“

Hausübung

Aufgabe H1 (QHull)

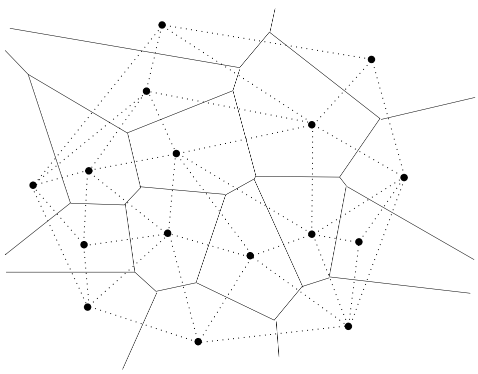
Laden Sie sich von der Internetseite `www.qhull.org` das Programm *QHull* herunter, installieren Sie es und machen Sie sich mit den Funktionen *qvoronoi, qdelaunay* und *qconvex* vertraut.

Aufgabe H2 (Voronoi–Diagramm, Delaunay–Triangulierung, Konvexe Hülle)

Für eine gegebene Menge P von Punkten in der Ebene ist die *Voronoi–Region* eines Punktes in P die Menge aller Punkte in der Ebene, die bezüglich der euklidischen Distanz näher zu diesem Punkt sind als zu allen anderen Punkten in P. Die Voronoi–Regionen aller Punkte aus P bilden das *Voronoi–Diagramm* $V(P)$.

Die Delaunay–Triangulierung $Del(P)$ der Punktmenge P ist der duale Graph des Voronoi–Diagramms, d.h. Punkte, deren Voronoi–Regionen aneinandergrenzen, werden durch eine Delaunay–Kante verbunden.

In der folgenden Grafik sind das Voronoi–Diagramm (durchgezogene Linien) und die zugehörige Delaunay–Triangulierung (gepunktet) beispielhaft abgebildet.



Die *konvexe Hülle* einer Menge P von Punkten in der Ebene ist gegeben durch die kleinste konvexe Menge im $\mathbb{R}^2$, die P enthält.

Aufgabe:

(a) Konstruieren Sie mithilfe der Funktionen qvoronoi, qdelaunay und qconvex von QHull das Voronoi–Diagramm, die Delaunay–Triangulierung und die konvexe Hülle für die Punkte mit folgenden Koordinaten:

$$(15, 2), (3, 3), (9, 3), (13, 6), (5, 7), (9, 9), (17, 9), (3, 11), (13, 12), (8, 14), (17, 15).$$

Visualisieren Sie diese mit dem Programm *geomview*, welches mit dem Aufruf `geomview` in der Shell gestartet wird.

(b) Sind Voronoi-Regionen immer konvex? Wenn ja, warum? Ansonsten geben Sie ein Gegenbeispiel an!

(c) Welche Punkte haben unbeschränkte Voronoi–Regionen?

Aufgabe H3 (Euclidean Minimum Spanning Tree)

Sei P eine Menge von Punkten in der Ebene und $G = (P, E(P), c)$ der vollständige Graph auf P mit der euklidischen Abstandsfunktion $c : E(P) \to \mathbb{R}_+$: $(p, q) \mapsto \|p - q\|_2$ als Gewichtsfunktion auf der Kantenmenge $E(P)$.

Ein *aufspannender Baum* von G ist ein zusammenhängender Teilgraph von G ohne Kreise, der alle Kanten überdeckt.

Aufgabe des Euclidean Minimum Spanning Tree–Problems (kurz: EMST) ist es nun, einen aufspannenden Baum T von G mit minimalem Gewicht

$$c(T) := \sum_{e \in E(T)} c(e)$$

zu finden.

Aufgabe:

Zeigen Sie, dass jede Kante eines EMST von G auch eine Kante der Delaunay–Triangulierung $Del(P)$ von P ist.

Benutzen Sie dafür folgende Eigenschaft von Delaunay–Triangulierungen:

Lemma 1. *Seien $p, q \in P$. Dann gilt: die Strecke $[p, q]$ ist eine Kante in $Del(P)$ genau dann, wenn es einen Kreis durch p und q gibt, der keinen weiteren Punkt aus P enthält (auch nicht auf dem Rand).*