

Mathematik I für Bauwesen

Vorlesung 2

Dozent: Ivan Izmestiev

19. Oktober 2011

Mathematische Argumentation

Aufbau einer Theorie

Beweisen und Widerlegen

Direkter Beweis

Widerspruchsbeweis

Vollständige Induktion

Axiomatische Methode

Axiom ist ein Ausgangssatz, eine Aussage, die keines Beweises bedarf.

Axiomatische Methode

Axiom ist ein Ausgangssatz, eine Aussage, die keines Beweises bedarf.

Euklid baute Geometrie auf einer axiomatischen Basis auf ("Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade" usw).

Axiomatische Methode

Axiom ist ein Ausgangssatz, eine Aussage, die keines Beweises bedarf.

Euklid baute Geometrie auf einer axiomatischen Basis auf ("Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade" usw).

Reelle Zahlen können auch axiomatisch eingeführt werden

Axiomatische Methode

Axiom ist ein Ausgangssatz, eine Aussage, die keines Beweises bedarf.

Euklid baute Geometrie auf einer axiomatischen Basis auf ("Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade" usw).

Reelle Zahlen können auch axiomatisch eingeführt werden (9 Körperaxiome, 4 Anordnungsaxiome, Archimedisches Axiom und Vollständigkeitsaxiom).

Axiomatische Methode

Axiom ist ein Ausgangssatz, eine Aussage, die keines Beweises bedarf.

Euklid baute Geometrie auf einer axiomatischen Basis auf ("Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade" usw).

Reelle Zahlen können auch axiomatisch eingeführt werden (9 Körperaxiome, 4 Anordnungsaxiome, Archimedisches Axiom und Vollständigkeitsaxiom).

Aus Axiomen kann man **Sätze** herleiten.

Axiomatische Methode

Axiom ist ein Ausgangssatz, eine Aussage, die keines Beweises bedarf.

Euklid baute Geometrie auf einer axiomatischen Basis auf ("Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade" usw).

Reelle Zahlen können auch axiomatisch eingeführt werden (9 Körperaxiome, 4 Anordnungsaxiome, Archimedisches Axiom und Vollständigkeitsaxiom).

Aus Axiomen kann man **Sätze** herleiten.

Vorteile Klare Strukturierung, Zusammenhang zu anderen Gebieten (Theorie der Körper, geordnete Mengen).

Nachteile Sehr abstrakt.

Deskriptiv vs konstruktiv

Axiomatische Methode ist “**deskriptiv**”, sie beschreibt ein Objekt (Menge der reellen Zahlen) durch seine Eigenschaften (Axiome).

Deskriptiv vs konstruktiv

Axiomatische Methode ist “**deskriptiv**”, sie beschreibt ein Objekt (Menge der reellen Zahlen) durch seine Eigenschaften (Axiome). Auch ohne eine Vorstellung von Zahlen zu haben, kann man Sätze über sie beweisen.

Deskriptiv vs konstruktiv

Axiomatische Methode ist “**deskriptiv**”, sie beschreibt ein Objekt (Menge der reellen Zahlen) durch seine Eigenschaften (Axiome). Auch ohne eine Vorstellung von Zahlen zu haben, kann man Sätze über sie beweisen.

Die Definition reeller Zahlen als unendliche Dezimalbrüche ist ein **konstruktiver** Ansatz.

Deskriptiv vs konstruktiv

Axiomatische Methode ist “**deskriptiv**”, sie beschreibt ein Objekt (Menge der reellen Zahlen) durch seine Eigenschaften (Axiome). Auch ohne eine Vorstellung von Zahlen zu haben, kann man Sätze über sie beweisen.

Die Definition reeller Zahlen als unendliche Dezimalbrüche ist ein **konstruktiver** Ansatz. Hier wird ein neues Objekt aus den bereits vorhandenen (natürliche Zahlen und arithmetische Operationen) konstruiert.

Deskriptiv vs konstruktiv

Axiomatische Methode ist “**deskriptiv**”, sie beschreibt ein Objekt (Menge der reellen Zahlen) durch seine Eigenschaften (Axiome). Auch ohne eine Vorstellung von Zahlen zu haben, kann man Sätze über sie beweisen.

Die Definition reeller Zahlen als unendliche Dezimalbrüche ist ein **konstruktiver** Ansatz. Hier wird ein neues Objekt aus den bereits vorhandenen (natürliche Zahlen und arithmetische Operationen) konstruiert.

Vorteile Praxisnah, intuitiv.

Deskriptiv vs konstruktiv

Axiomatische Methode ist “**deskriptiv**”, sie beschreibt ein Objekt (Menge der reellen Zahlen) durch seine Eigenschaften (Axiome). Auch ohne eine Vorstellung von Zahlen zu haben, kann man Sätze über sie beweisen.

Die Definition reeller Zahlen als unendliche Dezimalbrüche ist ein **konstruktiver** Ansatz. Hier wird ein neues Objekt aus den bereits vorhandenen (natürliche Zahlen und arithmetische Operationen) konstruiert.

Vorteile Praxisnah, intuitiv.

Nachteile Was bei der axiomatischen Methode ein Axiom war, wird jetzt zu einem Satz. Und ein Satz soll bewiesen werden.

Deskriptiv vs konstruktiv

Axiomatische Methode ist “**deskriptiv**”, sie beschreibt ein Objekt (Menge der reellen Zahlen) durch seine Eigenschaften (Axiome). Auch ohne eine Vorstellung von Zahlen zu haben, kann man Sätze über sie beweisen.

Die Definition reeller Zahlen als unendliche Dezimalbrüche ist ein **konstruktiver** Ansatz. Hier wird ein neues Objekt aus den bereits vorhandenen (natürliche Zahlen und arithmetische Operationen) konstruiert.

Vorteile Praxisnah, intuitiv.

Nachteile Was bei der axiomatischen Methode ein Axiom war, wird jetzt zu einem Satz. Und ein Satz soll bewiesen werden. So Vollständigkeitsaxiom.

Deskriptiv vs konstruktiv

Axiomatische Methode ist “**deskriptiv**”, sie beschreibt ein Objekt (Menge der reellen Zahlen) durch seine Eigenschaften (Axiome). Auch ohne eine Vorstellung von Zahlen zu haben, kann man Sätze über sie beweisen.

Die Definition reeller Zahlen als unendliche Dezimalbrüche ist ein **konstruktiver** Ansatz. Hier wird ein neues Objekt aus den bereits vorhandenen (natürliche Zahlen und arithmetische Operationen) konstruiert.

Vorteile Praxisnah, intuitiv.

Nachteile Was bei der axiomatischen Methode ein Axiom war, wird jetzt zu einem Satz. Und ein Satz soll bewiesen werden. So Vollständigkeitsaxiom. Sogar das Distributivgesetz $a(b + c) = ab + ac$ ist nicht offensichtlich

Deskriptiv vs konstruktiv

Axiomatische Methode ist “**deskriptiv**”, sie beschreibt ein Objekt (Menge der reellen Zahlen) durch seine Eigenschaften (Axiome). Auch ohne eine Vorstellung von Zahlen zu haben, kann man Sätze über sie beweisen.

Die Definition reeller Zahlen als unendliche Dezimalbrüche ist ein **konstruktiver** Ansatz. Hier wird ein neues Objekt aus den bereits vorhandenen (natürliche Zahlen und arithmetische Operationen) konstruiert.

Vorteile Praxisnah, intuitiv.

Nachteile Was bei der axiomatischen Methode ein Axiom war, wird jetzt zu einem Satz. Und ein Satz soll bewiesen werden. So Vollständigkeitsaxiom. Sogar das Distributivgesetz $a(b + c) = ab + ac$ ist nicht offensichtlich (wie multipliziert man überhaupt unendliche Dezimalbrüche?)

Für die reellen Zahlen gibt es andere konstruktive Definitionen (Dedekindsche Schnitte, Cauchy-Folgen).

Für die reellen Zahlen gibt es andere konstruktive Definitionen (Dedekindsche Schnitte, Cauchy-Folgen). Auch das Vollständigkeitsaxiom kann unterschiedlich formuliert werden.

Für die reellen Zahlen gibt es andere konstruktive Definitionen (Dedekindsche Schnitte, Cauchy-Folgen). Auch das Vollständigkeitsaxiom kann unterschiedlich formuliert werden.

Deskriptive und konstruktive Ansätze ergänzen einander.

Wenn reelle Zahlen aus natürlichen konstruiert werden, woraus konstruiert man die natürlichen?

Für die reellen Zahlen gibt es andere konstruktive Definitionen (Dedekindsche Schnitte, Cauchy-Folgen). Auch das Vollständigkeitsaxiom kann unterschiedlich formuliert werden.

Deskriptive und konstruktive Ansätze ergänzen einander.

Wenn reelle Zahlen aus natürlichen konstruiert werden, woraus konstruiert man die natürlichen? In der Basis liegen jedenfalls Axiome.

Für die reellen Zahlen gibt es andere konstruktive Definitionen (Dedekindsche Schnitte, Cauchy-Folgen). Auch das Vollständigkeitsaxiom kann unterschiedlich formuliert werden.

Deskriptive und konstruktive Ansätze ergänzen einander.

Wenn reelle Zahlen aus natürlichen konstruiert werden, woraus konstruiert man die natürlichen? In der Basis liegen jedenfalls Axiome. Fünf Peano-Axiome für \mathbb{N} .

Für die reellen Zahlen gibt es andere konstruktive Definitionen (Dedekindsche Schnitte, Cauchy-Folgen). Auch das Vollständigkeitsaxiom kann unterschiedlich formuliert werden.

Deskriptive und konstruktive Ansätze ergänzen einander.

Wenn reelle Zahlen aus natürlichen konstruiert werden, woraus konstruiert man die natürlichen? In der Basis liegen jedenfalls Axiome. Fünf Peano-Axiome für \mathbb{N} .

Auch die Euklidische Geometrie kann auf der Basis von \mathbb{R} (und damit auf der Basis von \mathbb{N}) konstruiert werden.

Für die reellen Zahlen gibt es andere konstruktive Definitionen (Dedekindsche Schnitte, Cauchy-Folgen). Auch das Vollständigkeitsaxiom kann unterschiedlich formuliert werden.

Deskriptive und konstruktive Ansätze ergänzen einander.

Wenn reelle Zahlen aus natürlichen konstruiert werden, woraus konstruiert man die natürlichen? In der Basis liegen jedenfalls Axiome. Fünf Peano-Axiome für \mathbb{N} .

Auch die Euklidische Geometrie kann auf der Basis von \mathbb{R} (und damit auf der Basis von \mathbb{N}) konstruiert werden. "Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk." (Leopold Kronecker)

Für die reellen Zahlen gibt es andere konstruktive Definitionen (Dedekindsche Schnitte, Cauchy-Folgen). Auch das Vollständigkeitsaxiom kann unterschiedlich formuliert werden.

Deskriptive und konstruktive Ansätze ergänzen einander.

Wenn reelle Zahlen aus natürlichen konstruiert werden, woraus konstruiert man die natürlichen? In der Basis liegen jedenfalls Axiome. Fünf Peano-Axiome für \mathbb{N} .

Auch die Euklidische Geometrie kann auf der Basis von \mathbb{R} (und damit auf der Basis von \mathbb{N}) konstruiert werden. "Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk." (Leopold Kronecker)

In diesem Kurs wird keine strenge Theorie der reellen Zahlen aufgebaut, wir stützen uns auf intuitive Vorstellungen (z. B. die Zahlengerade) und weniger offensichtliche Tatsachen (wie Vollständigkeitsaxiom).

Quantoren

Viele Aussagen haben die Form “für alle x gilt...” oder “es gibt ein x , sodass...”

Quantoren

Viele Aussagen haben die Form “für alle x gilt...” oder “es gibt ein x , sodass...” Zur Abkürzung benutzt man die Quantoren \forall (“für alle”) und \exists (“es existiert”).

Quantoren

Viele Aussagen haben die Form “für alle x gilt...” oder “es gibt ein x , sodass...” Zur Abkürzung benutzt man die Quantoren \forall (“für alle”) und \exists (“es existiert”).

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ gilt } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Quantoren

Viele Aussagen haben die Form “für alle x gilt...” oder “es gibt ein x , sodass...” Zur Abkürzung benutzt man die Quantoren \forall (“für alle”) und \exists (“es existiert”).

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ gilt } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ gilt } a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Quantoren

Viele Aussagen haben die Form “für alle x gilt...” oder “es gibt ein x , sodass...” Zur Abkürzung benutzt man die Quantoren \forall (“für alle”) und \exists (“es existiert”).

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ gilt } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ gilt } a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$s \geq x \forall x \in M \Leftrightarrow s \text{ ist eine obere Schranke von } M$$

Quantoren

Viele Aussagen haben die Form “für alle x gilt...” oder “es gibt ein x , sodass...” Zur Abkürzung benutzt man die Quantoren \forall (“für alle”) und \exists (“es existiert”).

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ gilt } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ gilt } a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$s \geq x \forall x \in M \Leftrightarrow s$ ist eine obere Schranke von M

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$

Quantoren

Viele Aussagen haben die Form “für alle x gilt...” oder “es gibt ein x , sodass...” Zur Abkürzung benutzt man die Quantoren \forall (“für alle”) und \exists (“es existiert”).

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ gilt } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ gilt } a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$s \geq x \forall x \in M \Leftrightarrow s$ ist eine obere Schranke von M

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$

Beachte: \exists bedeutet Existenz von **mindestens einem** Element mit der entsprechenden Eigenschaft.

Quantoren

Viele Aussagen haben die Form “für alle x gilt...” oder “es gibt ein x , sodass...” Zur Abkürzung benutzt man die Quantoren \forall (“für alle”) und \exists (“es existiert”).

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ gilt } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ gilt } a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$s \geq x \forall x \in M \Leftrightarrow s$ ist eine obere Schranke von M

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$

Beachte: \exists bedeutet Existenz von **mindestens einem** Element mit der entsprechenden Eigenschaft. So, im letzten Beispiel gibt es zwei reelle Zahlen, die beim Quadrieren 2 ergeben: $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$.

Quantoren

Viele Aussagen haben die Form “für alle x gilt...” oder “es gibt ein x , sodass...” Zur Abkürzung benutzt man die Quantoren \forall (“für alle”) und \exists (“es existiert”).

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ gilt } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ gilt } a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$s \geq x \forall x \in M \Leftrightarrow s$ ist eine obere Schranke von M

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$

Beachte: \exists bedeutet Existenz von **mindestens einem** Element mit der entsprechenden Eigenschaft. So, im letzten Beispiel gibt es zwei reelle Zahlen, die beim Quadrieren 2 ergeben: $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$.

Wenn man Existenz **eines einzigen** Elements behaupten möchte, darf man das Symbol $\exists!$ benutzen:

Quantoren

Viele Aussagen haben die Form “für alle x gilt...” oder “es gibt ein x , sodass...” Zur Abkürzung benutzt man die Quantoren \forall (“für alle”) und \exists (“es existiert”).

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ gilt } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ gilt } a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$s \geq x \forall x \in M \Leftrightarrow s$ ist eine obere Schranke von M

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$

Beachte: \exists bedeutet Existenz von **mindestens einem** Element mit der entsprechenden Eigenschaft. So, im letzten Beispiel gibt es zwei reelle Zahlen, die beim Quadrieren 2 ergeben: $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$.

Wenn man Existenz **eines einzigen** Elements behaupten möchte, darf man das Symbol $\exists!$ benutzen:

$$\exists! x \in (0, +\infty) : x^2 = 2$$

\forall -Aussagen

Angenommen, wir wollen eine Behauptung der Form

$$\forall x \text{ gilt } E \tag{1}$$

(für alle x gilt die Eigenschaft E) auf Richtigkeit prüfen.

\forall -Aussagen

Angenommen, wir wollen eine Behauptung der Form

$$\forall x \text{ gilt } E \tag{1}$$

(für alle x gilt die Eigenschaft E) auf Richtigkeit prüfen.

Um Behauptung (1) zu **beweisen**, kann man jedes x einzeln auf die Eigenschaft E prüfen.

\forall -Aussagen

Angenommen, wir wollen eine Behauptung der Form

$$\forall x \text{ gilt } E \tag{1}$$

(für alle x gilt die Eigenschaft E) auf Richtigkeit prüfen.

Um Behauptung (1) zu **beweisen**, kann man jedes x einzeln auf die Eigenschaft E prüfen. Das ist eine legitime Beweismethode, **Exhaustionsmethode** oder **Brute-Force-Methode** genannt.

\forall -Aussagen

Angenommen, wir wollen eine Behauptung der Form

$$\forall x \text{ gilt } E \tag{1}$$

(für alle x gilt die Eigenschaft E) auf Richtigkeit prüfen.

Um Behauptung (1) zu **beweisen**, kann man jedes x einzeln auf die Eigenschaft E prüfen. Das ist eine legitime Beweismethode, **Exhaustionsmethode** oder **Brute-Force-Methode** genannt.

Das funktioniert aber nicht, wenn unendlich viele x in Betracht kommen.

\forall -Aussagen

Angenommen, wir wollen eine Behauptung der Form

$$\forall x \text{ gilt } E \tag{1}$$

(für alle x gilt die Eigenschaft E) auf Richtigkeit prüfen.

Um Behauptung (1) zu **beweisen**, kann man jedes x einzeln auf die Eigenschaft E prüfen. Das ist eine legitime Beweismethode, **Exhaustionsmethode** oder **Brute-Force-Methode** genannt.

Das funktioniert aber nicht, wenn unendlich viele x in Betracht kommen. Dann braucht man ein Argument, das alle Fälle auf einmal einschließt.

\forall -Aussagen

Angenommen, wir wollen eine Behauptung der Form

$$\forall x \text{ gilt } E \tag{1}$$

(für alle x gilt die Eigenschaft E) auf Richtigkeit prüfen.

Um Behauptung (1) zu **beweisen**, kann man jedes x einzeln auf die Eigenschaft E prüfen. Das ist eine legitime Beweismethode, **Exhaustionsmethode** oder **Brute-Force-Methode** genannt.

Das funktioniert aber nicht, wenn unendlich viele x in Betracht kommen. Dann braucht man ein Argument, das alle Fälle auf einmal einschließt.

Hingegen, um Behauptung (1) zu **widerlegen**, reicht es ein x zu finden, das die Eigenschaft E nicht besitzt.

\forall -Aussagen

Angenommen, wir wollen eine Behauptung der Form

$$\forall x \text{ gilt } E \tag{1}$$

(für alle x gilt die Eigenschaft E) auf Richtigkeit prüfen.

Um Behauptung (1) zu **beweisen**, kann man jedes x einzeln auf die Eigenschaft E prüfen. Das ist eine legitime Beweismethode, **Exhaustionsmethode** oder **Brute-Force-Methode** genannt.

Das funktioniert aber nicht, wenn unendlich viele x in Betracht kommen. Dann braucht man ein Argument, das alle Fälle auf einmal einschließt.

Hingegen, um Behauptung (1) zu **widerlegen**, reicht es ein x zu finden, das die Eigenschaft E nicht besitzt. So ein x heißt **Gegenbeispiel**.

Beispiele

- ▶ $\forall x \geq 1$ gilt $x^2 \geq x$

Beispiele

- ▶ $\forall x \geq 1$ gilt $x^2 \geq x$ Richtig, $x \cdot x \geq x \cdot 1 = x$

Beispiele

- ▶ $\forall x \geq 1$ gilt $x^2 \geq x$ Richtig, $x \cdot x \geq x \cdot 1 = x$
- ▶ $\forall x \geq 0$ gilt $x^2 \geq x$

Beispiele

- ▶ $\forall x \geq 1$ gilt $x^2 \geq x$ Richtig, $x \cdot x \geq x \cdot 1 = x$
- ▶ $\forall x \geq 0$ gilt $x^2 \geq x$
Falsch, Gegenbeispiel: $0,1^2 = 0,01 < 0,1$

Beispiele

- ▶ $\forall x \geq 1$ gilt $x^2 \geq x$ Richtig, $x \cdot x \geq x \cdot 1 = x$
- ▶ $\forall x \geq 0$ gilt $x^2 \geq x$
Falsch, Gegenbeispiel: $0,1^2 = 0,01 < 0,1$
- ▶ “jede nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Maximum”

Beispiele

- ▶ $\forall x \geq 1$ gilt $x^2 \geq x$ Richtig, $x \cdot x \geq x \cdot 1 = x$
- ▶ $\forall x \geq 0$ gilt $x^2 \geq x$
Falsch, Gegenbeispiel: $0,1^2 = 0,01 < 0,1$
- ▶ “jede nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Maximum”
Falsch, Gegenbeispiel: $[0, 1)$.

Beispiele

- ▶ $\forall x \geq 1$ gilt $x^2 \geq x$ Richtig, $x \cdot x \geq x \cdot 1 = x$
- ▶ $\forall x \geq 0$ gilt $x^2 \geq x$
Falsch, Gegenbeispiel: $0,1^2 = 0,01 < 0,1$
- ▶ “jede nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Maximum”
Falsch, Gegenbeispiel: $[0, 1)$.
- ▶ “jede nach oben beschränkte (und nichtleere) Menge besitzt ein Supremum”

Beispiele

- ▶ $\forall x \geq 1$ gilt $x^2 \geq x$ Richtig, $x \cdot x \geq x \cdot 1 = x$
- ▶ $\forall x \geq 0$ gilt $x^2 \geq x$
Falsch, Gegenbeispiel: $0,1^2 = 0,01 < 0,1$
- ▶ “jede nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Maximum”
Falsch, Gegenbeispiel: $[0, 1)$.
- ▶ “jede nach oben beschränkte (und nichtleere) Menge besitzt ein Supremum”
Richtig. Entweder ein Axiom oder ein Satz.

Beispiele

- ▶ $\forall x \geq 1$ gilt $x^2 \geq x$ Richtig, $x \cdot x \geq x \cdot 1 = x$
- ▶ $\forall x \geq 0$ gilt $x^2 \geq x$
Falsch, Gegenbeispiel: $0,1^2 = 0,01 < 0,1$
- ▶ “jede nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Maximum”
Falsch, Gegenbeispiel: $[0, 1)$.
- ▶ “jede nach oben beschränkte (und nichtleere) Menge besitzt ein Supremum”
Richtig. Entweder ein Axiom oder ein Satz.
- ▶ “alle Studenten haben schon ein TU-ID”

Beispiele

- ▶ $\forall x \geq 1$ gilt $x^2 \geq x$ Richtig, $x \cdot x \geq x \cdot 1 = x$
- ▶ $\forall x \geq 0$ gilt $x^2 \geq x$
Falsch, Gegenbeispiel: $0,1^2 = 0,01 < 0,1$
- ▶ “jede nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Maximum”
Falsch, Gegenbeispiel: $[0, 1)$.
- ▶ “jede nach oben beschränkte (und nichtleere) Menge besitzt ein Supremum”
Richtig. Entweder ein Axiom oder ein Satz.
- ▶ “alle Studenten haben schon ein TU-ID”
Leider falsch, es gibt Gegenbeispiele.

Beispiele

- ▶ $\forall x \geq 1$ gilt $x^2 \geq x$ Richtig, $x \cdot x \geq x \cdot 1 = x$
- ▶ $\forall x \geq 0$ gilt $x^2 \geq x$
Falsch, Gegenbeispiel: $0,1^2 = 0,01 < 0,1$
- ▶ “jede nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Maximum”
Falsch, Gegenbeispiel: $[0, 1)$.
- ▶ “jede nach oben beschränkte (und nichtleere) Menge besitzt ein Supremum”
Richtig. Entweder ein Axiom oder ein Satz.
- ▶ “alle Studenten haben schon ein TU-ID”
Leider falsch, es gibt Gegenbeispiele.
Wenn diese Behauptung wahr wäre, könnte man es mit der Brute-Force-Methode feststellen.

\exists -Aussagen

Bei einer Behauptung der Form

$$\exists x : x \text{ hat Eigenschaft } F \quad (2)$$

tritt die umgekehrte Situation auf:

\exists -Aussagen

Bei einer Behauptung der Form

$$\exists x : x \text{ hat Eigenschaft } F \quad (2)$$

tritt die umgekehrte Situation auf:

- ▶ Um (2) zu beweisen, reicht es, ein **Beispiel** zu finden.

\exists -Aussagen

Bei einer Behauptung der Form

$$\exists x : x \text{ hat Eigenschaft } F \quad (2)$$

tritt die umgekehrte Situation auf:

- ▶ Um (2) zu beweisen, reicht es, ein **Beispiel** zu finden.
- ▶ Um (2) zu widerlegen, muss man zeigen, dass kein x die Eigenschaft E besitzt

\exists -Aussagen

Bei einer Behauptung der Form

$$\exists x : x \text{ hat Eigenschaft } F \quad (2)$$

tritt die umgekehrte Situation auf:

- ▶ Um (2) zu beweisen, reicht es, ein **Beispiel** zu finden.
- ▶ Um (2) zu widerlegen, muss man zeigen, dass kein x die Eigenschaft E besitzt (wieder Brute-Force oder ein allgemeines Argument).

\exists -Aussagen

Bei einer Behauptung der Form

$$\exists x : x \text{ hat Eigenschaft } F \quad (2)$$

tritt die umgekehrte Situation auf:

- ▶ Um (2) zu beweisen, reicht es, ein **Beispiel** zu finden.
- ▶ Um (2) zu widerlegen, muss man zeigen, dass kein x die Eigenschaft E besitzt (wieder Brute-Force oder ein allgemeines Argument).

Zusammenfassung:

- ▶ “ $\forall x$ gilt E ” widerlegt man mit einem Gegenbeispiel;
- ▶ “ $\exists x : x$ hat Eigenschaft F ” beweist man mit einem Beispiel.

Negation

Der Grund dieser Symmetrie ist, dass die **Negation** einer \forall -Aussage eine \exists -Aussage ist (und umgekehrt):

Negation

Der Grund dieser Symmetrie ist, dass die **Negation** einer \forall -Aussage eine \exists -Aussage ist (und umgekehrt):

$$\forall x \text{ gilt } E \left\{ \begin{array}{l} \text{wahr} \\ \text{falsch} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{falsch} \\ \text{wahr} \end{array} \right\} \exists x : \text{ für } x \text{ gilt } E \text{ nicht}$$

Negation

Der Grund dieser Symmetrie ist, dass die **Negation** einer \forall -Aussage eine \exists -Aussage ist (und umgekehrt):

$$\forall x \text{ gilt } E \left\{ \begin{array}{l} \text{wahr} \\ \text{falsch} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{falsch} \\ \text{wahr} \end{array} \right\} \exists x : \text{für } x \text{ gilt } E \text{ nicht}$$

$$\exists x : \text{für } x \text{ gilt } F \left\{ \begin{array}{l} \text{wahr} \\ \text{falsch} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{falsch} \\ \text{wahr} \end{array} \right\} \forall x \text{ gilt das Gegenteil von } F$$

Negation

Der Grund dieser Symmetrie ist, dass die **Negation** einer \forall -Aussage eine \exists -Aussage ist (und umgekehrt):

$$\forall x \text{ gilt } E \left\{ \begin{array}{l} \text{wahr} \quad \Leftrightarrow \quad \text{falsch} \\ \text{falsch} \quad \Leftrightarrow \quad \text{wahr} \end{array} \right\} \exists x : \text{ für } x \text{ gilt } E \text{ nicht}$$

$$\exists x : \text{ für } x \text{ gilt } F \left\{ \begin{array}{l} \text{wahr} \quad \Leftrightarrow \quad \text{falsch} \\ \text{falsch} \quad \Leftrightarrow \quad \text{wahr} \end{array} \right\} \forall x \text{ gilt das Gegenteil von } F$$

Definition

Negation einer Behauptung B wird mit \bar{B} bezeichnet.

Negation

Der Grund dieser Symmetrie ist, dass die **Negation** einer \forall -Aussage eine \exists -Aussage ist (und umgekehrt):

$$\forall x \text{ gilt } E \left\{ \begin{array}{l} \text{wahr} \Leftrightarrow \text{falsch} \\ \text{falsch} \Leftrightarrow \text{wahr} \end{array} \right\} \exists x : \text{ für } x \text{ gilt } E \text{ nicht}$$

$$\exists x : \text{ für } x \text{ gilt } F \left\{ \begin{array}{l} \text{wahr} \Leftrightarrow \text{falsch} \\ \text{falsch} \Leftrightarrow \text{wahr} \end{array} \right\} \forall x \text{ gilt das Gegenteil von } F$$

Definition

Negation einer Behauptung B wird mit \bar{B} bezeichnet.

Man kann die folgenden allgemeinen Regel formulieren:

$$\begin{array}{l} \overline{\forall x \text{ gilt } E} \Leftrightarrow \exists x : \bar{E} \\ \overline{\exists x : F} \Leftrightarrow \forall x \text{ gilt } \bar{F} \end{array}$$

Beispiele

- ▶ Die Negation von “ $\forall x \geq 0$ gilt $x^2 \geq x$ ” ist

Beispiele

- ▶ Die Negation von “ $\forall x \geq 0$ gilt $x^2 \geq x$ ” ist “ $\exists x \geq 0 : x^2 < x$ ”.

Beispiele

- ▶ Die Negation von “ $\forall x \geq 0$ gilt $x^2 \geq x$ ” ist “ $\exists x \geq 0 : x^2 < x$ ”.
- ▶ “jede nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Maximum”

Beispiele

- ▶ Die Negation von “ $\forall x \geq 0$ gilt $x^2 \geq x$ ” ist “ $\exists x \geq 0 : x^2 < x$ ”.
- ▶ “jede nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Maximum”
Negation: “es gibt nach oben beschränkte Mengen ohne Maximum”

Beispiele

- ▶ Die Negation von “ $\forall x \geq 0$ gilt $x^2 \geq x$ ” ist “ $\exists x \geq 0 : x^2 < x$ ”.
- ▶ “jede nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Maximum”
Negation: “es gibt nach oben beschränkte Mengen ohne Maximum”
- ▶

$$\overline{\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : 1/n < \epsilon}$$

$$\Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 : \overline{\exists n \in \mathbb{N} : 1/n < \epsilon}$$

$$\Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt } 1/n \geq \epsilon$$

Direkter Beweis

Es gilt, eine Behauptung B zu beweisen.

Direkter Beweis

Es gilt, eine Behauptung B zu beweisen.

$$A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n \Rightarrow B$$

Direkter Beweis

Es gilt, eine Behauptung B zu beweisen.

$$A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n \Rightarrow B$$

A_1 soll ein Axiom oder eine bereits bewiesene Behauptung sein.

Direkter Beweis

Es gilt, eine Behauptung B zu beweisen.

$$A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n \Rightarrow B$$

A_1 soll ein Axiom oder eine bereits bewiesene Behauptung sein. Alle weiteren Behauptungen A_2, A_3, \dots sind dann Lemmas (Hilfssätze) oder Sätze.

Direkter Beweis

Es gilt, eine Behauptung B zu beweisen.

$$A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n \Rightarrow B$$

A_1 soll ein Axiom oder eine bereits bewiesene Behauptung sein. Alle weiteren Behauptungen A_2, A_3, \dots sind dann Lemmas (Hilfssätze) oder Sätze.

Es können auch weitere Axiome oder früher bewiesene Behauptungen herangezogen werden (Beispiel).

Satz

*Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist die n -te
Quadratzahl.*

Satz

*Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist die n -te
Quadratzahl.*

Satz

*Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist die n -te
Quadratzahl.*

$$\{\text{positive ungerade Zahlen}\} = \{2k + 1 \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$$

Satz

*Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist die n -te
Quadratzahl.*

$$\{\text{positive ungerade Zahlen}\} = \{2k + 1 \mid k = 0, 1, 2, \dots\} = \\ \{2k - 1 \mid k = 1, 2, \dots\}$$

Satz

*Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist die n -te
Quadratzahl.*

$\{\text{positive ungerade Zahlen}\} = \{2k + 1 \mid k = 0, 1, 2, \dots\} =$
 $\{2k - 1 \mid k = 1, 2, \dots\}$ Es ist also zu zeigen:

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$$

Satz

Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist die n -te Quadratzahl.

$\{\text{positive ungerade Zahlen}\} = \{2k + 1 \mid k = 0, 1, 2, \dots\} = \{2k - 1 \mid k = 1, 2, \dots\}$ Es ist also zu zeigen:

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$$

Erster Beweis.

$\sum_{k=1}^n (2k - 1) =: x$, dann gilt

Satz

Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist die n -te Quadratzahl.

$\{\text{positive ungerade Zahlen}\} = \{2k + 1 \mid k = 0, 1, 2, \dots\} = \{2k - 1 \mid k = 1, 2, \dots\}$ Es ist also zu zeigen:

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$$

Erster Beweis.

$\sum_{k=1}^n (2k - 1) =: x$, dann gilt

$$\begin{aligned} 2x &= 1 + 3 + \dots + (2n-1) + \\ &+ (2n-1) + (2n-3) + \dots + 1 = \\ &= 2n + 2n + \dots + 2n = 2n^2 \end{aligned}$$

Satz

Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist die n -te Quadratzahl.

$\{\text{positive ungerade Zahlen}\} = \{2k + 1 \mid k = 0, 1, 2, \dots\} = \{2k - 1 \mid k = 1, 2, \dots\}$ Es ist also zu zeigen:

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$$

Erster Beweis.

$\sum_{k=1}^n (2k - 1) =: x$, dann gilt

$$\begin{aligned} 2x &= 1 + 3 + \dots + (2n-1) + \\ &+ (2n-1) + (2n-3) + \dots + 1 = \\ &= 2n + 2n + \dots + 2n = 2n^2 \end{aligned}$$

Folglich gilt $x = n^2$.



Zweiter Beweis.

1	3	5	7	9

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$



Satz

$$\sum_{i=0}^n q^i = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{für } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{für } q = 1 \end{cases}$$

Satz

$$\sum_{i=0}^n q^i = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{für } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{für } q = 1 \end{cases}$$

Beweis.

Setze $1 + q + q^2 + \dots + q^n =: x$.

Satz

$$\sum_{i=0}^n q^i = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{für } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{für } q = 1 \end{cases}$$

Beweis.

Setze $1 + q + q^2 + \dots + q^n =: x$. Dann gilt

$$q \cdot x = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1} = x - 1 + q^{n+1}$$

Satz

$$\sum_{i=0}^n q^i = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{für } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{für } q = 1 \end{cases}$$

Beweis.

Setze $1 + q + q^2 + \dots + q^n =: x$. Dann gilt

$$q \cdot x = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1} = x - 1 + q^{n+1}$$

Auflösen nach x ergibt

$$1 - q^{n+1} = x(1 - q) \Rightarrow x = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Satz

$$\sum_{i=0}^n q^i = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{für } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{für } q = 1 \end{cases}$$

Beweis.

Setze $1 + q + q^2 + \dots + q^n =: x$. Dann gilt

$$q \cdot x = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1} = x - 1 + q^{n+1}$$

Auflösen nach x ergibt

$$1 - q^{n+1} = x(1 - q) \Rightarrow x = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Dies allerdings nur bei $q \neq 1$.

Satz

$$\sum_{i=0}^n q^i = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{für } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{für } q = 1 \end{cases}$$

Beweis.

Setze $1 + q + q^2 + \dots + q^n =: x$. Dann gilt

$$q \cdot x = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1} = x - 1 + q^{n+1}$$

Auflösen nach x ergibt

$$1 - q^{n+1} = x(1 - q) \Rightarrow x = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Dies allerdings nur bei $q \neq 1$. Bei $q = 1$ gilt $q^k = 1$ für alle k , also die Summe ist gleich $n + 1$. □

Widerspruchsbeweis

Es gilt, Behauptung B zu beweisen.

Widerspruchsbeweis

Es gilt, Behauptung B zu beweisen. Man nimmt an, dass das logische Gegenteil von B wahr ist, und leitet daraus einen Widerspruch her:

$$\bar{B} \Rightarrow B_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow B_n \Rightarrow \bar{A}, \quad (3)$$

Widerspruchsbeweis

Es gilt, Behauptung B zu beweisen. Man nimmt an, dass das logische Gegenteil von B wahr ist, und leitet daraus einen Widerspruch her:

$$\bar{B} \Rightarrow B_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow B_n \Rightarrow \bar{A}, \quad (3)$$

wobei A ein **Axiom**

Widerspruchsbeweis

Es gilt, Behauptung B zu beweisen. Man nimmt an, dass das logische Gegenteil von B wahr ist, und leitet daraus einen Widerspruch her:

$$\bar{B} \Rightarrow B_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow B_n \Rightarrow \bar{A}, \quad (3)$$

wobei A ein **Axiom** oder eine früher bewiesene (also wahre) **Aussage**

Widerspruchsbeweis

Es gilt, Behauptung B zu beweisen. Man nimmt an, dass das logische Gegenteil von B wahr ist, und leitet daraus einen Widerspruch her:

$$\bar{B} \Rightarrow B_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow B_n \Rightarrow \bar{A}, \quad (3)$$

wobei A ein **Axiom** oder eine früher bewiesene (also wahre) **Aussage** oder eine **Voraussetzung** innerhalb von B ist.

Widerspruchsbeweis

Es gilt, Behauptung B zu beweisen. Man nimmt an, dass das logische Gegenteil von B wahr ist, und leitet daraus einen Widerspruch her:

$$\bar{B} \Rightarrow B_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow B_n \Rightarrow \bar{A}, \quad (3)$$

wobei A ein **Axiom** oder eine früher bewiesene (also wahre) **Aussage** oder eine **Voraussetzung** innerhalb von B ist. Diese Beweismethode basiert auf dem folgenden Gesetz der Logik:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$$

Widerspruchsbeweis

Es gilt, Behauptung B zu beweisen. Man nimmt an, dass das logische Gegenteil von B wahr ist, und leitet daraus einen Widerspruch her:

$$\bar{B} \Rightarrow B_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow B_n \Rightarrow \bar{A}, \quad (3)$$

wobei A ein **Axiom** oder eine früher bewiesene (also wahre) **Aussage** oder eine **Voraussetzung** innerhalb von B ist.

Diese Beweismethode basiert auf dem folgenden Gesetz der Logik:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$$

(der “Kaiser von China”-Prinzip).

Widerspruchsbeweis

Es gilt, Behauptung B zu beweisen. Man nimmt an, dass das logische Gegenteil von B wahr ist, und leitet daraus einen Widerspruch her:

$$\bar{B} \Rightarrow B_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow B_n \Rightarrow \bar{A}, \quad (3)$$

wobei A ein **Axiom** oder eine früher bewiesene (also wahre) **Aussage** oder eine **Voraussetzung** innerhalb von B ist.

Diese Beweismethode basiert auf dem folgenden Gesetz der Logik:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$$

(der “Kaiser von China“-Prinzip).

Man kann also die Kette (3) in einen direkten Beweis umwandeln:

$$A \Rightarrow \bar{B}_n \Rightarrow \dots \Rightarrow \bar{B}_1 \Rightarrow B$$

Irrationalität von $\sqrt{2}$

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.

Irrationalität von $\sqrt{2}$

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.

Lemma

Wenn n^2 eine gerade Zahl ist, dann ist auch n gerade.

Irrationalität von $\sqrt{2}$

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.

Lemma

Wenn n^2 eine gerade Zahl ist, dann ist auch n gerade.

Beweis.

Widerspruchsbeweis.

Irrationalität von $\sqrt{2}$

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.

Lemma

Wenn n^2 eine gerade Zahl ist, dann ist auch n gerade.

Beweis.

Widerspruchsbeweis. Angenommen, n ist ungerade. Dann gilt $n = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Irrationalität von $\sqrt{2}$

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.

Lemma

Wenn n^2 eine gerade Zahl ist, dann ist auch n gerade.

Beweis.

Widerspruchsbeweis. Angenommen, n ist ungerade. Dann gilt $n = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Folglich

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1,$$

Irrationalität von $\sqrt{2}$

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.

Lemma

Wenn n^2 eine gerade Zahl ist, dann ist auch n gerade.

Beweis.

Widerspruchsbeweis. Angenommen, n ist ungerade. Dann gilt $n = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Folglich

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1,$$

also n^2 ungerade, was der Annahme des Lemmas widerspricht. □

Beweis des Satzes.

Widerspruchsbeweis.

Beweis des Satzes.

Widerspruchsbeweis. Sei $\sqrt{2}$ rational, also

$$\exists m, n \in \mathbb{Z} : \frac{m}{n} = \sqrt{2} \quad (4)$$

Beweis des Satzes.

Widerspruchsbeweis. Sei $\sqrt{2}$ rational, also

$$\exists m, n \in \mathbb{Z} : \frac{m}{n} = \sqrt{2} \quad (4)$$

Wir dürfen annehmen, dass m und n teilerfremd sind (durch Kürzen erreichbar).

Beweis des Satzes.

Widerspruchsbeweis. Sei $\sqrt{2}$ rational, also

$$\exists m, n \in \mathbb{Z} : \frac{m}{n} = \sqrt{2} \quad (4)$$

Wir dürfen annehmen, dass m und n teilerfremd sind (durch Kürzen erreichbar). Aus (4) folgt

$$m^2 = 2n^2, \quad (5)$$

also ist m^2 eine gerade Zahl.

Beweis des Satzes.

Widerspruchsbeweis. Sei $\sqrt{2}$ rational, also

$$\exists m, n \in \mathbb{Z} : \frac{m}{n} = \sqrt{2} \quad (4)$$

Wir dürfen annehmen, dass m und n teilerfremd sind (durch Kürzen erreichbar). Aus (4) folgt

$$m^2 = 2n^2, \quad (5)$$

also ist m^2 eine gerade Zahl. Nach dem Lemma ist auch m gerade: $\exists k \in \mathbb{Z} : m = 2k$.

Beweis des Satzes.

Widerspruchsbeweis. Sei $\sqrt{2}$ rational, also

$$\exists m, n \in \mathbb{Z} : \frac{m}{n} = \sqrt{2} \quad (4)$$

Wir dürfen annehmen, dass m und n teilerfremd sind (durch Kürzen erreichbar). Aus (4) folgt

$$m^2 = 2n^2, \quad (5)$$

also ist m^2 eine gerade Zahl. Nach dem Lemma ist auch m gerade: $\exists k \in \mathbb{Z} : m = 2k$. Dann haben wir $m^2 = 4k^2$. Durch Einsetzen in (5) erhalten wir

$$2k^2 = n^2$$

Beweis des Satzes.

Widerspruchsbeweis. Sei $\sqrt{2}$ rational, also

$$\exists m, n \in \mathbb{Z} : \frac{m}{n} = \sqrt{2} \quad (4)$$

Wir dürfen annehmen, dass m und n teilerfremd sind (durch Kürzen erreichbar). Aus (4) folgt

$$m^2 = 2n^2, \quad (5)$$

also ist m^2 eine gerade Zahl. Nach dem Lemma ist auch m gerade: $\exists k \in \mathbb{Z} : m = 2k$. Dann haben wir $m^2 = 4k^2$. Durch Einsetzen in (5) erhalten wir

$$2k^2 = n^2$$

Analog zum Obigen, ist n eine gerade Zahl.

Beweis des Satzes.

Widerspruchsbeweis. Sei $\sqrt{2}$ rational, also

$$\exists m, n \in \mathbb{Z} : \frac{m}{n} = \sqrt{2} \quad (4)$$

Wir dürfen annehmen, dass m und n teilerfremd sind (durch Kürzen erreichbar). Aus (4) folgt

$$m^2 = 2n^2, \quad (5)$$

also ist m^2 eine gerade Zahl. Nach dem Lemma ist auch m gerade: $\exists k \in \mathbb{Z} : m = 2k$. Dann haben wir $m^2 = 4k^2$. Durch Einsetzen in (5) erhalten wir

$$2k^2 = n^2$$

Analog zum Obigen, ist n eine gerade Zahl.

Wir haben nun bewiesen, dass m und n einen gemeinsamen Teiler 2 haben, was der Annahme über ihre Teilerfremdheit widerspricht.

Induktion

Es gilt, eine Behauptung zu beweisen, die eine natürliche Variable n enthält

Induktion

Es gilt, eine Behauptung zu beweisen, die eine natürliche Variable n enthält (also Behauptung der Form “ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt E ”)

Induktion

Es gilt, eine Behauptung zu beweisen, die eine natürliche Variable n enthält (also Behauptung der Form “ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt E ”)
Manchmal kann man einen Beweis führen, der für alle Werte von n funktioniert.

Induktion

Es gilt, eine Behauptung zu beweisen, die eine natürliche Variable n enthält (also Behauptung der Form “ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt E ”)
Manchmal kann man einen Beweis führen, der für alle Werte von n funktioniert.

► $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$

Induktion

Es gilt, eine Behauptung zu beweisen, die eine natürliche Variable n enthält (also Behauptung der Form “ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt E ”)
Manchmal kann man einen Beweis führen, der für alle Werte von n funktioniert.

- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$
- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt (n^2 gerade $\Rightarrow n$ gerade)

Induktion

Es gilt, eine Behauptung zu beweisen, die eine natürliche Variable n enthält (also Behauptung der Form “ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt E ”)
Manchmal kann man einen Beweis führen, der für alle Werte von n funktioniert.

- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$
- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt (n^2 gerade $\Rightarrow n$ gerade)

Man kann die **allgemeine** Behauptung “ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt E ” auch als eine unendliche Folge der **Spezialfälle** darstellen

B_1 = “die Zahl 1 hat Eigenschaft E ”

B_2 = “die Zahl 2 hat Eigenschaft E ”

...

Induktion

Es gilt, eine Behauptung zu beweisen, die eine natürliche Variable n enthält (also Behauptung der Form “ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt E ”)
Manchmal kann man einen Beweis führen, der für alle Werte von n funktioniert.

- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$
- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt (n^2 gerade $\Rightarrow n$ gerade)

Man kann die **allgemeine** Behauptung “ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt E ” auch als eine unendliche Folge der **Spezialfälle** darstellen

B_1 = “die Zahl 1 hat Eigenschaft E ”

B_2 = “die Zahl 2 hat Eigenschaft E ”

...

Wenn man individuell feststellt, dass B_1 wahr ist, B_2 wahr, B_3 wahr,...

Induktion

Es gilt, eine Behauptung zu beweisen, die eine natürliche Variable n enthält (also Behauptung der Form “ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt E ”)
Manchmal kann man einen Beweis führen, der für alle Werte von n funktioniert.

- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$
- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt (n^2 gerade $\Rightarrow n$ gerade)

Man kann die **allgemeine** Behauptung “ $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt E ” auch als eine unendliche Folge der **Spezialfälle** darstellen

B_1 = “die Zahl 1 hat Eigenschaft E ”

B_2 = “die Zahl 2 hat Eigenschaft E ”

...

Wenn man individuell feststellt, dass B_1 wahr ist, B_2 wahr, B_3 wahr,...

... dann **glaubt** man nach einer Weile, dass B_n für alle n gilt.

Dies ist **unvollständige Induktion**.

Vollständige Induktion

Um die Wahrheit von B_n für alle n zu beweisen, genügt es die folgenden zwei Aussagen zu beweisen:

Vollständige Induktion

Um die Wahrheit von B_n für alle n zu beweisen, genügt es die folgenden zwei Aussagen zu beweisen:

Induktionsanfang B_1 ist wahr

Vollständige Induktion

Um die Wahrheit von B_n für alle n zu beweisen, genügt es die folgenden zwei Aussagen zu beweisen:

Induktionsanfang B_1 ist wahr

Induktionsschritt aus der Annahme von B_n (
Induktionsannahme) folgt B_{n+1}

Vollständige Induktion

Um die Wahrheit von B_n für alle n zu beweisen, genügt es die folgenden zwei Aussagen zu beweisen:

Induktionsanfang B_1 ist wahr

Induktionsschritt aus der Annahme von B_n (**Induktionsannahme**) folgt B_{n+1}

Man beachte, dass der Induktionsschritt auch eine allgemeine Aussage ist ("für alle n aus B_n folgt B_{n+1} ").

Vollständige Induktion

Um die Wahrheit von B_n für alle n zu beweisen, genügt es die folgenden zwei Aussagen zu beweisen:

Induktionsanfang B_1 ist wahr

Induktionsschritt aus der Annahme von B_n (**Induktionsannahme**) folgt B_{n+1}

Man beachte, dass der Induktionsschritt auch eine allgemeine Aussage ist (“für alle n aus B_n folgt B_{n+1} ”). Der Trick ist, dass es einfacher zu beweisen sein kann als “für alle n gilt B_n ”.

Vollständige Induktion

Um die Wahrheit von B_n für alle n zu beweisen, genügt es die folgenden zwei Aussagen zu beweisen:

Induktionsanfang B_1 ist wahr

Induktionsschritt aus der Annahme von B_n (**Induktionsannahme**) folgt B_{n+1}

Man beachte, dass der Induktionsschritt auch eine allgemeine Aussage ist (“für alle n aus B_n folgt B_{n+1} ”). Der Trick ist, dass es einfacher zu beweisen sein kann als “für alle n gilt B_n ”.

“Domino-Prinzip”

Vollständige Induktion

Um die Wahrheit von B_n für alle n zu beweisen, genügt es die folgenden zwei Aussagen zu beweisen:

Induktionsanfang B_1 ist wahr

Induktionsschritt aus der Annahme von B_n (**Induktionsannahme**) folgt B_{n+1}

Man beachte, dass der Induktionsschritt auch eine allgemeine Aussage ist (“für alle n aus B_n folgt B_{n+1} ”). Der Trick ist, dass es einfacher zu beweisen sein kann als “für alle n gilt B_n ”.

“Domino-Prinzip”

Übrigens, die Gültigkeit des Induktionsprinzips ist das fünfte Peano-Axiom in der Axiomatik der natürlichen Zahlen.

Satz

*Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist die n -te
Quadratzahl.*

Satz

*Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist die n -te
Quadratzahl.*

Dritter Beweis.

Induktionsbeweis.

Satz

*Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist die n -te
Quadratzahl.*

Dritter Beweis.

Induktionsbeweis. Zu zeigen ist: $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Satz

*Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist die n -te
Quadratzahl.*

Dritter Beweis.

Induktionsbeweis. Zu zeigen ist: $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Induktionsanfang: Bei $n = 1$ steht hier $1 = 1$, was wahr ist.

Satz

*Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist die n -te
Quadratzahl.*

Dritter Beweis.

Induktionsbeweis. Zu zeigen ist: $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Induktionsanfang: Bei $n = 1$ steht hier $1 = 1$, was wahr ist.

Induktionsschritt: Angenommen $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$
(Induktionsannahme),

Satz

Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist die n -te Quadratzahl.

Dritter Beweis.

Induktionsbeweis. Zu zeigen ist: $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Induktionsanfang: Bei $n = 1$ steht hier $1 = 1$, was wahr ist.

Induktionsschritt: Angenommen $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$
(Induktionsannahme), wollen wir

$1 + 3 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$ beweisen.

Satz

*Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist die n -te
Quadratzahl.*

Dritter Beweis.

Induktionsbeweis. Zu zeigen ist: $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Induktionsanfang: Bei $n = 1$ steht hier $1 = 1$, was wahr ist.

Induktionsschritt: Angenommen $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$
(Induktionsannahme), wollen wir

$1 + 3 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$ beweisen.

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \dots + (2n + 1) &= (1 + 3 + \dots + (2n - 1)) + 2n + 1 = \\ & \text{(nach Induktionsannahme)} = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2 \end{aligned}$$



In Wirklichkeit ist der dritte Beweis eine Formalisierung des zweiten:

In Wirklichkeit ist der dritte Beweis eine Formalisierung des zweiten:

	n		1
	n^2		n

$n^2 + n + n + 1 = (n + 1)^2$ ist der Induktionsschritt

Satz

Sei $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ durch

$$a_1 = 1$$
$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \text{ für alle } n \geq 1$$

definiert. Dann ist die Menge A nach oben beschränkt.

Satz

Sei $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ durch

$$a_1 = 1$$
$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \text{ für alle } n \geq 1$$

definiert. Dann ist die Menge A nach oben beschränkt.

Die Folge a_1, a_2, \dots ist **rekursiv definiert**.

Satz

Sei $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ durch

$$a_1 = 1$$
$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \text{ für alle } n \geq 1$$

definiert. Dann ist die Menge A nach oben beschränkt.

Die Folge a_1, a_2, \dots ist **rekursiv definiert**. In einer solchen Situation eignet sich ein Induktionsargument hervorragend.

Satz

Sei $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ durch

$$a_1 = 1$$
$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \text{ für alle } n \geq 1$$

definiert. Dann ist die Menge A nach oben beschränkt.

Die Folge a_1, a_2, \dots ist **rekursiv definiert**. In einer solchen Situation eignet sich ein Induktionsargument hervorragend.

Beweis.

Wir behaupten, dass 2 eine obere Schranke der Menge A ist, d. h. $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq 2$.

Satz

Sei $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ durch

$$a_1 = 1$$
$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \text{ für alle } n \geq 1$$

definiert. Dann ist die Menge A nach oben beschränkt.

Die Folge a_1, a_2, \dots ist **rekursiv definiert**. In einer solchen Situation eignet sich ein Induktionsargument hervorragend.

Beweis.

Wir behaupten, dass 2 eine obere Schranke der Menge A ist, d. h. $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq 2$. Induktionsbeweis:

Induktionsanfang: $a_1 = 1 < 2$

Satz

Sei $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ durch

$$a_1 = 1$$
$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \text{ für alle } n \geq 1$$

definiert. Dann ist die Menge A nach oben beschränkt.

Die Folge a_1, a_2, \dots ist **rekursiv definiert**. In einer solchen Situation eignet sich ein Induktionsargument hervorragend.

Beweis.

Wir behaupten, dass 2 eine obere Schranke der Menge A ist, d. h. $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq 2$. Induktionsbeweis:

Induktionsanfang: $a_1 = 1 < 2$

Induktionsschritt: Unter Annahme $a_n \leq 2$ gilt

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \leq \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3} < 2$$

