Mathematische Probleme für Schüler

Ivan Izmestiev

Inhaltsverzeichnis

1 Invariante

1. Auf dem Tisch stehen 6 Becher, 3 davon richtig und 3 kopfüber. Mit einem Zug darf man 2 beliebige Becher nehmen und umdrehen. Ist es möglich, nach mehreren Zügen alle Becher richtig zu stellen?

2. Im neandertalischen Alphabet gibt es nur zwei Buchstaben: A und U. Die Neandertalische Sprache hat die folgenden Regeln:

(a) wenn man aus einem Wort die nacheinanderfolgende Buchstaben UA wegstreicht, ändert sich die Bedeutung des Wortes nicht;

(b) ebenfalls bleibt die Bedeutung dieselbe, wenn man die Buchstaben AU durch UUAA ersetzt.

Kann man daraus schließen, dass die Wörter UAA und AUU gleichbedeutend für die Neandertaler sind?

Wie löst man die Aufgabe 1? Versuchen wir zuerst das gesetzte Ziel zu erreichen. Nach mehreren Versuchen stellen wir fest, dass es immer einige Becher kopfüber stehen bleiben. Dies kann uns zum Schluß veranlassen, dass die Antwort "nein, unmöglich" lautet. Die einzige Begründung aber, die wir mittlerweile liefern können, ist "Wir haben es mehrmals versucht, es kommt nie raus." Die Erwiderung "Versucht es nochmal, vielleicht schafft ihr doch" zeigt in vollem Maße, wie schwach unser Argument ist. Nun müssen wir einen tadellosen Beweis herbeiführen.

Als wir mit den Bechern spielten, haben wir wohl bemerkt, dass die Anzahl von kopfüber stehenden Bechern immer 1, 3 oder 5 war. Alle diese Zahlen sind ungerade. Zufall? Nein. *Die Anzahl von kopfüber stehenden Becher bleibt immer ungerade*, und um das nachzuweisen, betrachten wir *die Auswirkung, die jedes Umdrehen auf diese Zahl hat.* Im Wesentlichen gibt es nur drei Fälle. Drehen wir zwei richtig stehende Becher um, so wird die Anzahl von "kopfüber" um 2 grösser. Nehmen wir einen richtigen und einen "kopfüber", ändert sich diese Zahl nicht. Endlich, beim Umdrehen von zwei "kopfüber" wird sie um 2 kleiner. In der Anfangsposition ist die Zahl gleich 3. Jedes Mal, wenn die Anzahl von "kopfüber" vor einem Umdrehen ungerade war, bleibt sie auch danach ungerade. Also, alle Becher richtig zu stellen, das heißt, 0 kopfüber stehenden Becher zu kriegen, ist unmöglich.

In ähnlicher Weise löst kann auch die Aufgabe 2 gelöst werden. Und zwar, betrachten Sie die Differenz zwischen der Anzahl von Buchstaben A und der Anzahl von Buchstaben U in einem Wort der neandertalischen Sprache. Das Wegstreichen von UA und das Ersetzen von AU durch UUAA (als auch die inverse Operationen) ändern diese Differenz nicht. Für die Wörter UAA und AUU nimmt sie aber verschiedene Werte. Deswegen kann man allein aus der zwei Regeln nicht beschliessen, dass diese Wörter gleiche Bedeutung haben. [1]

Das Verfahren, das wir angewendet haben, heißt **Beweis der Unmöglichkeit mittels einer Invariante**. Unten geben wir eine allgemeine Beschreibung dieses Verfahrens.

Eine **Invariante** ist eine *Charakteristik* (z. B. eine Zahl), das bestimmten *Objekten* zugeschrieben ist und sich bei bestimmten *Transformationen* von diesen Objekten *nicht ändert.* Angenommen, in einem Problem wird gefragt, ob man ein Objekt in ein anderes durch

[1] Die neandertalische Grammatik konnte noch weitere Regeln haben, nach welchen diese Wörter gleiche Bedeutung haben würden. Das ist der Grund, warum wir uns so vorsichtig ausdrücken: "Aus der obengenannten Regeln folgt es nicht".

bestimmten Transformationen umwandeln kann. Wenn man eine Invariante dieser Transformationen finden kann, die auf dem Anfangsobjekt und auf dem Endobjekt verschiedene Werte hat, so kann man behaupten, dass die erwünschte Umwandlung unmöglich ist.

Zum Beispiel, ein Objekt in der Aufgabe 1 ist eine Aufstellung der Bechern auf dem Tisch, eine erlaubte Transformation ist ein Umdrehen von zwei beliebigen Bechern, und eine Invariante ist die Parität ("gerade" oder "ungerade") der Anzahl von Bechern kopfüber.

Nun können Sie jetzt selbst versuchen, die folgenden Aufgaben mittels einer Invariante zu lösen.

3. Auf 6 Tannen sitzen 6 Sperlinge, auf jeder Tanne ein Sperling. Die Tannen stehen in einer Reihe mit Abstand 10 Meter. Wenn ein Sperling von einer Tanne auf eine andere fliegt, muß einer von den anderen in die Gegenrichtung auf die gleiche Distanz fliegen. Können sich alle Sperlinge auf einer Tanne sammeln?

4. In der Tabelle 4×4 ist die linke obere Zelle in schwarz gefärbt, alle übrige Zellen sind weiß. Zeigen Sie, dass es unmöglich ist, durch Umfärbungen von Zeilen und Spalten die ganze Tabelle weiß zu machen.

5. Dieselbe Frage, wie in der letzten Aufgabe, aber für die Tabelle 3×3?

6. Die Insel Weißblaurot ist von 13 weißen, 15 blauen und 17 roten Chamäleonen bewohnt. Wenn zwei Chamäleone von verschiedenen Farben aufeinander treffen, wechseln sie ihre Farben zur dritte (z. B. ein weißes und ein blaues werden beide rot). Können nach einiger Zeit alle Chamäleone gleichfarbig werden?

7. Auf dem Tafel stehen die Zahlen $1, 2, \ldots, 20$. Mit einem Zug darf man zwei Zahlen a und b wegwischen und die Zahl $ab+a+b$ aufschreiben. Was kann auf dem Tafel nach 19 Züge stehen?

In der letzten Aufgabe spielt eine Invariante nicht mehr eine "destruktive", sondern eine "konstruktive" Rolle. Hier ist die Lösung: Vergrößern wir jede Zahl auf dem Brett um 1 und multiplizieren alle Ergebnisse. Ich behaupte, dass dieses Produkt eine Invariante der in der Aufgabe beschriebenen Transformation ist. Dies folgt aus der Identität $(a+1)(b+1) = (ab+a+b)+1$. Nun, wenn am Ende auf dem Tafel die Zahl N steht, muss $N+1$ gleich dem Produkt der um 1 vergrößerten Zahlen $1, 2, \ldots, 20$ sein. Folglich, $N = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 21 - 1$.

Noch ein Beispiel, wo eine Invariante in derselben Rolle auftritt:

8. Seien a und b zwei natürliche Zahlen. Der *Euklidische Algorithmus* erlaubt den größten gemeinsamen Teiler von a und b zu bestimmen. Er funktioniert wie folgt: Mit einem Schritt wischt man die größte der zwei Zahlen ab und schreibt auf ihrer Stelle die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten. So, falls $a > b$, ergibt sich aus dem Paar (a, b) das Paar $(a -$

b, b). Man wiederholt diesen Schritt bis man ein aus zwei gleichen Zahlen bestehendes Paar (d, d) bekommt.

Zeigen Sie, dass d der größte gemeinsamer Teiler von a und b ist.

Und zum Schluss — eine Aufgabe nicht zum Thema.

9.

2 Kombinatorik

1. In der Mensa gibt es 4 Hauptgerichte und 3 Beilagen. Wieviele Möglichkeiten gibt es, ein Gericht mit einer Beilage zu wählen?

2. Außerdem gibt es in der Mensa 3 verschiedene Salate. Wieviele Möglichkeiten gibt es, ein Menü zusammenzustellen, das aus einem Salat und einem Gericht mit einer Beilage besteht?

3. Unten ist die Karte des Wunderlandes abgebildet. Wieviele Wege gibt es zwischen der Städte A und C? (Gemeint sind nur die kürzeste Wege, die aus zwei Strecken bestehen.)

Nehmen wir an, eine Wahl besteht aus zwei *unabhängigen* Teilen, die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten beim ersten Teil ist m_1, beim zweiten Teil m_2. Dann gilt die **Produktregel**: die gesamte Anzahl der Möglichkeiten ist gleich $m_1 m_2$.

Wenn wir uns bei unserer Wahl zwischen zwei *unvereinbaren* Möglichkeitenmengen entscheiden müßen, wobei die erste Menge aus m_1 und die zweite aus m_2 Möglichkeiten besteht, gilt die **Summeregel**: die gesamte Anzahl der Möglichkeiten ist gleich $m_1 + m_2$.

Mathematisch kann man diese Regeln folgendermaßen ausdrücken:

$$|M_1 \times M_2| = |M_1| \times |M_2|$$

$$M_1 \cap M_2 = \emptyset \Longrightarrow |M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2|,$$

wobei M_1 und M_2 endliche Mengen sind, und $|\quad|$ die Mächtigkeit (Anzahl der Elemente) bedeutet.

Die Frage "Wieviele Möglichkeiten?" ist oft in der Wahrscheinlichkeitstheorie zu beantworten. Nehmen wir an, es gibt n *Elementarereignisse* (z. B. "Heute ist Montag, Dienstag,... Sonntag") so dass genau eine von ihnen stattfindet und zwar mit der gleichen Wahrscheinlichkeit. Wenn wir nun die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E (z. B. "Heute ist Wochenende") ausrechnen wollen, müßen wir die Anzahl m der Elementarereignisse bestimmen, die im Ereignis E eingeschloßen sind. (In unserem Beispiel $m = 2$.) Dann ist die Wahrscheinlichkeit von E durch die folgende Formel gegeben:

$$P(E) = \frac{m}{n}$$

Und jetzt noch einige Aufgaben.

4. Man wirft eine Münze fünf Mal. Wieviele verschiedene Sequenzen von Kopf und Zahl können herauskommen?

5. Drei Freunde wollen durch das Los bestimmen, wer von ihnen das Essen im Restaurant bezahlt. Können sie dieses Los auf eine gerechte Weise mit Hilfe von einer Münze realisieren?

In der letzten Aufgabe muß man deutlich definieren, wie das Los organisiert werden darf. Wir machen es wie folgt. Das Los besteht aus eindeutigen Vorschriften, die sagen, wie man sich bei jedem möglichem Ergebnis von vorherigen Münzwurfen verhalten muß — weiter die Münze werfen oder einen von den Freunden bezahlen lassen. Außerdem, muß das Los in einer im voraus bestimmten Zeit beendet werden. (Wenn man auf die letzte Bedingung verzichtet, ist es im Prinzip möglich das Los in einer unabsehbare Zeit zu realisieren.)

6. In einer Fußballmannschaft wählt man den Kapitän und seinen Stellvertreter. Wieviele Möglichkeiten gibt es dafür?

In der letzten Aufgabe ist die Wahl des Stellvertreters nicht von der Wahl des Kapitäns unabhängig: man wählt aus dem Rest der Mannschaft. Trotzdem ist die *Anzahl* von Möglichkeiten bei der zweiten Wahl unabhängig von der Entscheidung bei der ersten Wahl. Die Produktregel läßt sich entsprechend modifizieren.

7. Man hat 6 Bücher. Auf wievielen verschiedenen Weisen kann man die Bücher auf einem Regal stellen?

8. Wieviele Aufstellungen gibt es von 8 Türmen auf dem Schachbrett, so dass kein Turm schlägt einen anderen?

Ich hoffe, dass es für Sie schon eine routine Sache geworden ist, eine Wahl in unabhängige Teile zu splitten und die entsprechende Zahlen zu multiplizieren. Wir kehren dazu mal wieder zurück. Es gibt Situationen, wo die Auszählung von Möglichkeiten nicht so einfach ist, und man neue Ideen finden muß.

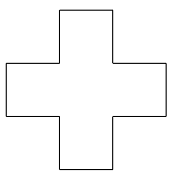
9. Wieviele 7-stellige Telefonnummer gibt es, wo das Ziffer 9 mindestens einmal vorkommt?

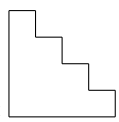
10. Man wirft 2 Würfel. Welche Ereignis hat eine höhere Wahrscheinlichkeit: dass die Summe von herauskommenden Zahlen größer als 7 wird oder dass diese Summe kleiner als 7 wird?

11. Beim Einsteigen im Flugzeug ist eine alte kurzsichtige Dame als erste eingestiegen. Sie hat ihren Platz nicht gefunden und hat einen willkürlichen Sessel gewählt. Alle übrigen Passagiere sind nacheinander eingestiegen und haben die Plätze nach der folgenden Regel genommen: Wenn sein Platz frei ist, nimmt ihn der Passagier, wenn besetzt, wählt er einen Platz willkürlich. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der letzte Passagier seinen eigenen Platz genommen hat?

3 Schneiden und Kleben

1. Schneiden Sie das Kreuz in 5 Teile, aus denen man ein Quadrat zusammenstellen kann.



2. Durch “Schneiden und Kleben” mache ein Quadrat aus der Treppe: 

Aufgaben dieser Art haben immer eine Lösung. Nämlich, es gilt der Satz von Bolyai und Gervin: *zwei Vielecke können durch geradliniges Schneiden und Kleben ineinander übergeführt werden (sind äquidekomposabel) genau dann wenn sie den gleichen Flächeninhalt haben.* Im Gegenteil, für Polytope im dreidimensionalen Raum ist die Antwort nicht so einfach. Ein der Hilbertschen Probleme, die David Hilbert im 1900 als "Aufgabe" für Mathematiker für das XX Jahrhundert formuliert hat, handelt genau darum. Max Dehn, ein Schüler von Hilbert, hat das gelöst. Er hat bewiesen dass es eine zusätzliche Invariante außer Volumeninhalt existiert, die z.B. die Transformation vom Tetraeder ins Würfel verhindert! Um die Lösung zu verstehen, genügt es mit der Linearen Algebra (Tensorprodukte) vertraut zu sein. Ferner, die Frage über äquidekomposable Polytope im hyperbolischen Raum ist bis heute nicht beantwortet. Die Forschungen auf diesem Gebiet beziehen komplizierte Begriffe der modernen Mathematik ein.

Eine Skizze des Beweises des Satzes von Bolyai und Gervin.

Wo man eine elementare Darstellung der Lösung der erwähnten Hilbertschen Probleme findet: D. Fuks, "Mozhno li iz tetraedra sdelat' kub", Kvant, n. 11, 1990.

4 Induktion

1. Aus dem karierten Quadrat 16×16 hat man eine Zelle ausgeschnitten. Zeigen Sie, dass der Rest in "Eckchen" aus 3 Zellen geschnitten werden kann.

2. Das Quadrat in der Aufgabe 1. hat die Größe 1024×1024.

3. Zeigen Sie, dass die Zahl $111\dots11$ (243 Ziffern "1") durch 243 teilbar ist.

Wenn wir die Lösung der Aufgabe 2. darlegen, können wir ohne Wörter "und so weiter" nicht auskommen. Die Lösung des Problems für das Quadrat der Größe 2×2 erlaubt uns das Problem für die Größe 4×4 zu lösen, die letzte bringt uns wiederum zur Lösung des Problems für 8×8, *und so weiter* bis 1024×1024. Es wäre aber gut, zu erklären, *wie* nämlich weiter. So wird unsere Argumentation genauer und kürzer. Jetzt stellen wir ein traditionelles mathematisches Verfahren dar, es zu machen.

Wir haben eine Reihe von Aussagen, eine Aussage für jede natürliche Zahl n: "Das Quadrat $2^n \times 2^n$ ohne eine Zelle läßt sich in Eckchen schneiden." Bezeichnen wir die n-te Aussage mit A_n. A_1 läßt sich einfach beweisen. Aus A_1 folgt A_2, aus A_2 folgt A_3, und so... Stopp! Man kann doch sagen: aus A_k folgt A_{k+1} für jedes k. Geben Sie den Beweis dieser Folgerung! Vergessen Sie auch nicht, die Gültigkeit von A_1 zu beweisen. (Unser Beweis läuft wie eine Welle, man muß aber zuerst einen Stein werfen.)

Dieses Schema heißt **mathematische Induktion**. Unsere Behauptung lautet "A_n gilt für jedes natürliches n." Der Beweis besteht aus zwei Teilen:

Basis: A_1 gilt;

Schritt: für jedes natürliches k aus A_k folgt A_{k+1}.

Wenn Sie ein Problem mit Hilfe von der mathematischen Induktion lösen, müssen Sie zuerst festlegen, wie die n-te Aussage Ihrer Reihe lautet.

4. (Turm von Hanoi) Der Turm besteht aus n Kreisscheiben, die ein Loch haben und auf einen Pfosten gesteckt werden. Dabei haben die Scheiben abnehmende Größe,wenn von unten nach oben gesehen. Zum Turm von Hanoi gehören noch zwei freie Pfosten. Die Aufgabe besteht darin, den Turm von einem Pfosten zu einem anderen zu verlegen, und zwar nach folgenden Regeln:

   (a) man darf immer nur eine Scheibe umlegen;

   (b) man darf eine größere nicht auf eine kleinere Scheibe legen.

   (Die Aufgabe wurde von Edouard Lucas erfunden und 1883 als Spielzeug verkauft. Er hat auch die Sage erfunden, dass Hindupriester auf Geheiß ihres Gottes Brahma 64 goldene Scheiben umlegen sollten. Wenn es geschafft ist, kommt der Weltuntergang.)

5. In wieviele Teile teilen die Ebene n Geraden, von der keine 2 parallel sind und keine 3 durch einen Punkt gehen?

6. (a) Berechnen Sie $1 + 2 + \cdots + n$.

   (b) Beweisen Sie, dass $1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

7. Zeigen Sie, dass $2^{3^n} + 1 \,\vdots\, 3^{n+1}$. (Das Zeichen $\vdots$ bedeutet "ist teilbar durch".)

8. Zeigen Sie, dass wenn $x + \frac{1}{x}$ eine ganze Zahl ist, so ist auch $x^n + \frac{1}{x^n}$ ganz.

5 Spiele

1. Das Spielfeld hat die Form eines waagerechten Streifens 21×1. Auf dem linken Feld steht ein Stein. Zwei Spieler machen Züge nacheinander. Mit einem Zug darf man den Stein auf 1, 2, 3 oder 4 Felder nach rechts verschieben. Wer keinen Zug machen kann, verliert. Wer gewinnt — der erste oder der zweite Spieler?

2. Eine Schokoladetafel “Ritter Sport” hat die Größe 4×4. Zwei Spieler brechen nacheinander die Tafel entlang der Rillen. (Man darf jeweils nur ein von zur Zeit vorhandenen Stücken zerbrechen.) Wer keinen Zug machen kann, verliert. Wer wird gewinnen?

3. Zwei Millionäre legen nacheinander auf einen großen runden Tisch 1-Euro Münzen. Wer kein Platz mehr für die nächste Münze findet, verliert. Wer wird gewinnen?

Bei Problemen dieser Art ist die Antwort “gewinnt der, wer besser spielt” unzuläßig. In jedem von obigen Spielen hat einer von zwei Spieler eine **Gewinnstrategie** — eine Handlungsweise, die ihm den Gewinn im Spiel sichert. Genau gesagt, eine Gewinnstrategie für einen Spieler besteht aus klaren Vorschriften, welchen Zug er machen muß in jeder *zulässigen* Situation. Als zulässige beschreiben wir alle Situationen, die unter der Bedingung entstehen können, dass *der Spieler seine Strategie anwendet.* (Denn er nicht verpflichtet ist, aus irgendeiner verdorbenen Lage die Spiel zu retten.) Hingegen, *alle denkbare Züge des Gegners* müssen betrachtet werden. (Die Strategie muß den Gewinn sichern.) Eine “klare Vorschrift” in der Strategie kann auch “Tu was du willst” lauten, wie es im Problem 2. geschieht.

4. Es gibt zwei Häufchen von Steinen, je aus 7 Steinen. Mit einem Zug darf man beliebig viele Steine aus einem von Häufchen nehmen. Wer den letzten Stein nimmt, gewinnt.

5. Auf dem Tafel stehen 10 Ziffern “0” und 10 Ziffern “1”. Mit einem Zug darf man zwei beliebige Ziffern wegwischen und, wenn sie gleich waren, 0 an deren Stelle aufschreiben, wenn verschieden — 1 aufschreiben. Wenn die letzte Ziffer, die auf dem Tafel übrig bleibt, 0 ist, dann gewinnt der erste Spieler, wenn 1 bleibt, dann gewinnt der zweite.

6. (Das Spiel Gomoku oder Fünf in einer Reihe) Auf einem unendlichen karierten Spielfeld stellen zwei Spieler nacheinander Kreuzchen (der erste Spieler) und Nullen (der zweite). Gewinnt der, wer als erste 5 Zeichen in eine Reihe nebeneinander stellt (horizontal, vertikal oder diagonal). Zeigen Sie, dass der zweite Spieler keine Gewinnstrategie hat.

Die letzte Aufgabe hat mit Spielen nichts zu tun.

7. Am Fuß des Olympus liegen 3 Steinehaufen. Sisyphus legt Steine aus einem Haufen nach den anderen um. Wenn Sisyphus einen Stein aus dem Haufen mit a Steine nach dem Haufen mit b Steine umlegt, dann zahlt ihm Zeus $b - a + 1$ Drachmen. (Wenn diese Zahl negativ ist, dann nimmt Zeus $-(b - a + 1)$ Drachmen zurück.) Am Ende der Zeusses Herrschaft ist die Anzahl von Steinen in jedem Haufen dieselbe, wie sie am Anfang war. Wie hoch kann der Gesamtlohn von Sisyphus sein?

1. Ein Turm steht auf dem rechten oberen Feld des Schachbrettes. Mit einem Zug darf man ihn nach unten oder nach links auf beliebig viele Felder schieben. Wer keinen Zug machen kann, verliert. Welcher Spieler gewinnt — der erste oder der zweite?

2. Die Spielregeln sind wie vorher, aber jetzt verliert derjenige, wer den Turm auf das linke untere Feld stellt. Wer gewinnt?

3. In einer Schachtel liegen 300 Streichhölzer. Mit einem Zug darf man nicht mehr als die Hälfte von in der Schachtel liegenden Streichhölzer herausnehmen. Wer keinen Zug machen kann, verliert. Wer gewinnt?

4. Es gibt 2 Häufchen von Steinen: eine mit 20, die andere mit 21 Steinen. Mit einem Zug darf man ein Häufchen wegwerfen und das andere in zwei (nicht unbedingt gleiche) Teile teilen. Wer keinen Zug machen kann, verliert. Wer gewinnt?

Nehmen wir an, ein Spiel besteht aus endlich vielen Positionen, einige davon sind als Mattpositionen bezeichnet. Ferner, jeder Zug is ein Übergang von einer Position zu einer anderen, und um zu gewinnen, muß man mit seinem Zug das Spiel in eine Mattposition bringen. Außerdem, nehmen wir an, dass das Spiel nicht unendlich lange dauern kann (beweisen Sie, dass diese Bedingung zur folgenden äquivalent ist: keine Position kann sich wiederholen). Nennen wir jedes Spiel, dass alle diese Bedingungen erfüllt, ein *normales* Spiel.

Seien jetzt alle Positionen eines normalen Spieles in zwei Klassen geteilt: "Gewinnpositionen" und "Verlustpositionen" (das sind nur noch Namen). Setzen wir das folgende voraus:

1) jede Mattposition ist eine Verlustposition;

2) aus jeder Gewinnposition gibt es einen Zug, der zu einer Verlustposition führt;

3) aus jeder Verlustposition führen alle Züge zu Gewinnpositionen.

Satz 1 *Seien alle Positionen eines normalen Spieles in zwei Klassen wie oben geteilt. Wenn das Spiel in einer Gewinnposition beginnt, dann besitzt der erste Spieler eine Gewinnstrategie; wenn das Spiel in einer Verlustposition beginnt, hat der zweite eine Gewinnstrategie.*

Die Gewinnstrategie lautet in jedem von zwei Fällen wie folgt: "stelle den Gegner in eine Verlustposition". Beweisen Sie, dass sie funktioniert.

Unterteilung von Positionen in gewinnende und verlierende scheint eine komplizierte Aufgabe zu sein. In vielen Fällen hilft aber die Analyse "vom Ende an": Man erklärt alle Positionen, von denen aus es einen Zug in eine Mattposition gibt, für Gewinnpositionen. Dann findet man eine Position, woraus alle Züge in Gewinnpositionen führen, und erklärt sie für eine Verlustposition. Alle Positionen, von denen aus man diese letzte mit einem Zug erreichen kann, werden für Gewinnpositionen erklärt, usw. In obigen Aufgaben 3. und 4. hilft diese Prozedur auf die richtige Idee stoßen.

5. Es gibt 2 Häufchen von Steinen: eine mit 7, die andere mit 5 Steinen. Mit einem Zug darf man entweder aus einem Häufchen beliebig viele, oder aus beiden Häufchen gleich viele Steine nehmen. Wer keinen Zug machen kann, verliert. Wer gewinnt? Können Sie ein allgemeineres Problem, mit m und n Steinen, lösen?

6. Das Spiel beginnt mit dem Zahl 1. Mit einem Zug darf man die Zahl mit einer von Zahlen von 2 bis 9 multiplizieren. Wer mit seinem Zug eine Zahl größer als 1000 bekommt, gewinnt. Wer also?

Bis jetzt in jedem Spiel hatte einer von Spieler eine Gewinnstrategie. Ob es so immer ist? Die Antwort ist: für jedes normalen Spiel — ja.

Satz 2 *Für jedes normalen Spiel gibt es eine Unterteilung allen deren Positionen in Gewinnpositionen und Verlustpositionen mit oben formulierten Eigenschaften* 1), 2) *und* 3). *Somit hat einer von beiden Spieler eine Gewinnstrategie.*

Beweisen Sie den Satz.

Außerdem sieht man sofort, dass diese Unterteilung eindeutig ist. Keine Position kann gleichzeitig eine Gewinnposition und eine Verlustposition sein, sonst hätten beide Spieler Gewinnstrategien ausgehend von dieser Position.

Für Spiele, die auch "unentschieden" beenden können, kann man eine ähnliche Argumentation durchführen. Versuchen Sie es. Fast alle Spiele sind in der Tat endlich (können nicht unendlich lange dauern). Für das Schachspiel wird diese Eigenschaft auf eine künstliche Weise geschafft. Also, einer von Spieler hat auch hier eine Strategie (zum Gewinn oder "unentschieden" führend). Es kann aber sein, dass diese Strategie mit keiner von bisher erfundenen schönen Eröffnungen beginnt...

Die Hausaufgabe:

7. Auf jedem von 3 Zeiger einer Uhr sitzt eine Fliege. Als zwei Zeiger übereinander laufen, tauschen die auf ihnen sitzende Fliegen ihre Plätze. Wieviele Umdrehungen macht innerhalb 24 Stunden die Fliege, die auf dem Sekundenzeiger sitzt?

6 Dreiecksungleichung

1. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Finden Sie den Punkt O, für den die Summe der Streckenlängen $AO + BO + CO + DO$ minimal ist.

2. Zeigen Sie, dass die Summe der Diagonalenlängen eines konvexen Vierecks größer als die Hälfte seines Umfangs, aber kleiner als der Umfang ist.

3. Zeigen Sie, dass die Summe der Diagonalenlängen eines konvexen Fünfecks größer als sein Umfang, aber kleiner als der zweifache Umfang ist.

4. In einiger Entfernung von Ihnen brennt es. In der Nähe fließt ein Fluß, dessen Ufer ganz geradlinig ist. Sie wollen zum Fluß laufen, um Wasser mit einem Eimer zu holen und das Feuer zu löschen. Wie verkürzen Sie Ihren Weg?

5. Ihr Haus steht auf einer Halbinsel, die die Form einer Ecke mit spitzem nach Norden gerichtetem Winkel hat. Sie möchten in einem Tag sowohl den Sonnenaufgang auf der östlichen Küste als auch den Untergang auf der westlichen bewundern. Der Weg scheint aber nicht sehr einfach zu sein, und Sie wollen ihm so kurz wie möglich machen. Wie ersparen Sie sich Kräfte?

7 Dezimales System

1. Eine zweistellige Zahl ist siebenmal größer als die Summe ihrer Ziffern. Welche Zahl kann es sein?

2. (Können Sie noch mit Fingern zählen?) Wenn Sie eine (einstellige) Zahl mit 9 multiplizieren wollen, legen Sie Ihre Hände mit ausgestreckten Fingern auf den Tisch und beugen Sie den Finger auf der Stelle von dieser Zahl. Jetzt nehmen Sie die Anzahl von Fingern links vom gebeugten Finger als die Zehnerziffer, und rechts als die Einerziffer. Richtig? Begründen Sie dieses Verfahren.

3. Formulieren Sie und beweisen die Kriterien für die Teilbarkeit durch 2, 3, 4, 9, 11.

4. Finden Sie ein Kriterium für Teilbarkeit durch 7.

5. Benutzen Sie die Gleichung $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, um Kriterien für Teilbarkeit durch 7 und 13 zu finden.

6. Beweisen Sie, dass es für jede Zahl d eine Quersummeregel für Teilbarkeit durch d gibt, wobei die teilnehmende Faktoren zyklisch wiederholt werden.

7. Finden Sie einen Zusammenhang zwischen den Faktoren in der Quersummeregel für Teilbarkeit durch d und den Ziffern in der Dezimaldarstellung des Bruches $\frac{1}{d}$.

8 Vielfaches Zählen

1. Im einem Land gibt es 20 Städte, je zwei durch eine Fluglinie verbindet. Wieviele Fluglinien sind es insgesamt?

2. Eine Halskette besteht aus einem Faden mit aufgefädelten Perlen. Die Kette kann man im Kreis drehen, aber nicht auf die andere Seite umwenden. Wieviele verschiedene Halsketten kann man aus 7 verschiedenen Perlen zusammenstellen?

3. Nun nehmen wir an, dass die Halskette auch auf die andere Seite umgewendet werden kann. Wieviele verschiedene Halsketten gibt es in diesem Fall?

4. Bei einem Ausverkauf gibt es 33 Schnäppchen je für 1 Euro. Sie brauchen nichts davon, aber die Angebote sind zu günstig und Sie haben 10 Euro extra. Wieviele Möglichkeiten gibt es, 10 Schnäppchen zu wählen?

Die obigen Aufgaben illustrieren die Idee der **vielfachen Zählung,** die wie folgt zusammengefasst werden kann: Nehmen wir an, Sie hätten gerne wissen, wieviele Beete es in Ihrem Gemüsegarten gibt. Dabei fällt es Ihnen aus irgendwelchen Gründen schwer, die Beete direkt aufzuzählen. Sie wissen aber, dass auf jedem Beet n Karotten wachsen, und die Karotten können Sie aufzählen. Dann zählen Sie sie und teilen die Zahl durch n.

5. Ein Parlament besteht aus 30 Abgeordneten. Jeder Abgeordnete ist mit 6 anderen befreundet. Wieviele Ausschüsse kann man unter folgenden Bedingungen zusammenstellen:
   (a) jeder Ausschuss besteht aus 3 Mitglieder;
   (b) unter Mitglieder eines Ausschusses gibt es Freunde;
   (c) nicht alle Mitglieder eines Ausschusses sind untereinander befreundet?

   (Ein Abgeordnete kann in mehreren Ausschüssen arbeiten.)

9 Fibonacci Zahlen

Fibonacci Zahlen sind die Zahlen der Folge $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$, die durch die folgenden zwei Bedingungen definiert ist:

1) $\phi_1 = \phi_2 = 1$;
2) $\phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n$ für alle natürlichen n.

Also, die ersten Fibonacci Zahlen sind

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

1. $\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_n = \phi_{n+2} - 1$
2. $\phi_1 + \phi_3 + \phi_5 + \cdots + \phi_{2n-1} = \phi_{2n}$
3. $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \cdots + \phi_n^2 = \phi_n \phi_{n+1}$
4. $\phi_{2n+1} = \phi_n^2 + \phi_{n+1}^2$
5. $\phi_{n+m} = \phi_{n+1}\phi_m + \phi_n \phi_{m-1}$
6. Zeigen Sie, dass zwei aufeinanderfolgende Fibonacci Zahlen teilerfremd sind.
7. Zeigen Sie, dass ϕ_n genau dann gerade ist, wenn n durch 3 teilbar ist.
8. Zeigen Sie, dass ϕ_n genau dann durch 7 teilbar ist, wenn n durch 8 teilbar ist.
9. Zeigen Sie, dass ϕ_n genau dann durch ϕ_m teilbar ist, wenn n durch m teilbar ist.

10 Rekursive Folgen

Sei $\phi_1, \phi_2, \ldots$ die Folge der Fibonacci Zahlen. Bezeichnen wir $\rho_n = \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n}$.

1. Zeigen Sie, dass die Zahl ρ_{n+1} zwischen den Zahlen ρ_n und ρ_{n-1} liegt.

2. Zeigen Sie, dass die Folge $\{\rho_{2n}\}$ monoton fallend, und die Folge $\{\rho_{2n-1}\}$ monoton steigend ist.

3. Zeigen Sie, dass die Folge $\{\rho_n\}$ konvergiert, und finden Sie ihren Grenzwert.

4. Zeigen Sie, dass die Folge $\{\frac{\phi_n}{\lambda^n}\}$ konvergiert, wobei λ der Grenzwert aus der Aufgabe 3. ist.

Betrachten wir eine allgemeine rekursive Folge der zweiten Ordnung, d. h. eine Folge $x_1, x_2, \ldots$, die die Bedingung

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n \tag{1}$$

für feste a, b mit $b \neq 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Unser Ziel ist es, eine Formel für die Glieder einer solchen Folge zu finden.

Suchen wir unter geometrischen Folgen eine, die (1) erfüllt. Sei nämlich $x_n = \lambda^n$. Dann gilt (1) genau dann, wenn

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0. \tag{2}$$

Diese Gleichung hat entweder 2 oder 1 oder gar keine Wurzeln. Wir betrachten alle diese Möglichkeiten.

Habe (2) zwei Wurzeln, so bezeichnen wir sie mit λ_1 und λ_2. Insbesondere, für die Fibonacci Folge erhalten wir die Gleichung $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ mit Wurzeln $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

5. Zeigen Sie, dass in diesem Fall jede Folge (1) die Form $x_n = k_1\lambda_1^n + k_2\lambda_2^n$ hat. (*Hinweis:* Jede Folge (1) ist durch ihre erste zwei Glieder eindeutig bestimmt.)

6. Finden Sie eine Formel für die n-te Fibonacci Zahl.

7. Zeigen Sie: ϕ_n ist die am nächsten zu $\frac{\lambda^n}{\sqrt{5}}$ liegende ganze Zahl, $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Jetzt habe die Gleichung (2) nur eine (zweifache) Wurzel λ. Somit erfüllt die Folge $x_n = \lambda^n$ die Bedingung (1).

8. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Folge $x_n = n\lambda^n$ ebenfalls die Bedingung (1) erfüllt, und jede Folge, die sie erfüllt, lässt sich als $x_n = k_1\lambda^n + k_2 n\lambda^n$ schreiben.

Nun habe die Gleichung (2) keine Wurzeln. Um ein interessantes Phänomen hier zu beobachten, betrachten wir die Folge mit $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Schreiben Sie einige ersten Glieder dieser Folge auf.

Die beiden komplexen Wurzeln der (2) sind zueinander konjugiert. Bezeichnen wir sie mit λ und $\overline{\lambda}$.

9. Betrachten wir Folgen mit der Eigenschaft (2), deren Glieder komplexe Zahlen sind. Zeigen Sie, dass das Ergebnis der Aufgabe 5. auch hier gilt: jede Folge lässt sich als $x_n = k_1\lambda^n + k_2\overline{\lambda}^n$ mit komplexen k_1 und k_2 schreiben.

10. Sei $\lambda = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Dann hat jede Folge (2) mit reellen Glieder die Form $x_n = \rho^n(u\cos n\theta + v\sin n\theta)$ für geeignete u, v.

11. Sei eine Folge $x_1, x_2, \ldots$ durch $x_1 = 1$, $x_2 = 10$, $x_{n+2} = \frac{8}{5}x_{n+1} - x_n$ gegeben. Zeigen Sie:

    (a) Es gibt eine Zahl C, so dass $x_n < C$ für alle n.

    (b) Die Folge ist nicht periodisch.

12. Aus einem Schachbrett hat man ein Vieleck ausgeschnitten, deren Kanten zwischen Felder des Schachbrettes verlaufen (insbesondere hat jede Kante eine ganzzählige Länge und jede Winkel ist entweder 90° oder 270°). Der Rand dieses Vielecks ist somit in schwarz und weiß gefärbt. Zeigen Sie, dass die Differenz zwischen den Längen des schwarzen und des weißen Randes ein Vielfaches von 4 ist.

11 Newtonsche Binomformel, Pascalsches Dreieck und andere

Unten finden Sie fünf Definitionen. Jede Definition ergibt eine Zahl, die durch zwei im voraus gegebenen Zahlen n und k bestimmt wird. Zeigen Sie: bei festen n und k ergeben alle Definitionen gleiche Zahlen.

Bezeichnen wir die Zahl in der Definition X mit X_n^k, $\mathrm{X} = \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}$.

A: (Kombinationen ohne Wiederholung.) Auf wieviele Weisen kann man aus n Kugeln k auswählen?

B: Die neanderthalische Sprache hat zwei Buchstaben: "a" und "b". Wieviele Wörter der Länge n mit k Buchstaben "b" gibt es?

C: (Binomialkoeffizienten.) Wenn Multiplikationen im Ausdruck $(a+b)^n$ durchgeführt werden, kann das Ergebnis in der Form

$$\mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1}b + \mathrm{C}_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} ab^{n-1} + \mathrm{C}_n^n b^n$$

aufgeschrieben werden. Z. B.: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

D: Sie befinden sich an der Kreuzung vom 0-ten Street und 0-ten Avenue. Wieviele kürzeste Wege zur Kreuzung des k-ten Street und $(n-k)$-ten Avenue gibt es?

E: (Das Pascalsche Dreieck.) Konstruieren wir eine Tabelle nach dem folgenden Verfahren: Schreiben wir zunächst die Zahl “1” auf. Jede nächste Zeile kriegt man aus der vorherigen, indem man unter den Lücken der vorherigen Zeile die Summe von Zahlen links und rechts von der Lücke aufschreibt. Außerdem schreibt man noch die Zahl “1” am Anfang und am Ende dieser Zeile auf (so dass sie um eine Zahl mehr als die vorherige enthält).

1 4 6 4 1

Nummerieren wir die Zeilen mit 0 angefangen, und ebenfalls die Zahlen in jeder Zeile. Dann haben wir in der n-ten Zeile Positionen $0, 1, \ldots, n$. Die k-te Zahl in der n-ten Zeile ist dann E_n^k.

Bemerkung: Es ist immer vorausgesetzt, dass $n \geq k \geq 0$. Manchmal kann es aber nicht offensichtlich sein, was herauskommt, wenn man 0 in eine Definition einsetzt. In der Tat sind die Definitionen auch dann sinnvoll und ergeben diegleiche Zahlen.

Wir schlagen Ihnen vor, die folgenden Gleichungen zu beweisen: $\mathrm{A}_n^k = \mathrm{B}_n^k$, $\mathrm{B}_n^k = \mathrm{C}_n^k$, $\mathrm{B}_n^k = \mathrm{D}_n^k$, $\mathrm{D}_n^k = \mathrm{E}_n^k$. Außerdem wissen Sie schon, dass $\mathrm{A}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Aus der Bezeichnungen X_n^k, die wir ziemlich willkürlich ausgewählt haben, ist C_n^k häufig benutzt. Welche von Definitionen A – E für die Zahl C_n^k dabei benutzt wird, ist eine Geschmackssache. Die andere verbreitete Bezeichnung ist $\binom{n}{k} = \mathrm{C}_n^k$.

In folgenden Aufgaben dürfen Sie, natürlich, beliebige von obengegebenen Definitionen von $\binom{n}{k}$ benutzen.

1. Beweisen Sie die folgenden Gleichungen:

   (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

   (b) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

   (c) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

2. Zeigen Sie: aus n Kugeln kann man genau auf 2^{n-1} Weisen eine gerade Anzahl von Kugeln auswählen.

3. Beweisen Sie die folgenden Gleichungen:

   (a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots = 2^{n-2} + 2^{\frac{n}{2}-1} \cos \frac{\pi n}{4}$

   (b) $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots = \frac{2^n + 2 \cos \frac{\pi n}{3}}{3}$

4. Veranschaulichen Sie auf dem Pascalschen Dreieck und beweisen Sie die folgenden Gleichungen:

   (a) $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$

   (b) $\sum_{k \leq n,\, l \leq m} \binom{k+l}{l} = \binom{n+m+2}{m+1} - 1$

   (c) $\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{[\frac{n+1}{2}]}{\frac{n}{2}} = \varphi_{n+1}$ (die $(n+1)$-te Fibonacci Zahl)

5. Zeigen Sie: Es gibt genau $\binom{n-1}{k-1}$ Weisen, n ununterscheidbare Kugeln in k unterscheidbare Kästen zu verteilen, so dass in jedem Kasten mindestens eine Kugel liegt.

6. Es gibt genau $\binom{n+k-1}{k-1}$ Weisen, dies zu machen, wenn einige Kästen auch leer sein dürfen.

7. (Kombinationen mit Wiederholung.) In einer Urne liegen n nummerierten Kugeln. Man zieht k mal eine Kugel, schreibt ihre Nummer auf und legt sie anschließend wieder zurück. Zeigen Sie: Es sind genau $\binom{n+k-1}{k}$ bis auf die Reihenfolge verschiedene Ergebnisse möglich.

8. Zeigen Sie:

   (a) Die Gleichung $x_1 + \cdots + x_k = n$ hat genau $\binom{n-1}{k-1}$ Lösungen in natürlichen Zahlen.

   (b) In ganzen nichtnegativen Zahlen hat diese Gleichung genau $\binom{n+k-1}{k-1}$ Lösungen.

9. Drei Säufer haben in ihren Gläser 1024 Liter Flüssigkeit zusammen, in jedem Glas eine ganze Anzahl von Litern. Mit einem Zug kann ein Säufer in den Glas von einem anderen so viel Flüssigkeit umgießen, wie der andere zur Zeit hat. Zeigen Sie: drei können es schaffen, dass die ganze Flüssigkeit in einen Glas hingeriet.

12 Graphen

Einen *Graphen* kann man wie folgt veranschaulichen: es besteht aus einer Menge von Punkten (*Knoten* des Graphs), einige Paaren davon durch Linien (*Kanten* des Graphs) verbunden sind. Häufig entsteht ein Graph als eine abstrakte Beschreibung irgendwelches Systems, das aus Objekten (Knoten) und Relationen (Kanten) zwischen diesen Objekten besteht. Einigen Beispielen hierfür haben wir schon begegnet:

- Städte und Fluglinien: zwei Knoten sind durch eine Kante verbunden, wenn es zwischen den entsprechenden Städten eine Fluglinie gibt.

- Menschen und Freundschaft: eine Kante ist dann vorhanden, wenn zwei Menschen befreundet sind.

- Spielpositionen und Züge: die Positionen sind Knoten, und wenn man aus einer Position mit einem Zug in eine andere geraten kann, sind die entsprechende Knoten mit einer Kante verbunden (die Kanten sind deswegen zusätzlich mit einer Richtung versehen).

In den Aufgaben, wo diese Beispiele entstanden sind, haben Graphen eine wichtige, aber eher eine Nebenrolle gespielt. Man kann aber Graphen als selbständige Objekte studieren: hoffend Ergebnisse zu bekommen, die eine Anwendung in anderen Gebieten haben werden, oder einfach deswegen, weil es dabei eine schöne Theorie entsteht.

In der Graphentheorie kann man zwei Aspekte unterscheiden: in einem spielt es keine Rolle, wie (und ob überhaupt) ein Graph auf der Ebene oder im Raum abgebildet wird, ob z. B. seine Kanten sich schneiden. Andererseits kann man Fragen über die Graphen stellen, die deren geometrische Darstellung angehen. In diesem Blatt finden Sie Aufgaben beider Art.

1. Ein Reisende erzählt über seinen Besuch des Kontinents Atlantis. Er sagt, dort gäbe es 7 Staaten, so dass jeder Staat an 3 anderen grenzt. Kann man ihm trauen?

Die Anzahl der Kanten, die von einem Knoten ausgehen, heißt der *Grad* dieses Knotens. Zeigen Sie: in jedem Graphen ist die Anzahl von Knoten des ungeraden Grades gerade.

2. Der Reisende gibt seinen Fehler zu und sagt, in Atlantis gäbe es 6 Staaten, und jeder an 3 anderen grenzte. Während seiner Reise habe er die Grenze zwischen jeden zwei Staaten genau einmal überquert. Trauen Sie ihm jetzt?

3. Im XVIII Jahrhundert gab es in Königsberg 7 Brücken über den Fluß Pregel, wie es unten abgebildet ist. Konnte man damals einen Spaziergang durch die Stadt machen, wobei man jede Brücke genau einmal überquert?

4. Welche von drei Figuren auf dem Bild können Sie zeichnen, ohne den Stift von dem Blatt wegzunehmen und ohne irgendeine Linie zweimal durchzulaufen? Für welche Figuren ist es mit der Zusatzbedingung möglich, in demselben Punkt die Zeichnung zu beenden, wo Sie angefangen haben?

5. Zeigen Sie: Wieviel es auch Staaten in Atlantis gäbe und wie sie aneinander grenzten, kann man auf einer Reise die Grenze zwischen jeden zwei Staaten genau zweimal überqueren.

Die folgende Aufgabenreihe wird dem Beweis des Satzes von Euler gewidmet (Leonhard Euler hat auch die Aufgabe 3. formuliert):

Satz 3 (Euler) *Sei ein zusammenhängender Graph auf der Ebene ohne sich zu schneiden gezeichnet. Dann gilt:*

$$V - E + F = 2,$$

wobei V die Anzahl der Knoten, E die Anzahl der Kanten des Graphs, und F die Anzahl der Stücken (Seiten), in die der Graph die Ebene schneidet, ist.

Prüfen Sie diese Behauptung für einige Beispiele.

Was ein zusammenhängender Graph ist, haben wir noch nicht definiert, und außerdem werden wir noch einige Definitionen brauchen.

Ein *Weg* in einem Graphen ist eine Folge "Knoten, Kante, Knoten,...,Kante, Knoten", wobei jede Kante den vorhergehenden Knoten mit dem nachfolgenden verbindet.

Ein Graph heißt *zusammenhängend*, falls es für jede zwei Knoten A und B ein Weg existiert mit dem Anfangsknoten A und Endknoten B.

Ein *geschlossener Weg* ist eine Folge "Knoten, Kante,...,Knoten, Kante",[2] wobei jede außer der letzten Kante den vorhergehenden Knoten mit dem nachfolgenden verbindet, und die letzte Kante den ihr vorhergehenden Knoten mit dem Anfangsknoten des Wegs verbindet.

Ein *Zyklus* in einem Graphen ist eine Menge von Knoten und Kanten mit der folgenden Eigenschaft: es gibt ein geschlossener Weg, der jede Kante und jeden Knoten des Zyklus genau einmal enthält.

Ein *Baum* ist zusammenhängender Graph ohne Zyklen.

6. Zeigen Sie: Jeder Baum mit $E \geq 1$ hat mindestens einen Knoten der Grad 1.

7. Zeigen Sie: Für jeden Baum gilt $V = E + 1$.

[2] "This is in accordance with the principle that in mathematics a red herring does not have to be either red or a herring", Morris W. Hirsch, Differential Topology

8. Zeigen Sie: Jeder zusammenhängender Graph enthält einen Baum, dem alle Knoten des Graphs gehören. (Dieser heißt ein spannender Baum.)
9. Beweisen Sie den Satz von Euler.
10. Ein (verallgemeinerter) Fußball ist aus Fünfecken und Sechsecken genäht, so dass in jeder Ecke jedes Vielecks kommen genau 3 Vielecke zusammen. Zeigen Sie: man braucht stets 12 Fünfecke.
11. Zeigen Sie: Den Graph mit 5 Knoten, wobei es eine Kante zwischen je zwei Knoten gibt, kann man nicht auf der Ebene ohne Selbstschnitte zeichnen.
12. In einem Dorf stehen 3 Häuser und 3 Brunnen. Kann man von jedem Haus zu jedem Brunnen einen Pfad anlegen, so dass keine zwei Pfaden sich kreuzen?

Lässt sich ein Graph auf der Ebene ohne Selbstschnitte zeichnen, so heißt er *planar*. Bezeichnen wir die Graphen aus den Aufgaben 11. und 12 mit K_5 beziehungsweise $K_{3,3}$. Beide sind nicht planar. Es stellt sich heraus, dass jeder nicht planare Graph ein Teil enthält, das "wie einer von diesen Graphen aussieht". Dieses Kriterium für planare Graphen ist zwar einfach zu formulieren, aber gar nicht einfach zu beweisen:

Satz 4 (Kuratowski) *Ein Graph ist nicht planar genau dann, wenn er ein Teil enthält, das zu einem von Graphen K_5 oder $K_{3,3}$ homöomorph ist. Zwei Graphen heißen homöomorph, falls man einen aus dem anderen durch Unterteilungen von Kanten und inverse Operationen der Entfernung von Knoten der Grad* 2 *erhalten kann.*

13. Sei ein Rechteck in kleineren (nicht unbedingt zueinander gleichen) Rechtecken geschnitten, so dass in jedem von kleinen Rechtecken eine von Seiten eine geradzahlige Länge hat. Zeigen Sie: Im großen Rechteck hat ebenfalls eine von Seiten eine geradzahlige Länge.

13 Würfel aus dem Tetraeder?

Ein Polytop ist ein Körper, deren Rand aus Vielecken (Seiten) besteht. Zwei Polytope heißen zerlegungsgleich, falls sie aus der gleichen Menge von anderen Polytopen geklebt werden können.

Satz 5 (Dehn) *Es gibt Polytope des gleichen Volumens, die nicht zerlegungsgleich sind.*

Beweis Zuerst beschreiben wir die Strategie des Beweises. Es wird eine Invariante bezüglich Zerlegung eingeführt. D. h., es wird jedem Polytop P eine Charakteristik $\mathcal{D}(P)$ zugeordnet, so dass $\mathcal{D}(P) = \mathcal{D}(T_1) + \ldots + \mathcal{D}(T_n)$ immer, wenn das Polytop P in Polytopen $T_1, \ldots, T_n$ zerschnitten werden kann. Daraus folgt, dass zerlegungsgleiche Polytope gleiche Werte der Invariante $\mathcal{D}$ besitzen. Ferner, es wird bewiesen, dass die Invariante $\mathcal{D}$ vom Volumen unabhängig ist. Nämlich, wir werden zwei Polytope P und Q vorlegen, für die $\mathcal{D}(P) \neq \mathcal{D}(Q)$ gilt, obwohl Volumina von P und Q unterschiedlich sind. Damit wird unsere Aufgabe erledigt. Nun stellen wir Ihnen einen Kandidat für die Rolle der Invariante $\mathcal{D}$ vor. Sei

$$\widetilde{\mathcal{D}}(P) = \sum_{K_i \text{ Kante von } P} l_i \alpha_i, \tag{3}$$

wobei die Summe über alle Kanten des Polytops P läuft, l_i die Länge der i-ten Kante, und α_i die Größe des Flächenwinkels bei dieser Kante ist. Auf den ersten Blick ist mit der Zerlegungsinvarianz von $\widetilde{\mathcal{D}}$ alles in Ordnung: werden zwei Flächenwinkel entlang einer Seite zusammengeklebt, so addieren sich dessen Größen und addieren sich damit die Werte von $\widetilde{\mathcal{D}}$. Es kann aber etwas schlimmes passieren. Nämlich, eine Kante eines Polytops kann beim Kleben auf eine Seite von einem anderen Polytop geraten. Geschweige denn, eine Kante kann ganz mit den verklebten Polytopen umrandet werden. Um das zu bewältigen, werden wir den Ausdruck (3) später korrigieren.

Als nächstes möchten wir das Aussehen vom Kleben vereinfachen, um nachfolgende Betrachtungen zu erleichtern. Statt dem Kleben kann man über das Schneiden reden. Ein *einfaches Schneiden* ist ein Schneiden entlang einer Ebene. Es ist klar, dass nicht alle Zerlegungen von Polytopen mit Hilfe der einfachen Schneiden realisiert werden können (geben Sie ein Beispiel hierfür). Aber, wenn man nur einfache Schneiden zulässt, ändert sich der Begriff von der Zerlegungsgleichheit nicht.

Behauptung 1 *Sind Polytope P und Q zerlegungsgleich, so kann man beide in die gleiche Menge von Teilen mit Hilfe der einfachen Schneiden verwandeln. (Jedes einfaches Schneiden darf man zu einem von bisher entstandenen Stücken gesondert anwenden.)*

Beweis Sei $T_1, \ldots, T_n$ die Menge der Teilen, aus welcher man sowohl das Polytop P als auch das Polytop Q zusammensetzen kann. Führe die einfachen Schneiden vom Polytop P entlang gesamten Seiten von Polytopen $T_1, \ldots, T_n$ durch (verschiebe nicht die Stücke nach jedem Schneiden). Dann zerfällt jeder Teil in Unterteile, die wir P-Unterteile nennen werden. Bilde analog auch die Q-Unterteile. Sei nun T ein von ursprünglichen Teilen, und seien $T = U_1 \cup \ldots U_k$, $T = V_1 \cup \ldots V_l$ ihre P- bzw. Q-Unterteilungen. Beachte, dass beide diese Unterteilungen durch Folgen von einfachen Schneiden entstehen, und zwar von denen, die wir mit P bzw. Q durchgeführt haben. Wenn wir nun beide Folgen von einfachen Schneiden auf T ausüben, erhalten wir eine "Unterunterteilung" von T in Teile $U_i \cap V_j$. Jetzt sieht man einfach, dass diese "Unterunterteilung" sowohl aus P als auch aus Q durch einfache Schneiden erhalten werden kann.

Die Behauptung 1 bewiesen.

Betrachten wir den Ausdruck

$$\mathcal{D}(P) = \sum_{K_i \text{ Kante von } P} l_i * \alpha_i \tag{4}$$

und schauen, was mit ihm passiert, wenn das Polytop P entlang der Ebene E geschnitten wird. Seien $P_1, \ldots, P_n$ die Polytope, in die P nach diesem Schneiden zerfällt. Woraus kommen die Kanten von P_i, $i = 1, \ldots, n$? Vor allem kann es passieren, dass eine Kante K von P_i gleichzeitig eine Kante von P ist, und zwar wenn $K \cap E$ gilt. Dann wird derselbe Summand $l * \alpha$ sowohl in (4) als auch in die Summe $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}(P_i)$ aufgenommen. Außerdem gibt es folgende Möglichkeiten.

- Eine Kante K von P wird von der Ebene E geschnitten. Dann werden zwei entstehende Stücke zu zwei Kanten in verschiedenen Polytopen und bewahren den Flaechenwinkel bei der Kante K. Der Summand $l * \alpha$ wird also durch $l_1 * \alpha + l_2 * \alpha$ ersetzt, wobei $l = l_1 + l_2$ ist.

- Eine Kante K von P liegt in der Ebene E. Es entstehen zwei Kanten von derselben Länge wie K und mit Flächenwinkeln der Größen α_1 und α_2, so dass $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ ist. Der Summand $l * \alpha$ wird durch $l * \alpha_1 + l * \alpha_2$ ersetzt.

- Endlich, neue Kanten entstehen, wenn die Ebene E eine Seite des Polytops P schneidet. Sie entstehen in Paaren. Die Kanten in einem Paar haben die gleiche Länge l und die Flächenwinkelgrößen α und $\pi - \alpha$. So entsteht aus nichts die Summe $l * \alpha + l * (\pi - \alpha)$.

Wir interpretieren die oben aufgelistete Ereignisse als algebraische Regel, wonach man den Ausdruck (4) transformieren kann. Das dritte Ereignis kann man äquivalent als Entstehung von $l * \pi$ betrachten, wie uns die zweite Regel garantiert. Jetzt können wir die Dehn-Invariante $\mathcal{D}$ genau definieren.

Definition 1 *Betrachten wir die Menge $\mathcal{S}$ der Summen $\sum_i l_i * \alpha_i$, wobei l_i und α_i reelle Zahlen sind. Die Summanden in einem Element aus $\mathcal{S}$ kann man beliebig vertauschen. In $\mathcal{S}$ gibt es auch die "leere Summe", die wir mit 0 bezeichnen. Es gilt $0 + \sum_i l_i * \alpha_i = \sum_i l_i * \alpha_i$. Außerdem gelten die folgende Gleichungen:*

$$\begin{aligned} (l_1 + l_2) * \alpha &= l_1 * \alpha + l_2 * \alpha \\ l * (\alpha_1 + \alpha_2) &= l * \alpha_1 + l * \alpha_2 \\ l * \pi &= 0. \end{aligned}$$

Jede Identität in $\mathcal{S}$ muß aus den aufgelisteten Gleichungen folgen. Die Dehn-Invariante vom Polytop P ist das Element (4) aus $\mathcal{S}$.

Es folgt direkt aus der Definition, dass $\mathcal{D}(P)$ eine Invariante bezüglich Zerlegung ist.

1. Zeigen Sie, dass $l * \pi q = 0$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ ist.

Es bleibt zwei Polytope mit dem gleichen Volumen aber verschiedenen Werten der Dehn-Invariante zu finden. Wir behaupten, dass der Würfel und der Tetraeder für diese Rollen passen. Falls W der Würfel mit der Kantenlänge 1 ist, gilt $\mathcal{D}(W) = 1*\frac{\pi}{2}+\cdots+1*\frac{\pi}{2}$ (12 mal). Also, $\mathcal{D}(W) = 0$. Sei T der Tetraeder des Volumens 1, und sei l die Länge seiner Kante. Dann $\mathcal{D}(T) = l*\alpha+\cdots+l*\alpha$ (6 mal), wobei $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ (zeigen Sie es). Also, $\mathcal{D}(T) = 6l*\alpha$. Es kann bewiesen werden, wie wir es schon für die Aufgabe 11b) über rekursive Folgen gemacht haben, dass $\frac{\alpha}{\pi}$ eine irrationale Zahl ist. Um zu zeigen, dass $\mathcal{D}(W) \neq \mathcal{D}(T)$ ist, reicht es die folgende allgemeinere Behauptung zu beweisen.

Behauptung 2 *Für beliebige $l \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ ist $l*\alpha \neq 0$. Mit anderen Wörtern, man kann nicht $l*\alpha$ mit Hilfe der Gleichungen (1) in 0 verwandeln.*

Beweis Nehmen wir an, wir haben es geschafft, eine Reihe von Transformationen gemäß den Regeln (1) durchzuführen, die 0 aus $l*\alpha$ macht. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ alle Zahlen, die in entstehenden Ausdrücken nach Sternen * stehen. Sei

$$\langle\alpha, \pi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle = \{k\alpha + l\pi + m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n \,|\, k, l, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}\}.$$

Eine Funktion $f : \langle\alpha, \pi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle \to \mathbb{R}$ heißt additiv, falls $f(a+b) = f(a) + f(b)$ für alle $a, b \in \langle\alpha, \pi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle$ gilt.

2. Es gibt eine additive Funktion f mit $f(\pi) = 0$ und $f(\alpha) \neq 0$.

3. In einer Reihe von Transformationen von Ausdrücken aus $\mathcal{S}$ gemäß den Regeln (1) ersetzt man überall α_i durch $f(\alpha_i)$ (bzw. α durch $f(\alpha)$ und π durch $f(\pi)$) und den Stern durch die übliche Multiplikation. Zeigen Sie: man bekommt eine korrekte Reihe von Gleichungen.

Aber am Anfang und am Ende der Reihe von Gleichungen, die wir in der letzten Aufgabe gekriegt haben, stehen die Zahlen $lf(\alpha) \neq 0$ und 0. Mit diesem Widerspruch ist die Behauptung 2 bewiesen und somit auch der Satz von Dehn. $\square$

4. Es sei ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 gegeben. Zeigen Sie: Es ist unmöglich, es in Rechtecken zu schneiden, aus denen man den Rechteck $\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ zusammenstellen kann, falls es verboten ist, die Rechtecke zu drehen.

14 Quasiperiodische Muster und Tsyan-schidzi

Tsyan-shidzi...

Das Spiel Tsyan-shidzi, oder Wythoff's Nim, hat die folgenden Regel.

Es gibt zwei Häufchen von Steinen. Zwei Spieler machen Züge nacheinander. Mit einem Zug kann man eine beliebige Anzahl von Steinen aus einem Haufen *oder gleich viele Steine aus beiden Haufen nehmen. Wer keinen Zug machen kann, verliert. Bei welchen Anfangsbedingungen gewinnt der erste, und bei welchen der zweite Spieler?*

Wir haben dieses Spiel früher mit einer Dame auf das Schachbrett formuliert[3] und die Felder bestimmt, die als Anfangspositionen den ersten Spieler zum Verlust führen. Wie diese Felder auf dem nach rechts und nach oben unendlichen Schachbrett weiter verteilt sind, ist unklar geblieben. Unser Ziel ist es jetzt, dies zu klären.

Die Verlustpositionen ordnen sich in eine Folge von Paaren, so dass die Felder in einem Paar symmetrisch bezüglich der Hauptdiagonale liegen. Nur die erste Verlustposition ist ohne Paar; das ist das linke untere Feld. Geben wir ihm die Koordinaten $(0, 0)$. Seien (a_n, b_n) die Koordinaten der n-ten Verlustposition oberhalb der Hauptdiagonale.

1. Zeigen Sie:
   (a) $b_n = a_n + n$;
   (b) a_{n+1} ist die kleinste natürliche Zahl, die unter den Zahlen $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ nicht vorkommt.

Man sieht sofort, dass diese zwei Bedingungen eine Zerlegung von der Menge der natürlichen Zahlen in zwei Mengen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ eindeutig definieren.

[3]Genauso hat es auch Rufus P. Isaacs im 1960 formuliert, der nicht wusste, dass im 1907 W. A. Wythoff das Spiel mit Steinen analysiert hat. Und Wythoff wusste nicht, dass das Spiel bereits im alten China gespielt wurde.

2. Zeigen Sie:

   (a) $a_{a_n} = b_n - 1$, $a_{a_n+1} = b_n + 1$.
   Hinweis: Wieviele Zahlen aus der Folge $\{a_k\}$ sind kleiner als b_n?

   (b) $a_{b_n} = b_{a_n} + 1$.

3. Können Sie vom letzten Ergebnis ableiten, dass $a_n = [\lambda n]$ ist? (Hier ist $\lambda = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.)

...und quasiperiodische Muster

Wir werden Folgen aus 0 und 1 betrachten. Eine Folge $\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2 \ldots$, die nach links und nach rechts unendlich weit geht, nennen wir *zweiseitige Folge.* Eine Folge $x_1, x_2, \ldots$ wird als *einseitige Folge* bezeichnet.

Führen wir eine Transformation der Folgen ein, die *Kodierung* heißt. Bei der Kodierung wird jede 0 durch 1 ersetzt, und jede 1 durch zwei nacheinanderfolgende Ziffer 1 und 0. Das Ergebnis der Kodierung der Folge $\{x_n\}$ wird mit $K(\{x_n\})$ bezeichnet.[4]

4. Es existiert eine einseitige Folge $\{x_n\}$, die sich selbst kodiert, d.h. $K(\{x_n\} = \{x_n\}$. Außerdem ist sie einzig.

Eine Folge $\{x_n\}$ heißt *dekodierbar*, falls sie durch Kodierung einer anderen entsteht, d. h. es gibt $\{y_n\}$ mit $\{x_n\} = K(\{y_n\})$. Die Folge $\{y_n\}$ heißt dann die Dekodierung von $\{x_n\}$. Es ist leicht zu sehen, dass die Dekodierung, falls existiert, eindeutig bestimmt ist. Eine unendlich oft dekodierbare Folge ist eine, deren Dekodierung dekodierbar ist, auch die Dekodierung dieser Dekodierung, usw.

5. Die einzige unendlich oft dekodierbare einseitige Folge ist die in der Aufgabe 4. konstruierte "selbstkodierende" Folge.

6. Die Folge aus 4. ist nicht periodisch.

7. Es existiert eine unendlich oft dekodierbare zweiseitige Folge.

8. Im Gegensatz zu 5. gibt es unendlich viele (sogar überabzählbar viele) unendlich oft dekodierbaren zweiseitigen Folgen.

9. Aber sie alle sind lokal isomorph. D. h., jedes endliche Fragment einer solchen Folge taucht in jeder anderen solchen Folge auf, und außerdem unendlich oft.

[4] Für zweiseitigen Folgen entsteht die Frage, wie die Ziffern nach der Kodierung wieder nummeriert werden. Wir lösen dieses Problem dadurch, dass zweiseitige Folgen nur bis auf Verschiebung betrachtet werden. D. h., wenn $x_n = y_{n+s}$ für alle n und festes s, sind die Folgen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ "gleich".

10. Bei Kodierung einer einseitigen Folge produziert ihr n-tes Glied eine Ziffer 1 (und eventuell noch 0). An welcher Stelle wird diese 1 stehen?

11. Sei $x_n = [\frac{n+1}{\lambda}] - [\frac{n}{\lambda}]$ eine einseitige Folge. Zeigen Sie: $\{x_n\}$ ist die selbstkodierende Folge.

12. Konstuiere eine einseitige Folge nach dem Regel: falls $n = a_k$ für ein k ist, setze $x_n = 1$; falls $n = b_k$ für ein k ist, setze $x_n = 0$. Zeigen Sie: diese $\{x_n\}$ ist die selbstkodierende Folge. Leiten Sie davon ab: $a_n = [\lambda n]$.

- Mehr Aufgabenreihen auf der Web-Seite des "Turniers der Städte" www.turgor.ru, woraus diese letzte teilweise entsteht (hoffentlich, wird bald dort eine englische Version erscheinen).
- Ich empfehle sehr das Buch "Mathematical Circles" von Dmitri Fomin, Sergey Genkin, and Ilia Itenberg, AMS, 2002. Viele Aufgaben habe ich daraus genommen. Im Durchschnitt ist dieses Buch einfacher, als meine Vorlesungen waren.
- Auf der Seite http://www.iu-bremen.de/ses/math/29970/index.shtml finden Sie Informationen über eine Art Team-Wettbewerb, bei dem zwei Mannschaften im Lösen und Erklären der Lösungen konkurrieren. Auch eine starke Empfehlung.

Viel Spaß und Erfolg!