Mathematik I für Bauwesen

Vorlesung 2

Dozent: Ivan Izmestiev

19. Oktober 2011

Mathematische Argumentation

- Aufbau einer Theorie
- Beweisen und Widerlegen
- Direkter Beweis
- Widerspruchsbeweis
- Vollständige Induktion

Axiomatische Methode

Axiom ist ein Ausgangssatz, eine Aussage, die keines Beweises bedarf.

Euklid baute Geometrie auf einer axiomatischen Basis auf ("Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade" usw).

Reelle Zahlen können auch axiomatisch eingeführt werden (9 Körperaxiome, 4 Anordnungsaxiome, Archimedisches Axiom und Vollständigkeitsaxiom).

Aus Axiomen kann man Sätze herleiten.

Vorteile	Klare Strukturierung, Zusammenhang zu anderen Gebieten (Theorie der Körper, geordnete Mengen).
Nachteile	Sehr abstrakt.

Deskriptiv vs konstruktiv

Axiomatische Methode ist “deskriptiv”, sie beschreibt ein Objekt (Menge der reellen Zahlen) durch seine Eigenschaften (Axiome). Auch ohne eine Vorstellung von Zahlen zu haben, kann man Sätze über sie beweisen.

Die Definition reeller Zahlen als unendliche Dezimalbrüche ist ein konstruktiver Ansatz. Hier wird ein neues Objekt aus den bereits vorhandenen (natürliche Zahlen und arithmetische Operationen) konstruiert.

Vorteile Praxisnah, intuitiv.

Nachteile Was bei der axiomatischen Methode ein Axiom war, wird jetzt zu einem Satz. Und ein Satz soll bewiesen werden. So Vollständigkeitsaxiom. Sogar das Distributivgesetz $a(b+c)=ab+ac$ ist nicht offensichtlich (wie multipliziert man überhaupt unendliche Dezimalbrüche?)

Für die reellen Zahlen gibt es andere konstruktive Definitionen (Dedekindische Schnitte, Cauchy-Folgen).Auch das Vollständigkeitsaxiom kann unterschiedlich formuliert werden.

Deskriptive und konstruktive Ansätze ergänzen einander.

Wenn reelle Zahlen aus natürlichen konstruiert werden, woraus konstruiert man die natürlichen?In der Basis liegen jedenfalls Axiome.Fünf Peano-Axiome für $\mathbb{N}$.

Auch die Euklidische Geometrie kann auf der Basis von $\mathbb{R}$ (und damit auf der Basis von $\mathbb{N}$) konstruiert werden.“Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.” (Leopold Kronecker)

In diesem Kurs wird keine strenge Theorie der reellen Zahlen aufgebaut, wir stützen uns auf intuitive Vorstellungen (z. B. die Zahlengerade) und weniger offensichtliche Tatsachen (wie Vollständigkeitsaxiom).

Quantoren

Viele Aussagen haben die Form “für alle x gilt...” oder “es gibt ein x, sodass...” Zur Abkürzung benutzt man die Quantoren $\forall$ (“für alle”) und $\exists$ (“es existiert”).

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ gilt } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ gilt } a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$s \geq x \, \forall x \in M \Leftrightarrow s \text{ ist eine obere Schranke von } M$$

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$

Beachte: $\exists$ bedeutet Existenz von mindestens einem Element mit der entsprechenden Eigenschaft.So, im letzten Beispiel gibt es zwei reelle Zahlen, die beim Quadrieren 2 ergeben: $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$.

Wenn man Existenz eines einzigen Elements behaupten möchte, darf man das Symbol $\exists!$ benutzen:

$$\exists! x \in (0, +\infty) : x^2 = 2$$

$\forall$-Aussagen

Angenommen, wir wollen eine Behauptung der Form

$$\forall x \text{ gilt } E \tag{1}$$

(für alle x gilt die Eingeschaft E) auf Richtigkeit prüfen.

Um Behauptung (1) zu beweisen, kann man jedes x einzeln auf die Eigenschaft E prüfen. Das ist eine legitime Beweismethode, Exhaustionsmethode oder Brute-Force-Methode genannt.

Das funktioniert aber nicht, wenn unendlich viele x in Betracht kommen. Dann braucht man ein Argument, das alle Fälle auf einmal einschließt.

Hingegen, um Behauptung (1) zu widerlegen, reicht es ein x zu finden, das die Eigenschaft E nicht besitzt. So ein x heißt Gegenbeispiel.

Beispiele

- $\forall x \geq 1$ gilt $x^2 \geq x$ Richtig, $x \cdot x \geq x \cdot 1 = x$
- $\forall x \geq 0$ gilt $x^2 \geq x$
  Falsch, Gegenbeispiel: $0,1^2 = 0,01 < 0,1$
- "jede nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Maximum"
  Falsch, Gegenbeispiel: $[0,1)$.
- "jede nach oben beschränkte (und nichtleere) Menge besitzt ein Supremum"
  Richtig. Entweder ein Axiom oder ein Satz.
- "alle Studenten haben schon ein TU-ID"
  Leider falsch, es gibt Gegenbeispiele.
  Wenn diese Behauptung wahr wäre, könnte man es mit der Brute-Force-Methode feststellen.

$\exists$-Aussagen

Bei einer Behauptung der Form

$$\exists x : x \text{ hat Eigenschaft } F \tag{2}$$

tritt die umgekehrte Situation auf:

- Um (2) zu beweisen, reicht es, ein Beispiel zu finden.
- Um (2) zu widerlegen, muss man zeigen, dass kein x die Eigenschaft E besitzt (wieder Brute-Force oder ein allgemeines Argument).

Zusammenfassung:

- "$\forall x$ gilt E" widerlegt man mit einem Gegenbeispiel;
- "$\exists x : x$ hat Eigenschaft F" beweist man mit einem Beispiel.

Negation

Der Grund dieser Symmetrie ist, dass die Negation einer $\forall$-Aussage eine $\exists$-Aussage ist (und umgekehrt):

$$\forall x \text{ gilt } E \left\{ \begin{array}{ccc} \text{wahr} & \Leftrightarrow & \text{falsch} \\ \text{falsch} & \Leftrightarrow & \text{wahr} \end{array} \right\} \exists x: \ \text{für } x \text{ gilt } E \text{ nicht}$$

$$\exists x: \ \text{für } x \text{ gilt } F \left\{ \begin{array}{ccc} \text{wahr} & \Leftrightarrow & \text{falsch} \\ \text{falsch} & \Leftrightarrow & \text{wahr} \end{array} \right\} \forall x \text{ gilt das Gegenteil von } F$$

Definition

Negation einer Behauptung B wird mit $\overline{B}$ bezeichnet.

Man kann die folgenden allgemeinen Regel formulieren:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \overline{\forall x \text{ gilt } E} & \Leftrightarrow & \exists x : \overline{E} \\ \overline{\exists x : F} & \Leftrightarrow & \forall x \text{ gilt } \overline{F} \end{array}}$$

Beispiele

- Die Negation von "$\forall x \geq 0$ gilt $x^2 \geq x$" ist "$\exists x \geq 0 : x^2 < x$".
- "jede nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Maximum"
  Negation: "es gibt nach oben beschränkte Mengen ohne Maximum"
- $$\begin{aligned} &\overline{\forall \epsilon > 0 \, \exists n \in \mathbb{N} : 1/n < \epsilon} \\ &\Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 : \overline{\exists n \in \mathbb{N} : 1/n < \epsilon} \\ &\Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt } 1/n \geq \epsilon \end{aligned}$$

Direkter Beweis

Es gilt, eine Behauptung B zu beweisen.

$$A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_n \Rightarrow B$$

A_1 soll ein Axiom oder eine bereits bewiesene Behauptung sein. Alle weiteren Behauptungen $A_2, A_3, \ldots$ sind dann Lemmas (Hilfssätze) oder Sätze.

Es können auch weitere Axiome oder früher bewiesene Behauptungen herangezogen werden (Beispiel).

Satz

Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist die n-te Quadratzahl.

$\{\text{positive ungerade Zahlen}\} = \{2k+1 \mid k = 0, 1, 2, \ldots\} = \{2k-1 \mid k = 1, 2, \ldots\}$ Es ist also zu zeigen:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

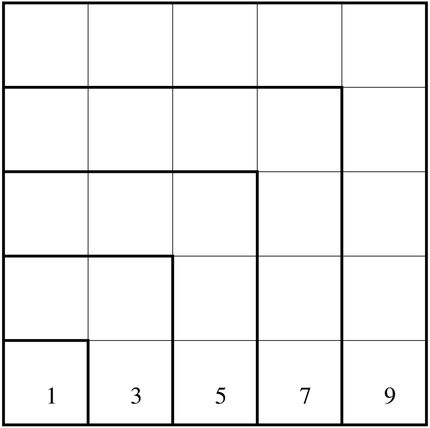
Erster Beweis.

$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) =: x$, dann gilt

$$\begin{aligned} 2x = 1 \quad &+ 3 \quad + \cdots + (2n-1) + \\ +(2n-1) &+ (2n-3) + \cdots + 1 \quad = \\ = 2n \quad &+ 2n \quad + \cdots + 2n \quad = 2n^2 \end{aligned}$$

Folglich gilt $x = n^2$. $\square$

Zweiter Beweis.



$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

$\square$

Satz

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{für } q \neq 1 \\ n+1 & \text{für } q = 1 \end{cases}$$

Beweis.

Setze $1 + q + q^2 + \cdots + q^n =: x$. Dann gilt

$$q \cdot x = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1} = x - 1 + q^{n+1}$$

Auflösen nach x ergibt

$$1 - q^{n+1} = x(1-q) \Rightarrow x = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Dies allerdings nur bei $q \neq 1$. Bei $q = 1$ gilt $q^k = 1$ für alle k, also die Summe ist gleich $n + 1$. $\square$

Widerspruchsbeweis

Es gilt, Behauptung B zu beweisen. Man nimmt an, dass das logische Gegenteil von B wahr ist, und leitet daraus einen Widerspruch her:

$$\overline{B} \Rightarrow B_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B_n \Rightarrow \overline{A}, \tag{3}$$

wobei A ein Axiom oder eine früher bewiesene (also wahre) Aussage oder eine Voraussetzung innerhalb von B ist.
Diese Beweismethode basiert auf dem folgenden Gesetz der Logik:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$$

(der "Kaiser von China"-Prinzip).
Man kann also die Kette (3) in einen direkten Beweis umwandeln:

$$A \Rightarrow \overline{B_n} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \overline{B_1} \Rightarrow B$$

Irrationalität von $\sqrt{2}$

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.

Lemma

Wenn n^2 eine gerade Zahl ist, dann ist auch n gerade.

Beweis.

Widerspruchsbeweis. Angenommen, n ist ungerade. Dann gilt $n = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Folglich

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1,$$

also n^2 ungerade, was der Annahme des Lemmas widerspricht. $\square$

Beweis des Satzes.

Widerspruchsbeweis. Sei $\sqrt{2}$ rational, also

$$\exists m, n \in \mathbb{Z} : \frac{m}{n} = \sqrt{2} \tag{4}$$

Wir dürfen annehmen, dass m und n teilerfremd sind (durch Kürzen erreichbar). Aus (4) folgt

$$m^2 = 2n^2, \tag{5}$$

also ist m^2 eine gerade Zahl. Nach dem Lemma ist auch m gerade: $\exists k \in \mathbb{Z} : m = 2k$. Dann haben wir $m^2 = 4k^2$. Durch Einsetzen in (5) erhalten wir

$$2k^2 = n^2$$

Analog zum Obigen, ist n eine gerade Zahl.

Wir haben nun bewiesen, dass m und n einen gemeinsamen Teiler 2 haben, was der Annahme über ihre Teilerfremdheit widerspricht. $\square$

Induktion

Es gilt, eine Behauptung zu beweisen, die eine natürliche Variable n enthält (also Behauptung der Form "$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt E")
Manchmal kann man einen Beweis führen, der für alle Werte von n funktioniert.

- $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$
- $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt (n^2 gerade $\Rightarrow$ n gerade)

Man kann die allgemeine Behauptung "$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt E" auch als eine unendliche Folge der Spezialfälle darstellen

$$B_1 = \text{"die Zahl 1 hat Eigenschaft } E\text{"}$$
$$B_2 = \text{"die Zahl 2 hat Eigenschaft } E\text{"}$$
$$\ldots$$

Wenn man individuell feststellt, dass B_1 wahr ist, B_2 wahr, B_3 wahr,...
... dann glaubt man nach einer Weile, dass B_n für alle n gilt.
Dies ist unvollständige Induktion.

Vollständige Induktion

Um die Wahrheit von B_n für alle n zu beweisen, genügt es die folgenden zwei Aussagen zu beweisen:

Induktionsanfang B_1 ist wahr

Induktionsschritt aus der Annahme von B_n (Induktionsannahme) folgt B_{n+1}

Man beachte, dass der Induktionsschritt auch eine allgemeine Aussage ist ("für alle n aus B_n folgt B_{n+1}"). Der Trick ist, dass es einfacher zu beweisen sein kann als "für alle n gilt B_n".
"Domino-Prinzip"
Übrigens, die gültigkeit des Induktionsprinzips ist das fünfte Peano-Axiom in der Axiomatik der natürlichen Zahlen.

Satz

Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist die n-te Quadratzahl.

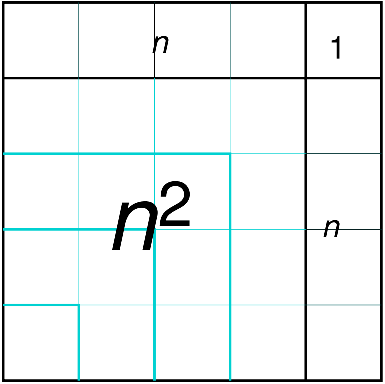
Dritter Beweis.

Induktionsbeweis. Zu zeigen ist: $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.
Induktionsanfang: Bei $n = 1$ steht hier $1 = 1$, was wahr ist.
Induktionsschritt: Angenommen $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ (Induktionsannahme), wollen wir $1 + 3 + \cdots + (2n + 1) = (n + 1)^2$ beweisen.

$$1 + 3 + \cdots + (2n + 1) = (1 + 3 + \cdots + (2n - 1)) + 2n + 1 = \Big(\text{nach Induktionsannahme}\Big) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

$\square$

In Wirklichkeit ist der dritte Beweis eine Formalisierung des zweiten:



$n^2 + n + n + 1 = (n+1)^2$ ist der Induktionsschritt

Satz

Sei $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ durch

$$a_1 = 1$$
$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \text{ für alle } n \geq 1$$

definiert. Dann ist die Menge A nach oben beschränkt.

Die Folge $a_1, a_2, \ldots$ ist rekursiv definiert. In einer solchen Situation eignet sich ein Induktionsargument hervorragend.

Beweis.

Wir behaupten, dass 2 eine obere Schranke der Menge A ist, d. h. $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq 2$. Induktionsbeweis:

Induktionsanfang: $a_1 = 1 < 2$

Induktionsschritt: Unter Annahme $a_n \leq 2$ gilt

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \leq \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3} < 2$$

□