ÜBER DIE BASISWECHSEL

IVAN IZMESTIEV

Es war einmal ein Vektorraum V. Seine Elemente, Vektoren, hatten kurze Namen, so wie v oder w. Man konnte die Vektoren addieren und mit Skalaren multiplizieren, so dass man ganz genau wusste, welcher Vektor $\lambda v + \mu w$ ist. Auch kompliziertere Linearkombinationen konnte man bilden.

Manchmal sammelten sich Vektoren in Gruppen, und es stellte sich heraus, dass jedesmal, wenn es mehr als n Vektoren trafen, waren sie linear abhängig.[1] Es gab aber auch Gruppen aus n linear unabhängigen Vektoren. Und so haben die Vektoren erkannt, dass die Dimension ihres Vektorraumes gleich n ist.

Dann kam ein Mensch und hat eine Gruppe aus n linear unabhängigen Vektoren zu Basis gewählt. Die Basisvektoren hatten die Namen

$$e_1, e_2, \ldots, e_n.$$

Jeder andere Vektor v konnte jetzt auf eine einzige Weise als Linearkombination von Basisvektoren geschrieben werden:

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n. \tag{1}$$

So hat jetzt jeder Vektor v einen langen Namen $(x_1, \ldots, x_n)$ erhalten. Die Basisvektoren hatten natürlich auch ihre langen Namen, so hießen sie:

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, \ldots, 0, 1).$$

(Denn es galt zum Beispiel $e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \cdots + 0 \cdot e_n$.) Und so wurde der Raum V auf den Raum $\mathbb{R}^n$ isomorph abgebildet, wobei e_i in den i-ten Standartbasisvektor überging.

Dann kam ein anderer Mensch und hat eine andere linear unabhängige Gruppe aus n Vektoren

$$e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$$

als Basis gewählt. Die Vektoren waren ganz verwirrt, denn jetzt hatte jeder Vektor v zwei lange Namen:

$$\begin{array}{ll} (x_1, \ldots, x_n) & \text{in der alten Basis} \\ \text{und} & \\ (x'_1, \ldots, x'_n) & \text{in der neuen Basis} \end{array}$$

Es war notwendig, eine Regel zu finden, wie man die alten Namen in die neuen transformieren kann.

Diese Regel lautet:

[1] Man konnte aus ihnen durch geschickte Linearkombination den Nullvektor bilden.

- Man schreibe die alten Namen der neuen Basisvektoren als Spalten:[2]

$$e'_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}, \dots, e'_n = \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix}$$

- Man bilde daraus eine Matrix

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

und berechne ihre inverse C^{-1}.

- Nun berechnet man die neuen Koordinaten aus den alten durch

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

Die Erklärung:

Außer (1) gilt auch

$$v = x'_1 e'_1 + \cdots + x'_n e'_n.$$

Auf der Sprache der Matrizenmultiplikation können wir das wie folgt aufschreiben:

$$v = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Und die Matrix C wurde so definiert, dass gilt:

$$\begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} C$$

Folglich, gilt:

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

[2] Der alte Name von e'_j besteht aus seinen Koordinaten in der Basis $e_1, \dots, e_n$. Das ist ein ganz natürlicher Schritt, denn der zweite Mensch hat wahrscheinlich gesagt: “Du, $(c_{11}, c_{21}, \dots, c_{n1})$, wirst jetzt der erste Basisvektor,...”. Also, die alten Namen der neuen Basisvektoren sollen uns bekannt sein.

und daraus folgt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

was die Regel (2) impliziert.

Das war aber nicht das Ende der Geschichte. Denn ein Vektor v hat gefragt:

"Durch die Wahl der Basis $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ sind wir wieder zum $\mathbb{R}^n$ geworden, und $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ soll jetzt die Standardbasis sein anstatt $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Ich möchte jetzt gerne wissen, welche ist die Standardbasis, und was ist mein wirklicher Name?"

Darauf hat ihm w geantwortet:

"Es gibt keine Standardbasis, denn es kommt ein dritter Mensch und erklärt $e''_1, e''_2, \ldots, e''_n$ zu seiner bevorzugten Basis. Wir sind nicht $\mathbb{R}^n$, sondern V, und wir werden zu $\mathbb{R}^n$ nur isomorph, indem jemand eine Basis wählt.

Und dein wirklicher Name ist v, alle diese lange Namen sind nur deine Koordinaten in dieser oder jener Basis. Menschen brauchen Koordinaten, um mit uns besser operieren zu können. Daher brauchen sie auch die Regel."