Linearformen und Bilinearformen

Lineare Algebra I

Kapitel 9

28. Juni 2011

Logistik

Dozent: Olga Holtz, MA 378, Sprechstunden Freitag 14-16

Webseite: `www.math.tu-berlin.de/~holtz`

Email: `holtz@math.tu-berlin.de`

Assistent: Sadegh Jokar, MA 373, Sprechstunden Donnerstag 12-14

Tutoren: Kolleck, Loewe, Neumerkel, Zieschang

Ankündigung:

Klausur (für diejenigen, die eine Note brauchen):
Freitag, 15. Juli 2011, 12-14 EB 301
Anmeldung: durch die Tutoren

Linearformen und Bilinearformen

Linearform, Dualraum

Ist V ein K-Vektorraum, so nennen wir eine Abbildung $f \in \mathcal{L}(V, K)$ eine *Linearform* auf V. Den K-Vektorraum $V^* := \mathcal{L}(V, K)$ nennen wir den *Dualraum* von V.

Linearformen und Bilinearformen

Linearform, Dualraum

Ist V ein K-Vektorraum, so nennen wir eine Abbildung $f \in \mathcal{L}(V, K)$ eine *Linearform* auf V. Den K-Vektorraum $V^* := \mathcal{L}(V, K)$ nennen wir den *Dualraum* von V.

Ist $\dim(V) = n$, so folgt $\dim(V^*) = n$. Sei $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $B_2 = \{1\}$ eine Basis des K-Vektorraumes K. Ist $f \in V^*$, dann gilt $f(v_i) = \alpha_i$ für gewisse $\alpha_i \in K$, $i = 1, \ldots, n$, und

$$[f]_{B_1,B_2} \; = \; [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \in K^{1,n},$$

Linearformen und Bilinearformen

Linearform, Dualraum

Ist V ein K-Vektorraum, so nennen wir eine Abbildung $f \in \mathcal{L}(V, K)$ eine *Linearform* auf V. Den K-Vektorraum $V^* := \mathcal{L}(V, K)$ nennen wir den *Dualraum* von V.

Ist $\dim(V) = n$, so folgt $\dim(V^*) = n$. Sei $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $B_2 = \{1\}$ eine Basis des K-Vektorraumes K. Ist $f \in V^*$, dann gilt $f(v_i) = \alpha_i$ für gewisse $\alpha_i \in K$, $i = 1, \ldots, n$, und

$$[f]_{B_1,B_2} \ = \ [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \in K^{1,n},$$

das heißt, $[\alpha_1, \ldots \alpha_n]$ ist die Matrixdarstellung von f bezüglich der Basen B_1 von V und B_2 von K. Für ein Element $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in V$ gilt

$$f(v) = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i = \underbrace{[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]}_{\in K^{1,n}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}}_{\in K^{n,1}}.$$

Die isomorphen Vektorräume K und $K^{1,1}$ werden miteinander identifziert.

Beispiele

(1) Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der auf dem endlichen reellen Intervall $[a, b]$ differenzierbaren Funktionen. Dann sind

$$\begin{aligned} f_1 : V \to \mathbb{R}, \qquad & g \mapsto \int_a^b g(x)dx, \\ f_2 : V \to \mathbb{R}, \qquad & g \mapsto g'(c) \quad \text{für ein gegebenes } c \in [a, b] \end{aligned}$$

Linearformen auf V, also $f_1, f_2 \in V^*$.

Beispiele

(1) Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der auf dem endlichen reellen Intervall $[a, b]$ differenzierbaren Funktionen. Dann sind

$$f_1 : V \to \mathbb{R}, \qquad g \mapsto \int_a^b g(x)dx,$$
$$f_2 : V \to \mathbb{R}, \qquad g \mapsto g'(c) \quad \text{für ein gegebenes } c \in [a, b]$$

Linearformen auf V, also $f_1, f_2 \in V^*$.

(2) Sei $V = K^{n,1}$, dann können wir V^* mit $K^{1,n}$ identifizieren (streng genommen sind diese Vektorräume nur isomorph), wobei jedes $[\lambda_1, \dots, \lambda_n] \in K^{1,n}$ als lineare Abbildung von $K^{n,1}$ nach K interpretiert wird. Die Abbildung

$$V \to V^*, \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}^T = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$$

ist ein Isomorphismus zwischen den K-Vektorräumen V und V^*.

Duale Basis

Satz. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit einer gegebenen Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann gibt es genau eine Basis $B^* = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ von V^* mit der Eigenschaft

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Wir nennen B^* die zu B duale Basis von V^*.

Duale Basis

Satz. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit einer gegebenen Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann gibt es genau eine Basis $B^* = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ von V^* mit der Eigenschaft

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Wir nennen B^* die zu B duale Basis von V^*.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz. Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine gegebene Basis von V. Die Menge $\{1\}$ ist eine Basis von K. Sei $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ die Standardbasis des $K^{1,n}$, also

$$e_i^* = [0, \ldots, 0, \underbrace{1,}_{i} 0, \ldots, 0], \quad i = 1, \ldots, n.$$

Wir betrachten den Isomorphismus

$$mat : V^* \to K^{1,n}, \quad f \mapsto [f]_{B,\{1\}},$$

der eine Linearform $f \in V^*$ auf ihre Matrixdarstellung bezüglich der gegebenen Basen B von V und $\{1\}$ von K abbildet.

Beweis II.

Wir definieren

$$v_i^* \ := \ mat^{-1}(e_i^*), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dann ist v_i^* eine Linearform auf V, deren Matrixdarstellung bezüglich der Basen B und $\{1\}$ durch e_i^* gegeben ist,

$$mat(v_i^*) \ = \ [v_i^*]_{B,\{1\}} \ = \ e_i^*, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Es folgt

$$v_i^*(v_j) \ = \ \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{array} \right\} \ = \ \delta_{ij}.$$

Beweis II.

Wir definieren

$$v_i^* \;:=\; mat^{-1}(e_i^*), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dann ist v_i^* eine Linearform auf V, deren Matrixdarstellung bezüglich der Basen B und $\{1\}$ durch e_i^* gegeben ist,

$$mat(v_i^*) \;=\; [v_i^*]_{B,\{1\}} \;=\; e_i^*, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Es folgt

$$v_i^*(v_j) \;=\; \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{array} \right\} \;=\; \delta_{ij}.$$

Wir zeigen nun, dass die so konstruierten Vektoren $v_1^*, \ldots, v_n^* \in V^*$ linear unabhängig sind. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j^* = 0_{V^*} \in V^*.$$

Dann gilt für jeden Basisvektor v_i von V,

$$0 = 0_{V^*}(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j^*(v_i) = \lambda_i$$

und somit $\lambda_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Beweis III.

Da die Menge $B^* := \{v_1^*, \ldots, v_n^*\} \subset V^*$ aus n linear unabhängigen Vektoren besteht und $\dim(V^*) = n$ ist, bildet B^* eine Basis von V^*.

Beweis III.

Da die Menge $B^* := \{v_1^*, \dots, v_n^*\} \subset V^*$ aus n linear unabhängigen Vektoren besteht und $\dim(V^*) = n$ ist, bildet B^* eine Basis von V^*. Sei nun $\{\widetilde{v}_1^*, \dots, \widetilde{v}_n^*\}$ eine weitere Basis von V^* mit $\widetilde{v}_i^*(v_j) = \delta_{ij}$. Dann gibt es für jeden Basisvektor $\widetilde{v}_j^*$, $j = 1, \dots, n$, eindeutig bestimmte Skalare $\alpha_{ij} \in K$, $i = 1, \dots, n$, mit

$$\widetilde{v}_j^* = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} v_k^* .$$

Beweis III.

Da die Menge $B^* := \{v_1^*, \ldots, v_n^*\} \subset V^*$ aus n linear unabhängigen Vektoren besteht und $\dim(V^*) = n$ ist, bildet B^* eine Basis von V^*. Sei nun $\{\widetilde{v}_1^*, \ldots, \widetilde{v}_n^*\}$ eine weitere Basis von V^* mit $\widetilde{v}_i^*(v_j) = \delta_{ij}$. Dann gibt es für jeden Basisvektor $\widetilde{v}_j^*$, $j = 1, \ldots, n$, eindeutig bestimmte Skalare $\alpha_{ij} \in K$, $i = 1, \ldots, n$, mit

$$\widetilde{v}_j^* = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} v_k^*.$$

Es folgt

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \widetilde{v}_j^*(v_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} v_k^*(v_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \delta_{ki} = \alpha_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

und somit $\widetilde{v}_j^* = v_j^*$ für $j = 1, \ldots, n$.

Beispiel

Sei $V = K^{n,1}$ mit der Standardbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Dann ist $V^* = K^{1,n}$ und die Standardbasis $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ von V^* ist die zu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ duale Basis, denn offensichtlich gilt $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.

Beispiel

Sei $V = K^{n,1}$ mit der Standardbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Dann ist $V^* = K^{1,n}$ und die Standardbasis $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ von V^* ist die zu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ duale Basis, denn offensichtlich gilt $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.

Definition: duale Abbildung

Seien V, W zwei K-Vektorräume mit ihren jeweiligen Dualräumen V^*, W^* und sei $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Dann heißt

$$f^* : W^* \to V^*, \quad h \mapsto h \circ f,$$

also $f^* \circ h = h \circ f$ für alle $h \in W^*$, die zu f *duale Abbildung*.

Beispiel

Sei $V = K^{n,1}$ mit der Standardbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Dann ist $V^* = K^{1,n}$ und die Standardbasis $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ von V^* ist die zu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ duale Basis, denn offensichtlich gilt $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.

Definition: duale Abbildung

Seien V, W zwei K-Vektorräume mit ihren jeweiligen Dualräumen V^*, W^* und sei $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Dann heißt

$$f^* : W^* \to V^*, \quad h \mapsto h \circ f,$$

also $f^* \circ h = h \circ f$ für alle $h \in W^*$, die zu f *duale Abbildung*.

Lemma

Die in der Definition eigeführte duale Abbildung zu $f \in \mathcal{L}(V, W)$ ist linear, also $f^* \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$.

Beispiel

Sei $V = K^{n,1}$ mit der Standardbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$. Dann ist $V^* = K^{1,n}$ und die Standardbasis $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ von V^* ist die zu $\{e_1, \dots, e_n\}$ duale Basis, denn offensichtlich gilt $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.

Definition: duale Abbildung

Seien V, W zwei K-Vektorräume mit ihren jeweiligen Dualräumen V^*, W^* und sei $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Dann heißt

$$f^* : W^* \to V^*, \quad h \mapsto h \circ f,$$

also $f^* \circ h = h \circ f$ für alle $h \in W^*$, die zu f *duale Abbildung*.

Lemma

Die in der Definition eigeführte duale Abbildung zu $f \in \mathcal{L}(V, W)$ ist linear, also $f^* \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$.

Beweis. Seien $h_1, h_2 \in W^*$, $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, dann gilt

$$\begin{aligned} f^*(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) &= (\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) \circ f = (\lambda_1 h_1) \circ f + (\lambda_2 h_2) \circ f \\ &= \lambda_1 (h_1 \circ f) + \lambda_2 (h_2 \circ f) = \lambda_1 f^*(h_1) + \lambda_2 f^*(h_2). \end{aligned}$$

Duale Abbildung und Transponierung

Satz. Seien V, W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume mit Basen B_1, B_2 und seien B_1^*, B_2^* die entsprechenden dualen Basen von V^*, W^*. Ist $f \in \mathcal{L}(V, W)$, so gilt

$$([f]_{B_1,B_2})^T = [f^*]_{B_2^*,B_1^*},$$

das heißt, die Transponierte der Matrixdarstellung von $f \in \mathcal{L}(V, W)$ bezüglich der Basen B_1, B_2 ist gleich der Matrixdarstellung der dualen Abbildung $f^* \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$ bezüglich der dualen Basen B_2^*, B_1^*.

Duale Abbildung und Transponierung

Satz. Seien V, W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume mit Basen B_1, B_2 und seien B_1^*, B_2^* die entsprechenden dualen Basen von V^*, W^*. Ist $f \in \mathcal{L}(V, W)$, so gilt

$$([f]_{B_1,B_2})^T \; = \; [f^*]_{B_2^*,B_1^*},$$

das heißt, die Transponierte der Matrixdarstellung von $f \in \mathcal{L}(V, W)$ bezüglich der Basen B_1, B_2 ist gleich der Matrixdarstellung der dualen Abbildung $f^* \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$ bezüglich der dualen Basen B_2^*, B_1^*.

Beweis. Seien $B_1 = \{v_1, \ldots, v_m\}$, $B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ und $B_1^* = \{v_1^*, \ldots, v_m^*\}$, $B_2^* = \{w_1^*, \ldots, w_n^*\}$ die entsprechenden dualen Basen. Seien $[f]_{B_1,B_2} = [a_{ij}] \in K^{n,m}$, also

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i, \quad j = 1, \ldots, m,$$

und $[f^*]_{B_2^*,B_1^*} = [b_{ij}] \in K^{m,n}$, also

$$f^*(w_j^*) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} v_i^*, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Beweis II.

Dann gilt für jedes Paar (k, ℓ) mit $1 \leq k \leq n$ und $1 \leq \ell \leq m$,

$$\begin{aligned} a_{k\ell} &= \sum_{i=1}^{n} a_{i\ell} w_k^*(w_i) = w_k^*\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{i\ell} w_i\Big) = w_k^*(f(v_\ell)) = f^*(w_k^*)(v_\ell) \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{m} b_{ik} v_i^*\Big)(v_\ell) = \sum_{i=1}^{m} b_{ik} v_i^*(v_\ell) \\ &= b_{\ell k}, \end{aligned}$$

wobei wir die Definition der dualen Abbildung sowie die Eigenschaften $w_k^*(w_i) = \delta_{ki}$ und $v_i^*(v_\ell) = \delta_{i\ell}$ ausgenutzt haben.

Beispiel

Betrachte die Vektoräume $V = \mathbb{R}^{2,1}$, $W = \mathbb{R}^{2,1}$ und die lineare Abbildung

$$f : V \to W,\ v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \mapsto w = \begin{bmatrix} v_1 + v_2 \\ 3v_2 \end{bmatrix}.$$

Mit den Basen

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\},\ B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ergeben sich duale Basen

$$B_1^* = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\},\ B_2^* = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

und die duale Abbildung

$$f : W^* \to V^*,\ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \mapsto z = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 + 3y_2 \end{bmatrix}.$$

Komposition.

Lemma. Sind V, W, U drei K-Vektorräume, dann gilt:

(1) Sind $f \in \mathcal{L}(V, W)$ und $g \in \mathcal{L}(W, U)$, so ist $(g \circ f)^* \in \mathcal{L}(U^*, V^*)$ und es gilt $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

(2) Ist $f \in \mathcal{L}(V, W)$ bijektiv, so ist $f^* \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$ bijektiv und es gilt $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

Komposition.

Lemma. Sind V, W, U drei K-Vektorräume, dann gilt:

(1) Sind $f \in \mathcal{L}(V, W)$ und $g \in \mathcal{L}(W, U)$, so ist $(g \circ f)^* \in \mathcal{L}(U^*, V^*)$ und es gilt $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

(2) Ist $f \in \mathcal{L}(V, W)$ bijektiv, so ist $f^* \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$ bijektiv und es gilt $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

Für Matrizen ergeben sich aus dem obigen Satz und diesem Lemma die uns bereits aus Kapitel 2 bekannten Regeln $(AB)^T = B^T A^T$ für $A \in K^{n,m}$ und $B \in K^{m,s}$ sowie $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ für $A \in GL_n(K)$. Manche Autoren benutzen wegen des engen Zusammenhangs von transponierter Matrix und dualer Abbildung auch den Begriff der *transponierten linearen Abbildung* anstatt den der dualen Abbildung.