Technische Universität Berlin Sommersemester 08
Prof. Dr. F. Hess, M. Wagner
`www.math.tu-berlin.de/˜hess/codth-ss2008`

11. Übung Codierungstheorie

1. Aufgabe Goppa-Codes (4 Punkte)

Sei $K := \mathbb{F}_q$ und F/K ein algebraische Funktionenkörper vom Geschlecht g, ferner seien $P_1, ..., P_n$ paarweise verschiedene Stellen von F/K vom Grad 1 und $D := \sum_{i=1}^n P_i$. Sei $G \in \mathcal{D}_F$ mit $\mathrm{supp} G \cap \mathrm{supp} D = \emptyset$ und $\deg G < n$. Zeige folgende Aussagen:

(a) Die Evaluationsabbildung

$$ev_D : \mathcal{L}(G) \longrightarrow \mathbb{F}_q^n, \quad x \longmapsto (x(P_1), ..., x(P_n)) \in \mathbb{F}_q^n$$

ist injektiv.

(b) $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}(D, G)$ ist ein $[n, k, d]$-Code mit $d \geq n - \deg G$ und $k = \dim G \geq \deg G + 1 - g$ sowie $k + d \geq n + 1 - g$.

(c) Ist zusätzlich $2g - 2 < \deg G < n$, dann ist $k = \deg G + 1 - g$.

(d) Ist $\{x_1, ..., x_k\}$ eine Basis von $\mathcal{L}(G)$, so ist die Matrix

$$G = \begin{pmatrix} x_1(P_1) & x_1(P_2) & ... & x_1(P_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_k(P_1) & x_k(P_2) & ... & x_k(P_n) \end{pmatrix}$$

eine Erzeugermatrix für $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}(D, G)$.

2. Aufgabe Goppa-Codes (4 Punkte)

Seien die Voraussetzungen so wie in Aufgabe 1 und $F = \mathbb{F}_q(x)$. Zeige folgende Aussagen:

(a) $n \leq q + 1$

(b) $k = 0 \Leftrightarrow \deg G < 0$ und $k = n \Leftrightarrow \deg G > n - 2$.

(c) $0 \leq \deg G \leq n-2$, $k = 1 + \deg G$ und $d = n - \deg G$. Inbesondere ist C ein MDS-Code.

(d) $C^{\perp}$ ist ein rationaler Goppa-Code.

3. Aufgabe **Goppa-Codes** **(4 Punkte)**

Sei $F = \mathbb{F}_8(x)$ eine Funktionenkörper und $\mathbb{F}_8^{\times} = \langle \alpha \rangle$. Es seien P_1, P_2, P_3 und P_4 die Zählerdivisoren von $(x-1), (x-\alpha), (x-\alpha^2)$ und $(x-\alpha^4)$ und es sei $D := \sum_{i=1}^{4} P_i$. Ferner sei P der Zählerdivisor von $g(x) = x - \alpha^3$. Bestimme die Kontrollmatrix von $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}(D, P - P_{\infty})$.

4. Aufgabe **(4 Punkte)**

Sei $K := \mathbb{F}_q$ und F/K ein Funktionenkörper, welcher ein Stelle vom Grad 1 besitzt und für das Geschlecht g von F/K gelte $g = 0$. Zeige, dass F dann ein rationaler Funktionenkörper ist.