Die Aussage (ii) des Satzes nennt man auch Satz von Bézout.

2.69 Definition. Ein Integritätshalbring R heißt euklidischer Ring, wenn es eine Abbildung $d : R\backslash\{0\} \to \mathbb{Z}^{\geq 0}$ mit der folgenden Eigenschaft gibt: Zu $a, b \in R$, $b \neq 0$ gibt es $h, r \in R$ mit $a = hb + r$ und $r = 0$ oder $d(r) < d(b)$.

Die in der Definition verlangte Abbildung d heißt Gradfunktion. Die Zerlegung $a = hb + r$ mit $r = 0$ oder $d(r) < d(b)$ heißt Division mit Rest r.

2.70 Beispiel. Der Ring $\mathbb{Z}$ wird mit $x \mapsto |x|$ als Gradfunktion zum euklidischen Ring.

2.71 Satz. *Jeder euklidische Ring ist ein Hauptidealring.*

Beweis. Sei I ein Ideal von R und $a \in I$, $a \neq 0$ ein Element mit $d(a) = \min\{d(b) \mid b \in I\backslash\{0\}\}$. Sei $b \in I$. Division mit Rest liefert $b = ha + r$, also $r = b - ha \in I$. Nach Wahl von a ist $d(r) < d(a)$ nicht möglich, also gilt $r = 0$. Es folgt $I = Ra$.

Für $I = R$ folgt speziell $R = Rc$ mit einem $c \in R$. Es gibt $e \in R$ mit $c = ec = ce$, und zu jedem $x \in R$ gibt es $y \in R$ mit $x = yc$. Nun ist $xe = (yc)e = y(ce) = yc = x$, also ist e Einselement (wegen $R \neq 0$ nach Voraussetzung gilt $e \neq 0$).

Damit ist R ein Integritätsring, in dem jedes Ideal Haupideal ist. □

In euklidischen Ringen können größte gemeinsame Teiler mit dem euklidischen Algorithmus berechnet werden. Genauer liefert der euklidische Algorithmus angewendet auf $a, b \in R$ Elemente $\lambda, \mu \in R$ mit $\gcd(a, b) = \lambda a + \mu b$.

2.13 Lokale Ringe und Lokalisierung

2.72 Definition. Sei R ein kommutativer Ring. Wenn R genau ein maximales Ideal besitzt, dann heißt R lokaler Ring.

2.73 Satz. *Ein kommutativer Ring R mit Einselement ist genau dann lokal, wenn $R\backslash R^\times$ ein Ideal von R ist.*

Für einen lokalen Ring R ist $R\backslash R^\times$ das maximale Ideal von R.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Bezeichne $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von R und sei $x \in R\backslash R^\times$. Dann gilt $R \neq Rx$, da x keine Einheit ist. Da es ein maximales Ideal von R gibt, welches Rx enthält, folgt $Rx \subseteq \mathfrak{m}$, also $x \in \mathfrak{m}$ und $R\backslash R^\times \subseteq \mathfrak{m}$. Da $\mathfrak{m}$ keine Einheiten enthalten kann, gilt sogar $R\backslash R^\times = \mathfrak{m}$.

„$\Leftarrow$“: Ist $\mathfrak{m} = R\backslash R^\times$ ein Ideal, so ist es aus dem eben genannten Grund maximal und enthält auch jedes weitere Ideal $\neq R$ von R. Daher besitzt R nur dieses eine maximale Ideal $\mathfrak{m}$. □

Sei $R \neq 0$ ein kommutativer Halbring und U eine nicht-leere, multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R. Wir wollen eine „Bruchrechnung“ mit Elementen aus R im Zähler und Elementen aus U im Nenner definieren. Dazu führen wir auf der Menge $R \times U$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ ein. Für $(r_1, u_1), (r_2, u_2) \in R \times U$ gelte $(r_1, u_1) \sim (r_2, u_2)$ genau dann, wenn es ein $t \in U$ mit $t(r_1u_2 - r_2u_1) = 0$ gibt.

2.74 Lemma. *Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Reflexivität und Symmetrie sind unmittelbar einsichtig. Für die Transitivität muß etwas gerechnet werden. Es gelte $(r_1, u_1) \sim (r_2, u_2)$ und $(r_2, u_2) \sim (r_3, u_3)$. Wir können also schreiben

$$\begin{aligned} t(r_1u_2 - r_2u_1) &= 0, \\ s(r_2u_3 - r_3u_2) &= 0 \end{aligned}$$

mit $t, s \in U$. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit su_3 und die zweite mit tu_1 und erhalten

$$\begin{aligned} st(r_1u_2u_3 - r_2u_1u_3) &= 0 \\ st(r_2u_1u_3 - r_3u_1u_2) &= 0. \end{aligned}$$

Addition dieser Gleichungen und Ausklammern von u_2 liefert

$$stu_2(r_1u_3 - r_3u_1) = 0$$

mit $stu_2 \in U$. □

Die Verwendung von t in der Definition von $\sim$ ist deswegen erforderlich, da wir aus $u_2(r_1u_3 - r_3u_1) = 0$ zum Schluß nicht ohne weiteres auf $r_1u_3 - r_3u_1 = 0$ schließen können. Enthält U keine Nullteiler von R, so wäre dies möglich.

Für $r \in R$ und $u \in U$ schreiben wir die Äquivalenzklasse von (r, u) bezüglich $\sim$ in der Form r/u. Um die Menge der Äquivalenzklassen $R \times U/\!\sim\, = \{\, r/u \mid (r, u) \in R \times U \,\}$ zu einem Ring zu machen, definieren wir Addition und Multiplikation vertreterweise wie in der Bruchrechnung.

$$\begin{aligned} r_1/u_1 + r_2/u_2 &:= (r_1u_2 + r_2u_1)/(u_1u_2) \\ r_1/u_1 \cdot r_2/u_2 &:= (r_1r_2)/(u_1u_2), \end{aligned}$$

für alle $(r_1, u_1), (r_2, u_2) \in R \times U$.

2.75 Definition. Wir bezeichen $R[U^{-1}] := (R \times U/\!\sim, +, \cdot)$ als die Lokalisierung von R bezüglich U.

2.76 Satz. *Sei R ein kommutativer Halbring und U eine nicht-leere, multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R. Dann ist $R[U^{-1}]$ ein kommutativer Ring.*

Beweis. Zur Wohldefiniertheit der oben definierten Operationen. Seien (r_1, u_1), $(r_1', u_1') \in R \times U$ mit $r_1/u_1 = r_1'/u_1'$, also $tr_1u_1' = tr_1'u_1$ für ein $t \in U$. Es genügt zu zeigen, daß $(r_1'u_2 + r_2u_1')/(u_1'u_2) = (r_1u_2 + r_2u_1)/(u_1u_2)$ und $(r_1'r_2)/(u_1'u_2) = (r_1r_2)/(u_1u_2)$ für alle $(r_2, u_2) \in R \times U$ gilt. Dann sind die Definitionen unabhängig von der Wahl der Vertreter auf der linken Seite, per Symmetrie dann auch auf der rechten Seite, und zusammen dann auf der linken und rechten Seite simultan. Für die Addition ergibt sich

$$\begin{aligned} t(r_1u_2 + r_2u_1)(u_1'u_2) &= tr_1u_2u_1'u_2 + tr_2u_1u_1'u_2 \\ &= tr_1'u_2u_1u_2 + tr_2u_1u_1'u_2 \\ &= t(r_1'u_2 + r_2u_1')(u_1u_2) \end{aligned}$$

und für die Multiplikation ergibt sich

$$tr_1'r_2u_1u_2 = tr_1r_2u_1'u_2.$$

Dies sind genau die Bedingungen für die Klassengleichheit und somit ist die Wohldefiniertheit bewiesen.

Die Assoziativität und Distributivität von $+$ und $\cdot$ lassen sich aufgrund der Wohldefiniertheit direkt für die Vertreter (r, u) verifizieren.

Es gilt offenbar $(r_1u)/(u_1u) = (r_1/u_1)$ für alle $(r_1, u_1) \in R \times U$ und $u \in U$. Das Nullelement von $R[U^{-1}]$ ist $0/u$ für beliebiges $u \in U$, denn $0/u + r_1/u_1 = (r_1u)/(u_1u) = r_1/u_1$. Das Einselement von $R[U^{-1}]$ ist u/u für beliebiges $u \in U$, denn $(u/u) \cdot (r_1/u_1) = (r_1u)/(u_1u) = r_1/u_1$. □

Für die Summe $r_1/u + r_2/u$ mit gleichem Hauptnenner gilt $r_1/u + r_2/u = (r_1u + r_2u)/u^2 = ((r_1 + r_2)u)/(uu) = (r_1 + r_2)/u$, wie gewohnt.

2.77 Definition. Wir definieren eine äußere Verknüpfung $R \times R[U^{-1}] \to R[U^{-1}]$ durch $r \cdot (r_1/u_1) := (rr_1)/u_1$.

Mit der Definition gilt zum Beispiel $r \cdot 1 = (ru)/u$ für jedes $u \in U$. Gilt $1 \in U$, so erhalten wir $r \cdot 1 = r/1$.

Die folgenden Sätze sind wieder für Halbringe als auch Ringe richtig.

2.78 Satz. *Sei R ein kommutativer (Halb)Ring. Die Abbildung*

$$\iota_U : R \to R[U^{-1}], \quad r \mapsto r \cdot 1$$

ist ein (Halb)Ringhomomorphismus mit den folgenden Eigenschaften.

(i) $\iota_U(U) \subseteq R[U^{-1}]^\times$ *und* $\iota_U(R)R[U^{-1}] = R[U^{-1}]$.

(ii) $\ker(\iota_U) = \{r \in R \mid ur = 0 \text{ für ein } u \in U\}$.

(iii) *Für* $r \in R$ *und* $u \in U$ *gilt* $r/u = \iota_U(r)\iota_U(u)^{-1}$.

Beweis. Sei $u \in U$. Für die Additivität beachten wir mit obiger Bemerkung über den Hauptnenner $\iota_U(r_1 + r_2) = ((r_1 + r_2)u)/u = (r_1 u + r_2 u)/u = (r_1 u)/u + (r_2 u)/u = \iota_U(r_1) + \iota_U(r_2)$ für alle $r_1, r_2 \in R$. Für die Multiplikativität beachten wir $\iota_U(r_1 r_2) = (r_1 r_2 u)/u = (r_1 u r_2 u)/(u^2) = (r_1 u)/u \cdot (r_2 u)/u = \iota_U(r_1)\iota_U(r_2)$ für alle $r_1, r_2 \in R$. Besitzt R ein Einselement, so gilt ferner $\iota_U(1) = (1u)/u = u/u = 1$.

(i): Die Elemente u_1/u_2 für $u_1, u_2 \in U$ besitzen offenbar die Inversen u_2/u_1 und sind daher Einheiten in $R[U^{-1}]$. Da U nicht-leer st, enthält das Ideal $\iota_U(R)R[U^{-1}]$ Einheiten, es gilt also $\iota_U(R)R[U^{-1}] = R[U^{-1}]$.

(ii): Sei $r \in \ker(\iota_U)$. Dann gibt es $u' \in U$ mit $ru'/u' = 0$. Also gibt es ein $u'' \in U$ mit $ru'/u' = 0/u''$. Schließlich gibt es ein $t \in U$ mit $tu'u''r = 0tu' = 0$ in R. Wegen $u = tu'u'' \in U$ gilt also $ur = 0$. Gelte umgekehrt $ur = 0$ für ein $u \in U$. Mit $\iota_U(ur) = \iota_U(u)\iota_U(r) = 0$ und $\iota_U(u) \in R[U^{-1}]^\times$ nach (i) folgt $\iota_U(r) = 0$, also $r \in \ker(\iota_U)$.

(iii): Es gilt $\iota_U(r) = ru'/u'$ und $\iota_U(u) = uu''/u''$ für $u', u'' \in U$. Dann folgt $\iota_U(r)\iota_U(u)^{-1} = (ru'u'')/(uu'u'') = r/u$. □

Aus Aussage (i) oder (ii) folgt, daß $R[U^{-1}] = \{0\}$ für $0 \in U$ gilt. In einem Integritätsring R gilt $\ker(\iota_U) = 0$ falls $0 \notin U$, und $\iota_U : R \to R[U^{-1}]$ ist ein Monomorphismus.

Wir kommen jetzt zur universellen Eigenschaft der Lokalisierung. Eine universelle Eigenschaft ist informell folgendes. Mit Hilfe von Strukturabbildungen formalisiert man die wesentlichen Eigenschaften einer Konstruktion, wie zum Beispiel beim direkten Produkt (Projektionen), der direkten Summe (Injektionen) oder auch des Faktorrings (kanonischer Epimorphismus). Dann stellt man noch eine Minimalitätsforderung (die Universalität) an die Konstruktion.

Die wesentliche Eigenschaft der Lokalisierung ist die folgende. Seien R ein kommutativer (Halb)Ring und $U \subseteq R$ eine nicht-leere, multiplikativ abgeschlossene Menge. Sei $\iota : R \to S$ ein Homomorphismus. Wir nennen S eine schwache Lokalisierung von R bezüglich U mit Strukturhomomorphismus ι, wenn $\iota(U) \subseteq S^\times$ gilt (diese Terminologie ist nicht Standard und wir verwenden sie nur in diesem Abschnitt). Wir nennen S eine Lokalisierung von R bezüglich U mit Strukturhomomorphismus ι, wenn die folgende universelle Bedingung erfüllt ist: Für jede weitere schwache Lokalisierung T von R bezüglich U mit Strukturhomomorphismus ϕ gibt es genau einen Homomorphismus $\psi : S \to T$ mit $\phi = \psi \circ \iota$.

2.79 Satz. *Der Ring $R[U^{-1}]$ ist eine Lokalisierung von R mit Strukturhomomorphismus ι_U. Lokalisierungen S von R bezüglich U sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Zunächst gilt wie erforderlich $\iota_U(U) \subseteq R[U^{-1}]^\times$, so daß $R[U^{-1}]$ eine schwache Lokalisierung von R bezüglich U mit Strukturhomomorphismus ι_U ist.

Sei $\phi : R \to T$ mit $\phi(U) \subseteq T^\times$. Wir definieren $\psi : R[U^{-1}] \to T$ durch $r/u \mapsto \phi(r)\phi(u)^{-1}$. Aufgrund der Homomorphieeigenschaft von ϕ ist ψ zunächst wohldefiniert: Für $r/u = r'/u'$ gibt es $t \in U$ mit $tru' = tr'u$. Daraus folgt durch Anwendung von ϕ die Gleichung $\phi(t)\phi(r)\phi(u') = \phi(t)\phi(r')\phi(u)$ und wegen $\phi(t) \in S^\times$ bereits $\phi(r)\phi(u') = \phi(r')\phi(u)$. Da $\phi(u), \phi(u') \in S^\times$ ergibt sich $\phi(r)\phi(u)^{-1} = \phi(r')\phi(u')^{-1}$.

Multiplikativität und Additivität folgen direkt aus den Rechenregeln in $R[U^{-1}]$, die gerade so gemacht sind.

Wegen $\psi(\iota_U(r)) = \psi((ru)/u) = \phi(ru)\phi(u)^{-1} = \phi(r)$ für $u \in U$ und wegen $\psi(1) = \psi(u/u) = \phi(u)\phi(u)^{-1} = 1$ ist ψ ein Homomorphismus mit $\psi \circ \iota_U = \phi$.

Sei ψ' ein anderer Homomorphismus mit $\psi' \circ \iota_U = \phi$, und sei $r/u \in R[U^{-1}]$ beliebig. Dann gilt $r/u = \iota_U(r)\iota_U(u)^{-1}$, und damit $\psi'(r/u) = \psi'(\iota_U(r)\iota_U(u)^{-1}) = \psi'(\iota_U(r))\psi'(\iota_U(u))^{-1} = \phi(r)\phi(u)^{-1}$. Daher gilt $\psi' = \psi$ und ψ ist eindeutig bestimmt.

Zur zweiten Aussage. Sei S eine Lokalisierung von R bezüglich U mit Strukturhomomorphismus ι. Nach der ersten Aussage ist $R[U^{-1}]$ ebenfalls eine solche Lokalisierung, mit Strukturhomomorphismus ι_U.

Wenn wir die universelle Eigenschaft von S auf $R[U^{-1}]$ anwenden, erhalten wir den Homomorphismus $\psi_1 : S \to R[U^{-1}]$ mit $\iota_U = \psi_1 \circ \iota$. Wenn wir die universelle Eigenschaft von $R[U^{-1}]$ auf S anwenden, erhalten wir den Homomorphismus $\psi_2 : R[U^{-1}] \to S$ mit $\iota = \psi_2 \circ \iota_U$. Damit folgt $\iota = \psi_2 \circ \psi_1 \circ \iota$ und $\iota_U = \psi_1 \circ \psi_2 \circ \iota_U$.

Wenn wir die universelle Eigenschaft von S auf S anwenden, erhalten wir den Homomorphismus $\mathrm{id}_S : S \to S$ mit $\iota = \mathrm{id}_S \circ \iota$. Wenn wir die universelle Eigenschaft von $R[U^{-1}]$ auf $R[U^{-1}]$ anwenden, erhalten wir den Homomorphismus $\mathrm{id}_{R[U^{-1}]} : R[U^{-1}] \to R[U^{-1}]$ mit $\iota_U = \mathrm{id}_{R[U^{-1}]} \circ \iota_U$.

Aufgrund der obigen Gleichungen für $\iota = \psi_2 \circ \psi_1 \circ \iota$ und $\iota_U = \psi_1 \circ \psi_2 \circ \iota_U$ folgt wegen der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft $\psi_2 \circ \psi_1 = \mathrm{id}_S$ und $\psi_1 \circ \psi_2 = \mathrm{id}_{R[U^{-1}]}$. □

Man kann die Lokalisierungen $R[U^{-1}]$ bis auf Isomorphie also auch durch eine universelle Eigenschaft definieren. Für die Existenz ist aber noch das Konstruktionsverfahren anzugeben.

Der nachfolgende Satz gibt Rechenregeln für Lokalisierungen an, ähnlich dem zweiten Isomorphiesatz für Faktorringe. Insbesondere liefern mehrfache Lokalisierungen mit dem „gleichen“ U nichts Neues.

2.80 Satz. *Sei R kommutativer (Halb)Ring.*

(*i*) *Ist $U \subseteq R^\times$ eine nicht-leere, multiplikativ abgeschlossene Teilmenge, so gilt $R[U^{-1}] \cong R$.*

(*ii*) *Sind $U \subseteq V \subseteq R$ nicht-leere, multiplikativ abgeschlossene Teilmengen, so gilt $R[V^{-1}] \cong R[U^{-1}][\iota_U(V)^{-1}]$.*

(*iii*) *Ist $U \subseteq R$ eine nicht-leere, multiplikativ abgeschlossene Teilmenge, so gilt $R[U^{-1}] \cong \iota_U(R)[\iota_U(U)^{-1}]$.*

Beweis. Aufgabe. Folgt leicht aus der universellen Eigenschaft. □

Ist R ein kommutativer Ring, U eine nicht-leere Teilmenge mit $1 \notin U$ und $V = U \cup \{1\}$, so gilt wegen $\iota_U(1) = 1$ nach Aussage (*ii*) trotzdem $R[U^{-1}] = R[V^{-1}]$. Daher setzen wir für den Fall, daß R ein Einselement hat, üblicherweise $1 \in U$ voraus.

Man wendet Lokalisierung an, wenn man einen Ring „vereinfachen“ möchte. Die guten Eigenschaften von R übertragen sich auf $R[U^{-1}]$, und weitere können hinzukommen.

Wir vergleichen die Idealtheorie in R und $R[U^{-1}]$ für einen kommutativen Ring R und eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge U von R mit $1 \in U$. Die Idealtheorie in $R[U^{-1}]$ stellt sich dabei als Vereinfachung der Idealtheorie in R heraus. Seien $\mathfrak{I}(R)$ und $\mathfrak{I}(R[U^{-1}])$ die Mengen der Ideale von R beziehungsweise $R[U^{-1}]$. Im folgenden schreiben wir zur Vereinfachung der Notation ι für ι_U. Wir betrachten die üblichen Abbildungen

$$\iota_* : \mathfrak{I}(R) \to \mathfrak{I}(R[U^{-1}]),\ I \mapsto \iota(I)R[U^{-1}],$$
$$\iota^* : \mathfrak{I}(R[U^{-1}]) \to \mathfrak{I}(R),\ J \mapsto \iota^{-1}(J).$$

Sei I ein Ideal von R. Sei $\bar{I} = \{r \in R \mid \exists\, u \in U \text{ mit } ur \in I\}$. Man prüft leicht nach, daß $\bar{I}$ ein Ideal von R mit $\bar{I} \supseteq I$ ist und daß $\bar{\bar{I}} = \bar{I}$ gilt. Wir nennen $\bar{I}$ (nur hier) den Abschluß von I bezüglich U. Gilt $\bar{I} = I$, so nennen wir I bezüglich U abgeschlossen. Bei der Berechnung von $\bar{I}$ muß man also aus den Elementen von I soweit möglich alle Elemente von U herausdividieren, um das abgeschlossene Ideal $\bar{I}$ aus I zu erhalten.

Im folgenden sei sei $\mathfrak{I}_U$ die Menge der abgeschlossenen Ideale von R und $\pi_I : R \to R/I$ der kanonische Epimorphismus.

2.81 Satz. *Mit den eingeführten Bezeichnungen gelten*

(*i*) *$\iota_*(\iota^*(J)) = J$ und $\iota^*(\iota_*(I)) = \bar{I}$ für alle $J \in \mathfrak{I}(R[U^{-1}])$ und alle $I \in \mathfrak{I}(R)$.*

(*ii*) *Es gilt* $\mathrm{im}(\iota^*) = \mathfrak{I}_U$*, so daß* ι_* *und* ι^* *zueinander inverse Bijektionen der Mengen* $\mathfrak{I}_U$ *und* $\mathfrak{I}(R[U^{-1}])$ *liefern.*

(*iii*) *Für* $I \in \mathfrak{I}(R)$ *gilt* $(R/I)[\pi_I(U)^{-1}] \cong R[U^{-1}]/\iota_*(I)$*.*

(*iv*) ι^* *erhält Inklusionen, Summen, Schnitte, Produkte und Radikale etc. Dasselbe gilt für* ι_* *eingeschränkt auf* $\mathfrak{I}_U$*.*

Beweis. (*i*): Für $J \in \mathfrak{I}(R[U^{-1}])$ gilt allgemein $\iota_*(\iota^*(J)) = \iota(\iota^{-1}(J))R[U^{-1}] \subseteq J$. Für $r/u \in J$ ist aber auch $r/1 \in J$ nach Multiplikation mit $u/1 \in R[U^{-1}]$, und damit $r \in \iota^{-1}(r/1)$. Daher $r/1 \in \iota(\iota^{-1}(J))$ und $r/u \in \iota(\iota^{-1}(J))R[U^{-1}]$ nach Multiplikation mit $1/u \in R[U^{-1}]$. Wir haben damit $\iota_*(\iota^*(J)) = \iota(\iota^{-1}(J))R[U^{-1}] = J$ gezeigt.

Für $I \in \mathfrak{I}(R)$ gilt $\iota^*(\iota_*(I)) = \iota^{-1}(\iota(I)R[U^{-1}]) = \{r \in R \,|\, \exists u \in U \text{ mit } ur \in I\} = \bar{I}$. Zum Beweis der zweiten Gleichung beachten wir zuerst $\iota(I)R[U^{-1}] = \{x/u' \,|\, x \in I, u' \in U\}$, wie man leicht sieht. Weiter gilt $r \in \iota^{-1}(\iota(I)R[U^{-1}])$ für $r \in R$ genau dann, wenn $\iota(r) = r/1 \in \iota(I)R[U^{-1}] = \{x/u' \,|\, x \in I, u' \in U\}$ ist, wenn also $r/1 = x/u'$ für ein $x \in I$ und $u' \in U$ gilt. Dies ist aber äquivalent dazu, daß es $u \in U$ mit $ur \in I$ gibt.

(*ii*): Für $J \in \mathfrak{I}(R[U^{-1}])$ gilt nach Aussage (*i*) nun $\overline{\iota^*(J)} = \iota^*(\iota_*(\iota^*(J))) = \iota^*(J)$, also $\mathrm{im}(\iota^*) \subseteq \mathfrak{I}_U$. Für $I \in \mathfrak{I}_U$ gilt nach Aussage (*i*) aber auch $I = \bar{I} = \iota^*(\iota_*(I))$, also $I \in \mathrm{im}(\iota^*)$ und somit $\mathrm{im}(\iota^*) = \mathfrak{I}(R[U^{-1}])$. Daher sind ι_* und ι^* nach Aussage (*i*) zueinander inverse Bijektionen der Mengen $\mathfrak{I}_U$ und $\mathfrak{I}(R[U^{-1}])$.

(*iii*): Wir betrachten $S = (R/I)[\pi_I(U)^{-1}]$ und $\phi = \iota_{\pi_I(U)} \circ \pi_I : R \to S$. Wegen $\phi(U) \subseteq S^\times$ gibt es $\psi : R[U^{-1}] \to S$ nach Satz 2.79 mit $\psi(r/u) = (r + I)/(u + I)$. Dies zeigt, daß ψ surjektiv ist. Die Inklusion $\ker(\psi) \supseteq \iota_*(I)$ ist wegen $\iota_*(I) = \{x/u \,|\, x \in I, u \in U\}$ klar. Sei nun $r/u \in R[U^{-1}]$ mit $\psi(r/u) = 0$. Dann gibt es $u' \in U$ mit $(u' + I)(r + I) = 0 + I$ beziehungsweise mit $u'r \in I$ (nach dem Kriterium, wann Elemente in einer Lokalisierung Null sind). Also gilt $r \in \bar{I}$ und $r/u \in \iota_*(\bar{I}) = \iota_*(I)$ nach Aussage (*i*). Dies zeigt $\ker(\psi) = \iota_*(I)$.

(*iv*): Die Aussagen für ι^* gelten allgemein, wenn ι nur irgendein Homomorphismus von Ringen ist. Wegen der Bijektivität von ι_* und ι^* auf $\mathfrak{I}_U$ und $\mathfrak{I}(R[U^{-1}])$ folgen die Aussagen hier dann auch für ι_* (vergleiche Satz 2.7). Zusatz zum Radikal: Es gilt zunächst ebenfalls ganz allgemein $\iota^*(\mathrm{Rad}(J)) = \mathrm{Rad}(\iota^*(J))$ für alle $J \in \mathfrak{I}(R[U^{-1}])$, siehe Lemma 2.19. Mit $I = \iota^*(J)$, $J = \iota_*(I)$ und durch Anwenden von ι_* ergibt sich $\mathrm{Rad}(\iota_*(I)) = \iota_*(\mathrm{Rad}(I))$ für alle $I \in \mathfrak{I}(R)$. □

Wenn die Definitionen etwas modifiziert werden, kann Aussage (*iii*) auch in der hübschen Form $(R/I)[U^{-1}] \cong R[U^{-1}]/I[U^{-1}]$ geschrieben werden. Die Merkregel ist: Lokalisierung und Faktorisierung kommutieren!

Sei $I = \ker(\iota)$. Dann können wir den Strukturhomomorphismus $\iota : R \to R[U^{-1}]$ nach dem Homomorphiesatz in $\pi_I : R \to R/I$ und einen Monomorphismus $\phi : R/I \to R[U^{-1}]$ faktorisieren. Hierbei ist $R[U^{-1}]$ eine schwache Lokalisierung von R/I bezüglich $\pi_I(U)$ mit Strukturhomomorphismus ϕ. Weiter gilt $I = \iota^*(\iota_*(\{0\})) = \overline{\{0\}}$ und $\iota_*(I) = \iota_*(\{0\}) = \{0\}$. Nach (iii) folgt $(R/I)[\pi_I(U)^{-1}] \cong R[U^{-1}]/\iota_*(I) \cong R[U^{-1}]$. Dies zeigt, daß $R[U^{-1}]$ auch eine Lokalisierung von R/I bezüglich $\pi_I(U)$ mit injektivem Strukturhomomorphismus ϕ ist. Eine Lokalisierung mit beliebigem Strukturhomomorphismus kann also immer als eine Faktorisierung und eine anschließende Lokalisierung mit injektivem Strukturhomomorphismus aufgefaßt werden.

2.82 Satz. *Sei R kommutativer Ring und U eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R mit $1 \in U$ und $0 \notin U$. Dann übertragen sich die Eigenschaften Ring, Integritätsring, einfach, noethersch, faktoriell, Hauptidealring und euklidisch auf $R[U^{-1}]$. Die Nullteiler von $R[U^{-1}]$ sind genau die Bilder der Nullteiler von R, bis auf Multiplikation mit Einheiten. Es gilt* $\mathrm{Rad}(R[U^{-1}]) = \mathrm{Rad}(R)R[U^{-1}]$.

Beweis. Aufgabe, nachrechnen und die Abbildungen ι, ι_* und ι^* verwenden. Gilt zum Beispiel $R[U^{-1}] = 0$, so folgt $1 \in \ker(\iota_U)$, also gibt es $u \in U$ mit $u1 = 0$, das heißt $0 \in U$. Für $0 \notin U$ folgt also $R[U^{-1}] \neq 0$. Die euklidische Gradfunktion δ_U auf $R[U^{-1}]$ wird durch $\delta_U(r/u) = \min\{\delta(x) \mid x \in \overline{(r)}\}$ gegeben.

Ist $(a/r)(b/s) = 0$ mit $a/r \neq 0$ und $b/s \neq 0$, so gibt es ein $t \in U$ mit $tab = 0$ und es gilt $ta \neq 0$ wegen $a/r \neq 0$ und $tb \neq 0$ wegen $b/s \neq 0$. Also sind a und b Nullteiler in R. □

2.83 Korollar. *Unter der Voraussetzung $0 \notin U$ (und mit den Bezeichnungen von Satz 2.81 gilt):*

(i) Ein Primideal $\mathfrak{p}$ von R ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathfrak{p} \cap U = \emptyset$ gilt.

(ii) Die Abbildungen ι_* und ι^* bilden die Menge der abgeschlossenen Primideale von R und die Menge der Primideale von $R[U^{-1}]$ bijektiv aufeinander ab.

(iii) Nicht abgeschlossene Primideale werden durch ι_* auf das triviale Ideal von $R[U^{-1}]$ abgebildet.

(iv) Abgeschlossene maximale Ideale von R werden durch ι_* auf maximale Ideale von $R[U^{-1}]$ abgebildet.

Beweis. (i): Gilt $\mathfrak{p} \cap U = \emptyset$, so folgt aus $ur \in \mathfrak{p}$ für $u \in U$ und $r \in R$ wegen $u \notin \mathfrak{p}$ bereits $r \in \mathfrak{p}$, also $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. Gilt $\mathfrak{p} \cap U \neq \emptyset$, so gibt es $u \in \mathfrak{p} \cap U$ und es gilt $ur \in \mathfrak{p}$ für alle $r \in R$, also $\bar{\mathfrak{p}} = R \neq \mathfrak{p}$.

(*ii*): Die Abbildung ι^* bildet Primideale auf abgeschlossene Primideale ab, nach Satz 2.53 und Satz 2.81, (*ii*). Sei $\mathfrak{p}$ ein abgeschlossenes Primideal von R. Nach (*i*) gilt $\mathfrak{p} \cap U = \emptyset$. Betrachte $R[U^{-1}]/\iota_*(\mathfrak{p})$. Nach Satz 2.81, (*iii*) gilt $R[U^{-1}]/\iota_*(\mathfrak{p}) \cong (R/\mathfrak{p})[\pi_\mathfrak{p}(U)^{-1}]$. Da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, ist $(R/\mathfrak{p})[\pi_\mathfrak{p}(U)^{-1}]$ mit $R/\mathfrak{p}$ wegen $0 \notin \pi_\mathfrak{p}(U)$ wegen $\mathfrak{p} \cap U = \emptyset$ nach Satz 2.82 ein Integritätsring. Dann ist auch $\iota_*(\mathfrak{p})$ ein Primideal.

(*iii*): Ist $\mathfrak{p}$ nicht abgeschlossen, so gilt $\mathfrak{p} \cap U \neq \emptyset$ nach (*i*). Für $u \in \mathfrak{p} \cap U$ folgt $u/1 \in \iota_*(\mathfrak{p})$, also enthält $\iota_*(\mathfrak{p})$ eine Einheit ist ist daher gleich $R[U^{-1}]$.

(*iv*): Sei $\mathfrak{m}$ ein abgeschlossenes maximales Ideal von R. Da $\mathfrak{m}$ ein Primideal ist, ist auch $\iota_*(\mathfrak{m})$ nach (*ii*) ein Primideal von R. Weiter ist $(R/\mathfrak{m})[\pi_\mathfrak{m}(U)^{-1}]$ mit $R/\mathfrak{m}$ wegen $0 \notin \pi_\mathfrak{m}(U)$ nach Satz 2.82 ein Körper. Wie in (*ii*) schließen wir, daß $R[U^{-1}]/\iota_*(\mathfrak{m})$ ein Körper und $\iota_*(\mathfrak{m})$ damit ein maximales Ideal ist. □

2.84 Beispiel. Sei $R = \mathbb{Z}$, $R[U^{-1}] = \mathbb{Z}[1/2]$ und $I = n\mathbb{Z}[1/2]$ mit $n \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$. Wir zerlegen $n = 2^v n_1$ mit n_1 ungerade. Dann gilt $I = n_1\mathbb{Z}[1/2]$, da $1/2$ eine Einheit in $\mathbb{Z}[1/2]$ ist. Unter Verwendung von ι^* für die Ideale von $\mathbb{Z}[1/2]$ und $\mathbb{Z}$ wie oben sieht man ebenfalls $\iota^*(n\mathbb{Z}[1/2]) = n_1\mathbb{Z}$ nach Aussage (*i*). Nach Aussage (*ii*) und Aussage (*iii*) ergibt sich dann beispielsweise $\mathbb{Z}[1/2]/n\mathbb{Z}[1/2] \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}$.

Zusammenfassend schließlich ein paar typische Situationen.

2.85 Definition. Sei R ein kommutativer Ring. Für ein Primideal $\mathfrak{p}$ ist $U = R \backslash \mathfrak{p}$ nicht-leer und multiplikativ abgeschlossen. Der Ring $R[U^{-1}]$ wird Lokalisierung von R an $\mathfrak{p}$ genannt und mit $R_\mathfrak{p}$ bezeichnet.

2.86 Satz. *Sei R ein kommutativer Ring. Für ein Primideal $\mathfrak{p}$ von R ist $R_\mathfrak{p}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$.*

Ist R ein Integritätsring, so ist das Nullideal $\{0\}$ ein Primideal von R und $R_{\{0\}}$ ein Körper.

Beweis. Wegen $1 \notin \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ ist $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ ein echtes Ideal von R. Sei $x/y \in R_\mathfrak{p} \backslash \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. Dann gilt $x \in R \backslash \mathfrak{p} = U$ und somit $y/x \in R_\mathfrak{p}$ nach Definition von $R_\mathfrak{p}$. Folglich $x/y \in R_\mathfrak{p}^\times$, so daß nach Satz 2.73 der Ring $R_\mathfrak{p}$ lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ ist.

Der Ring $R_\mathfrak{p}$ ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\{0\}$. Also gilt $R_\mathfrak{p}^\times = R_\mathfrak{p} \backslash \{0\}$ und $R_\mathfrak{p}$ ist damit nach Satz 2.73 ein Körper. □

2.87 Definition. Sei R ein Integritätsring. Der Körper $R_{\{0\}}$ wird Quotientenkörper von R genannt und mit $\mathrm{Quot}(R)$ bezeichnet.

2.88 Beispiel. Sei $R = \mathbb{Z}$. Der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}$ ist $\mathbb{Q}$. Für eine Primzahl p und das Primideal $\mathfrak{p} = p\mathbb{Z}$ gilt $R_\mathfrak{p} = \{x/y \mid x, y \in \mathbb{Z} \text{ und } p \nmid y\}$. Das maximale Ideal ist $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} = \{x/y \mid x, y \in \mathbb{Z} \text{ und } p \nmid y, p \mid x\}$.

Ein weiteres Beispiel ist $\mathbb{Z}[1/3] = \{x/3^i \mid i \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, x \in \mathbb{Z}\}$ oder $\mathbb{Z}[1/2, 1/3] = \{x/(2^i 3^j) \mid i, j \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, x \in \mathbb{Z}\}$. In beiden Ringen ist 3 eine Einheit mit unendlicher Ordnung. In $\mathbb{Z}[1/2, 1/3]$ sind die Einheiten 2 und 3 sogar unabhängig, das heißt $2^i 3^j = 1$ geht nur für $i = 0$ und $j = 0$.

2.89 Beispiel. Sei $R = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $U = \langle (1, 0) \rangle$. Um $R[U^{-1}]$ zu bestimmen, berechnen wir zuerst das Bild von R in $R[U^{-1}]$ unter ι_U. Es gilt $\ker(\iota_U) = \{r \in R \mid ur = 0 \text{ für ein } u \in U\} = \{0\} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Also ist $\iota_U(R) \cong R/\ker(\iota_U) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Da $\iota_U(U) \subseteq \iota_U(R)^\times$ gilt hier bereits $R[U^{-1}] = \iota_U(R)$. Für $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und $U = \langle 3, 0 \rangle$ ergäbe sich beispielsweise $R[U^{-1}] \cong \mathbb{Z}[1/3]$.

2.90 Beispiel. Enthält U ein nilpotentes Element, so folgt $0 \in U$ und es gilt $R[U^{-1}] = 0$.

2.91 Bemerkung. Für $U = \emptyset$ definieren wir noch $R[U^{-1}] = R$. Alle Sätze dieses Abschnitts gelten dann trivialerweise, wenn R ein kommutativer Ring ist (aber nicht alle gelten, wenn R nur ein kommutativer Halbring ist).

2.92 Bemerkung. Die meisten Aussagen dieses Abschnitts können für nicht kommutative Ringe R geeignet verallgemeinert werden, wenn man U stets aus dem Zentrum $Z(R) = \{x \in R \mid xy = yx \text{ für alle } y \in R\}$ von R wählt, wenn also die Elemente aus U mit allen Elementen von R kommutieren.