TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN Sommer 09
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: Prof. Dr. F. Heß
WM: G. Möhlmann
www.math.tu-berlin.de/~hess/algebra1-ss2009

12. Übung Algebra I

1. Aufgabe

Sei k ein Körper und $Aut_k(k[t])$ die Menge der k-Automorphismen von $k[t]$, also die Menge der Automorphismen von $k[t]$, die auf k eingeschränkt die Identität sind. Zeigt, dass für jedes $\phi \in Aut_k(k[t])$ gilt $\phi(t) = at+b$ mit $a, b \in k$. Wie lässt sich also ein beliebiges Element aus $Aut_k(k[t])$ beschreiben?

(5 Punkte)

2. Aufgabe

Sei k ein Körper mit $\mathrm{char}(k) = 0$ und $f \in k[t]$. Sei $f = \prod f_i^{e_i}$ die Faktorisierung von f. Dann gilt

$$\frac{f}{ggT(f, f')} = \prod_i f_i.$$

(4 Punkte)

3. Aufgabe

Sei $f = \sum a_i t^i \in \mathbb{Z}[t]$ ein Polynom und $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl. Ferner sei $\overline{f} = \sum \overline{a}_i t^i \in \mathbb{F}_p[t]$ wobei $\overline{a_i}$ das Bild von a_i unter der Restklassenabbildung von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ ist.

(a) Zeigt: Wenn f normiert und $\overline{f}$ irreduzibel in $\mathbb{F}_p[t]$ ist, dann ist f irreduzibel in $\mathbb{Z}[t]$.

(b) Gebt ein Beispiel dafür an, dass (a) nicht gilt, wenn f nicht normiert ist.

(c) Kann man (a) auf faktorielle Ringe verallgemeinern? Wie sieht dann der Beweis aus?

(6 Punkte)

4. Aufgabe

(a) Gebt alle irreduziblen Polynome vom Grad kleiner gleich 2 über $\mathbb{F}_2$ an.

(b) Welche der folgenden Polynome sind irreduzibel in $\mathbb{Q}[t]$?

(i) $t^2 + 5t + 1$
(ii) $t^2 + 5t + 6$
(iii) $t^3 + 39t - 4t + 8$
(iv) $3t + 9$

(5 Punkte)