Mathematik I für Informatiker WS 2006/07
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. M. Henk, Dr. M. Höding

Übungsaufgaben

Aufgabe 0.1 *Ermitteln Sie $x \in \mathbb{R}$ aus folgenden Gleichungen*

(a) $\log_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6$

(b) $(\lg x)^2 - \frac{9}{4}\lg x - 7 = 0$

(c) $\log_4\{2\log_3[1+\log_2(1+3\log_2 x)]\} = \frac{1}{2}$

(d) $\log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x - \log_{\frac{1}{3}} x = 6$

(e) $4^{x-2} - 17 \cdot 2^{x-4} + 1 = 0$

(f) $3\sqrt[x]{81} - 10\sqrt[x]{9} + 3 = 0$

(g) $5^{2x} - 3 \cdot 5^x + 2 = 0$

(h) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

Aufgabe 0.2 *Ermitteln Sie ebenfalls $x \in \mathbb{R}$ aus den folgenden Gleichungen und Ungleichungen*

(a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

(b) $x + 2\sqrt{x} - 3 = 0$

(c) $\sqrt{3x+7} - \sqrt{4-x} = 3$

(d) $\frac{x}{2-x} < 2$

(e) $|x-2| + |x+2| \leq 6$

Aufgabe 0.3 *Bestimmen Sie die Hauptwerte $0° \leq x < 360°$ folgender Gleichungen:*

(a) $2\sin^2 x = 3\cos x$

(b) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

Aufgabe 0.4 *Skizzieren Sie die folgenden Funktionen:*

(a) $y = e^{x-1}$

(b) $y = \ln(x-1)$

(c) $y = e^x - 1$

(d) $y = \ln\, x - 1$

(e) $y = 2\sin 3x$

(f) $y = 2 + \cos x$

Aufgabe 1.1 *Beschreiben Sie symbolisch unter Verwendung der Aussagen:*
A: Der Student hat die Modulprüfung bestanden.
B: Der Student hat mindestens 50 % der Übungsaufgaben gelöst.
C: Der Student hat fleißig studiert.
D: Der Student hat die Lehrveranstaltungen besucht.

(a) *Wenn der Student die Lehrveranstaltungen besucht und mindestens 50 % der Übungsaufgaben gelöst hat, hat er fleißig studiert und besteht die Modulprüfung.*

(b) *Der Student besteht die Modulprüfung genau dann, wenn er fleißig studiert, die Lehrveranstaltungen besucht und mindestens 50 % der Übungsaufgaben gelöst hat.*

(c) *Wenn der Student die Lehrveranstaltungen besucht hat, jedoch nicht fleißig studiert und nicht mindestens 50 % der Übungsaufgaben gelöst hat, besteht er die Modulprüfung nicht.*

Aufgabe 1.2 *Zeigen Sie, dass die folgenden Aussageverbindungen immer wahr sind mithilfe einer Wahrheitstabelle:*

(a) $(\overline{A \wedge B}) \Leftrightarrow (\overline{A} \vee \overline{B})$

(b) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Aufgabe 1.3 *Untersuchen Sie, ob folgende Objekte Mengen sind und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Mächtigkeit:*

(a) $\{n \in \mathbb{N} : 2, 4, \ldots, 2n\}$

(b) $\{1, 3, 5, 6, 7, 9, \ldots\}$

(c) $\{1, 3, 5, 6, 7\}$

(d) {*„grün", „blau", „gelb"*}

(e) $\{\emptyset\}$

(f) $\{1, \{1, 2\}\}$

Aufgabe 1.4 *Gegeben seien die Mengen*

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : \tfrac{x+4}{x+1} < 3\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R} : \tfrac{1}{|2-x|} < \tfrac{1}{3-2x}\} \\ C &= \{x \in \mathbb{R} : |\sin 2x| \geq \tfrac{1}{2}\}. \end{aligned}$$

Ermitteln Sie $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap B$, $B \cap C$, $A \backslash B$, $B \backslash A$ *und* $B \backslash C$.

Aufgabe 1.5 *Bestimmen Sie die Potenzmenge der Menge* $A = \{a, b, c\}$ *und die Potenzmenge der Potenzmenge der Menge* $B = \{0, 1\}$. *Gibt es Potenzmengen der Mächtigkeit 1 oder 2?*

Aufgabe 1.6 *Beweisen Sie oder widerlegen Sie folgende Aussagen:*

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : n^3 - n$ *ist durch 6 teilbar*

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : (n-1)^2 + n + 40$ *ist eine Primzahl*

(c) $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1, \forall a \in \mathbb{R}, a > -1 : (1+a)^n \geq 1 + na$

Hinweis: Gelten die Aussagen, dann lassen sie sich auch durch vollständige Induktion beweisen!

Aufgabe 1.7 *Beweisen Sie mithilfe der vollständigen Induktion:*

$$\sum_{i=1}^{K} i \cdot i! = (K+1)! - 1$$

Aufgabe 2.1 *Untersuchen Sie, welche der folgenden Relationen über der Menge* M *reflexiv, symmetrisch, transitiv sind. Welche Relationen sind Äquivalenzrelationen?*

(a) $M = \mathbb{Z} : xRy \Leftrightarrow x - y$ *ist durch* 3 *teilbar*

(b) $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash \{0\} : (a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

(c) $M = \mathbb{N} : R = \{(a, b, c) : a < b < c\}$

(d) M *ist die Potenzmenge einer Menge* A: $A_1 R\, A_2 \Leftrightarrow A_1 \cap A_2 = A_1$

Aufgabe 2.2 *Sei* E *die Menge der Eigenschaften Reflexivität Re, Symmetrie Sy und Transitivität Tr, d. h.* $E = \{Re, Sy, Tr\}$. *Geben Sie zu jedem Element* X *der Potenzmenge von* E *ein Beispiel einer binären Relation* R *über der Menge* $M = \{1, 2, 3, 4\}$ *an, die die Eigenschaften aus* X *besitzt, jedoch nicht die Eigenschaften aus* $E \backslash X$ *hat.*
Erläuterung: Gilt z. B. $X = \{Re\}$, *so ist eine binäre Relation* R *über* M *gesucht, die reflexiv, aber nicht symmetrisch und nicht transitiv ist.*

Aufgabe 2.3 *Untersuchen Sie, ob folgende binäre Relationen Äquivalenzrelationen über der Menge* X *sind und veranschaulichen Sie gegebenenfalls die Äquivalenzklassen:*

(a) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq 0\} : (x_1 y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$

(b) $X = \mathbb{R} : xRy \Leftrightarrow [x] = [y]$, *wobei* $[z]$ *die größte ganze Zahl* K *mit* $K \leq Z$ *bedeutet*

(c) $X = \mathbb{N} : xRy \Leftrightarrow x$ *ist das Quadrat von* y

(d) X *sei die Menge aller Geraden* g *in der Ebene:* $g_1 R\, g_2 \Leftrightarrow g_1 \cap g_2 = \emptyset$ *oder* $g_1 = g_2$

Aufgabe 2.4 *Gegeben sei eine Zerlegung* $M_1 = \{5\}, M_2 = \{3, 4\}$, $M_3 = \{1, 2\}$ *der Menge* $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *in Äquivalenzklassen.*

(a) *Prüfen Sie, ob diese Zerlegung eine Klasseneinteilung ist.*

(b) *Geben Sie die zugehörige Äquivalenzrelation* R *auf der Menge* M *an.*

Aufgabe 2.5 *Ein Bit ist ein Element der Menge* $M = \{0, 1\}$*. Ein Bit-String der Länge* n *ist ein Element aus* M^n*.*
Zwei Bit-Strings gleicher Länge stehen genau dann in Relation R*, wenn sie die gleiche Anzahl an Einsen enthalten.*

(a) *Zeigen Sie, dass* R *eine Äquivalenzrelation ist.*

(b) *Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen zu* 1101, 1011 *und* 1111.

Aufgabe 3.1 *Untersuchen Sie, welche der folgenden Relationen über der Menge* I *Äquivalenzrelationen, partielle bzw. totale Ordnungsrelationen sind:*

(a) $I = \{1, 2, 3\} : R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$

(b) $I = \mathbb{Z} : z_1\ R\ z_2 \Leftrightarrow |z_1| \leq |z_2|$

(c) I *sei die Potenzmenge einer Menge* A*:* $A_1\ R\ A_2 \Leftrightarrow A_1 \cap A_2 = A_1$

(d) I *sei die Menge aller Buchstaben im Alphabet:* $b_1\ R\ b_2 \Leftrightarrow b_1$ *hinter* b_2 *im Alphabet steht oder* b_1 *der gleiche Buchstabe wie* b_2 *ist*

Aufgabe 3.2 *Gegeben seien die Mengen* $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *und* $B = \mathbb{R} \times \{1\}$*, die Relation* R *mit* $(a_1, b_1)\ R\ (a_2, b_2) \Leftrightarrow \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \leq \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$*. Untersuchen Sie, ob* R *über* A *und* B *die Eigenschaften einer partiellen bzw. totalen Ordnungsrelation erfüllen.*

Aufgabe 3.3 *Bestimmen Sie von den folgenden binären Relationen* $F \subseteq M_1 \times M_2$ *Definitions- und Wertebereich. Welche der Relationen sind Abbildungen?*

(a) $M_1 = \{1, 2, 3, 4\},\ M_2 = \{a, b, c, d\} : F = \{(1, a), (1, c), (4, e)\}$

(b) $M_1 = M_2 = \mathbb{R} : F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x+1}{x-1}\}$

(c) $M_1 = M_2 = P(A)$ - *Potenzmenge einer beliebigen Menge* A*:*
$F = \{(B, \bar{B}) \in P(A) \times P(A) : \bar{B} = A \backslash B\}$

Aufgabe 3.4 *Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen $f : X \to Y$ auf ihre Eigenschaften:*

(a) $X = [0, 1],\ Y = [-\frac{1}{8}, 1],\ f(x) = 2x^2 - x$

(b) $X = [1, 2],\ Y = [1, 3],\ f(x) = |x|$

(c) $X = [-1, 1],\ Y = [0, 1],\ f(x) = |x|$

Aufgabe 4.1 *Sei $f_1(x) = 4x^2 + 3$, und sei $f_2(x) = \sqrt{x}$.*

(a) Bestimmen Sie jeweils für f_1 und f_2 den größten Definitionsbereich X und zugehörigen kleinsten Wertebereich Y, so dass f_1 und f_2 Abbildungen sind, sowie, falls vorhanden, die inversen Abbildungen.

(b) Untersuchen Sie f_1 und f_2 auf ihre Eigenschaften (Surjektivität, Injektivität, Bijektivität).

(c) Bestimmen Sie von den Kompositionen $f_1 \circ f_2$ und $f_1 \circ f_2$ Definitions- und Wertebereich, ihre Eigenschaften und , wenn möglich, die inversen Abbildungen

Aufgabe 4.2 *(a) Stellen Sie die Graphen von $f_1, f_2, f_1 \circ f_2$ und $f_2 \circ f_1$ aud Aufgabe 4.1 in einem x-y-Koordinatensystem dar.*

(b) Bestimmen Sie die Bildmenge von $\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 4\}$ und die Urbildmenge von $\{4, 24\}$ der Funktionen $f_2, f_2 \circ f_1$ und $(\ f_1 \circ f_2)^{-1}$.

Aufgabe 4.3 *Zeigen Sie, dass die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ gleichmächtig zur Menge der geraden natürlichen Zahlen ist.*

Aufgabe 4.4 *Seien* $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 & 10 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$,

$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 5 & 1 & 10 & 8 & 3 & 4 & 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ *und*

$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 10 & 9 & 7 & 5 & 6 & 8 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *Permutationen aus S_{10}.*

(a) Bestimmen Sie die Kompositionen $\sigma_2 \circ \sigma_3$, $\sigma_3 \circ \sigma_2$, $(\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3$, und $\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3)$. Welche Vermutung schließen Sie daraus?

(b) *Bestimmen Sie* $\sigma_2^{-1} \circ \sigma_3^{-1}$, $(\sigma_2 \circ \sigma_3)^{-1}$ *und* $(\sigma_3 \circ \sigma_2)^{-1}$.

Aufgabe 4.5 *Eine Permutation* $\sigma \in S_n$ *heißt* r*-zyklische Permutation, wenn es eine* r*-elementige Teilmenge* $\{k_1, k_2, \dots, k_r\}$ *von* $N = \{1, 2, \dots, n\}$ *gibt, so dass gilt:*

$\sigma(k_r) = k_1,\ \sigma(k_i) = k_{i+1}$ *für* $i = 1, 2, \dots, r-1$
und $\sigma(k) = k$ *für* $k \in N \setminus \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$.

Verkürzt schreibt man dann $\sigma = (k_1, \dots, k_r)$.

Beispielsweise ist in S_6 *die Permutation* $\sigma = (1, 2, 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Weiterhin läßt sich beweisen, dass sich jede Permutation $\sigma \in S_n$ *als Komposition* $\circ$ *elementefremder zyklischer Permutation darstellen lässt.*

(a) *Stellen Sie die folgenden Permutationen in* S_5 *als Kompositionen von zyklischen Permutationen dar:*
$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) *Stellen Sie folgende zyklische Permutationen in* S_5 *in ausführlicher Schreibweise dar:* $\sigma_3 = (2, 4, 3, 5)$, $\sigma_4 = (2, 4, 5)(3, 1)$

Aufgabe 4.6 *Bestimmen sie für die in Aufgabe 4.5 gegebenen Permutationen* $\sigma_1, \sigma_4, \sigma_3$ *und* σ_4, *die Kompositionen* $\sigma_1 \circ \sigma_2$, $\sigma_3 \circ \sigma_4$, $\sigma_3 \circ \sigma_2$ *und* $\sigma_4 \circ \sigma_1$ *sowohl in ausführlicher als auch in Zyklenschreibweise.*

Aufgabe 5.1 *Zwölf Bücher werden zufällig in ein Regal eingeräumt. Wie groß ist die Anzahl der Möglichkeiten dafür, dass drei bestimmte Bücher nebeneinander stehen?*

Aufgabe 5.2 *Ein (innen weißer) Würfel wird an allen Seiten schwarz angestrichen. Der Würfel wird in* 1000 *kleine Würfel einheitlicher Größe zerlegt. Diese* 1000 *Würfel werden intensiv durchgemischt. Wieviele Möglichkeiten gibt es, dass ein zufällig entnommener kleiner Würfel*

(a) *genau eine schwarze Fläche hat,*

(b) *genau* 2 *schwarze Flächen hat,*

(c) *genau* 3 *schwarze Flächen hat,*

(d) *völlig weiß ist.*

Aufgabe 5.3 *Wie viele Verbindungsgeraden von* 7 *Punkten einer Ebene sind höchstens möglich, wenn*

(a) *keine 3 Punkte in ein und derselben Geraden,*

(b) *4 Punkte in einer ersten und 3 Punkte in einer zweiten Geraden liegen?*

Aufgabe 5.4 *Eine Lieferung von 30 Computern, die durch ihre Fabrikationsnummer unterscheidbar sind, enthält 6 fehlerhafte Geräte.*

(a) *Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 Computer aus der Lieferung zu prüfen?*

(b) *Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 Computer aus der Lieferung zu prüfen, die genau zwei fehlerhafte Computer enthalten?*

(c) *Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 Computer aus der Lieferung zu prüfen, die höchstens ein fehlerhaftes Stück enthalten?*

Aufgabe 5.5 *Bestimmen Sie mithilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 250179 und 449094.*

Aufgabe 5.6 *In der Menge aller Polynome P mit $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ vom Grade höchstens n ist die Division (Polynomdivision) mit Rest erklärt und der Euklidische Algorithmus ist anwendbar.*
Bestimmen Sie mithilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von $P_1(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 - x + 4$ und $P_2(x) = x^3 + x^2 + x - 3$.

Aufgabe 6.1 *Gegeben sei die Menge M der Abbildungen*

$$f_i : \mathbb{R}\backslash\{1,0\} \to \mathbb{R}\backslash\{1,0\};\ i = 1,2,\ldots,6$$

mit

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = 1-x,\ f_3(x) = \frac{1}{x},\ f_4(x) = \frac{1}{1-x},\ f_5(x) = \frac{x-1}{x} \text{ und } f_6(x) = \frac{x}{x-1}.$$

(a) *Stellen Sie für die Menge M mit der Komposition $\circ$ als Operation eine Verknüpfungstafel auf.*

(b) *Welche Eigenschaften hat $(M, \circ)$?*

Aufgabe 6.2 *Sei $K = \{k + l\sqrt{5} : k, l \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie, dass $(K; +)$ eine kommutative Gruppe ist.*

Aufgabe 6.3 *Stellen Sie die Verknüpfungstafeln für $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ und $(\mathbb{Z}_6\backslash\{[0]_6\}, \odot)$ auf und untersuchen Sie diese auf Gruppeneigenschaften.*

Aufgabe 6.4 *Stellen Sie die Verknüpfungstafel für $(S_3, \circ)$ auf und prüfen Sie die Gruppeneigenschaften.*

Aufgabe 6.5 *Gegeben seien* $z_1 = 2 + 3i$ *und* $z_2 = 3 - 5i$. *Berechnen Sie* $z_1 + z_2,\ z_1 - z_2,\ z_1 \cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2},\ \bar{z}_2 \cdot z_1,\ z_2 \cdot \bar{z}_2,\ |z_2|$.

Aufgabe 6.6 *Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen:*

(a) $z = \frac{3+2i}{1+i}$

(b) $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$

(c) $z = \frac{(5+i)(2-3i)+2i^5}{(2+3i)^2-(4+i^7)}$

Aufgabe 7.1 *Geben Sie alle komplexen Zahlen* $z \in \mathbb{C}$ *an, die*

$$z^2 = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$$

erfüllen.

Aufgabe 7.2 *Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der Gaußschen Zahlenebene:*

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 3\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 3i| < 1\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} : |z - (3 + 2i)| = 1\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C} : 2 \leq |z - 1| \leq 4\}$

(e) $\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{3-4i}{z-1+2i}\right| < 5\}$.

Aufgabe 7.3 *Geben Sie* $z_1 = -1 + i$ *und* $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ *in Polardarstellung an und berechnen Sie* z_1^4 *und* z_2^5.

Aufgabe 7.4 *Lösen Sie die folgenden Gleichungen:*

(a) $z^2 - 6z + 13 = 0$

(b) $z^4 = \sqrt{3}i - 1$

(c) $(1 - i)z^3 = 8i$

Aufgabe 7.5 *Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystems in* $\mathbb{C}$*:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & ix_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & ix_2 & + & 3ix_3 & = & 3 \\ ix_1 & + & (2i-2)x_2 & & & = & i+2 \end{array}$$

Aufgabe 7.6 *Gegeben seien*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie, ob die zu (A, a) *und* (B, b) *gehörenden linearen Gleichungssysteme eindeutig lösbar sind.*

Aufgabe 8.1 *Für welche Werte von* $\lambda \in \mathbb{R}$ *hat das Gleichungssystem über dem Körper der reellen Zahlen*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 4y & + & 4z & = & 2 \\ 3x & + & 2y & + & 3z & = & 3 \\ 5x & + & 5y & + & \lambda z & = & 4 \end{array}$$

(a) genau eine Lösung

(b) keine Lösung

(c) mehrere Lösungen?

Geben Sie die Lösungen in Abhängigkeit von λ *an.*

Aufgabe 8.2 *Gegeben sei das Gleichungssystem* $Ax = b$ *über dem Körper* $\mathbb{K}$ *mit*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & \alpha \\ 1 & \alpha & 3 \end{bmatrix} \text{ und } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. *Für welche* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gibt es*

  (i) genau eine Lösung

  (ii) unendlich viele Lösungen

  (iii) keine Lösung?

(b) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$. *Für welche* $\alpha \in \mathbb{Z}_5$ *gibt es*

  (i) genau eine Lösung

  (ii) unendlich viele Lösungen

  (iii) keine Lösung?

Aufgabe 8.3 *Gegeben ist das Gleichungssystem über dem Körper* $\mathbb{C}$ *der komplexen Zahlen*

$$\begin{array}{rcrcrcr} ix & - & y & + & z & = & 2i \\ x & + & 2iy & + & 3iz & = & 1 \\ -x & - & iy & + & \alpha z & = & \beta \end{array}$$

(a) Untersuchen Sie die Lösbarkeit des Gleichungssystems in Anhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(b) Geben Sie die Lösung im Falle der eindeutigen Lösung an.

Aufgabe 8.4 *Gegeben seien die Matrizen*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie, sofern die Ausdrücke erklärt sind:
$A + 2C,\; A \cdot B,\; B \cdot A,\; C \cdot B,\; (A + C) \cdot B.$

Aufgabe 8.5 *Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt orthogonal, wenn gilt $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n$. Untersuchen Sie für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgende Matrizen auf Orthogonalität:*

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Aufgabe 8.6 *Gegeben sei die Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & \lambda \\ 6 & \lambda & -27 \end{bmatrix}.$$

(a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert A^{-1} nicht?

(b) Ermitteln Sie für $\lambda = 0$ die inverse Matrix.

Aufgabe 9.1 *Gegeben sei das Gleichungssystem*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & (a+1)\,x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ a\,x_1 & & & + & b\,x_3 & = & -2 \end{array}$$

(a) Für welche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ hat das Gleichungssystem keine Lösung?

(b) Bestimmen Sie im Falle $b = 1$ alle Lösungen in Abhängigkeit von a.

Aufgabe 9.2 *Bestimmen Sie, falls sie existieren, die inversen Matrizen zu*

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Aufgabe 9.3 *Schreiben Sie folgendes System als Matrizengleichung und ermitteln Sie den Lösungsvektor:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} b_1 & = & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 \\ b_2 & = & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\ b_3 & = & 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 \end{array}$$

Aufgabe 9.4 *Bestimmen Sie die Matrix* $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *aus den Gleichungen mit* $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$*:*

(a) $AXB = C$

(b) $ABCX = D$

(c) $XA - XC = B + 4X$

(d) $2(XA + XB) = 2X + C$

Aufgabe 9.5 *Bestimmen Sie die Lösung* X *der Matrizengleichung* $A + 3(X - A - I_2) = 2B + X - I_2$

(a) *allgemein für* $A, B, X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

(b) *für* $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

Aufgabe 9.6 *Zeigen Sie, dass* $(\mathbb{R}_{>0}; \oplus, \odot)$ *mit der Vektoraddition*

$a \oplus b = a \cdot b$ *für alle* $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$

und der Skalarmultiplikation

$\lambda \odot a = a^\lambda$ *für alle* $a \in \mathbb{R}_{>0}$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$

ein Vektorraum über dem Körper $(\mathbb{R}; +, \cdot)$ *ist.*

Aufgabe 10.1 *Prüfen Sie, ob die folgenden Mengen Unterräume von* $\mathbb{R}^2$ *sind.*

(a) $M_1 = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x + y - 1 = 0\}$

(b) $M_2 = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^3 - y^3 = 0\}$

(c) $M_3 = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}$

(d) $M_4 = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : 4x(14y - 4x) = 49y^2\}$

Aufgabe 10.2 *Gegeben sei der Vektorraum* $\mathbb{P}_2$ *aller Polynome vom Grade höchstens 2 über dem Körper der reellen Zahlen. Geben Sie an:*

(a) *zwei linear unabhängige Vektoren,*

(b) *eine Basis,*

(c) *ein Erzeugendensystem, dass keine Basis ist.*

Aufgabe 10.3 *Sei* $V = \{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } f(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x} : A \in \mathbb{R}^{2\times 3}\}$*, d.h.* V *ist die Menge aller Abbildungen* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$*, die sich darstellen lassen als* $f(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$ *für eine* 2×3*-Matrix* A*.*

1) *Zeigen Sie, dass* V *ein* $\mathbb{R}$*-Vektorraum ist mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation von Funktionen.*

2) *Geben Sie eine Basis von* V *an.*

3) *Zeigen Sie, dass* $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 6$*.*

Aufgabe 11.1 *Überprüfen Sie, ob folgende Matrizen des Vektorraumes* $\mathbb{R}^{2\times 2}$ *linear unabhängig sind:*

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

Entscheiden Sie für den Fall der linearen Unabhängigkeit, ob es sich um eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^{2\times 2}$ *handelt.*

Aufgabe 11.2 *Zeigen Sie, dass die Menge* $E = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *mit*
$v_1 = (1,2,3,4)^T, v_2 = (2,0,1,-1)^T, v_3 = (-1,0,0,1)^T$ *und* $v_4 = (0,2,3,0)^T$
ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$ *ist. Ergänzen Sie die Mengen* $\{(0,4,5,9)^T, (3,3,3,1)^T\}$ *durch Vektoren aus* E *zu einer Basis von* $\mathbb{R}^4$*.*

Aufgabe 11.3 *Gegeben seien:* $x = (3, -1, -2, -1)^T, b_1 = (1, 1, -1, 0)^T$, $b_2 = (-1, 2, 0, 1)^T, b_3 = (1, -1, 0, 1)^T$ *und* $b_4 = (1, 1, -2, -1)^T$.
Zeigen Sie, dass $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ *eine Basis* B *des* $\mathbb{R}^4$ *bilden und stellen Sie* x *als Linearkombination von* B *dar.*

Aufgabe 11.4 *Sei* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *eine lineare Abbildung für die gilt:*

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die zu f *gehörende Abbildungsmatrix* A *mit* $f(x) = Ax$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 11.5 *Sei* $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ *eine durch* $f(x) = Ax$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^5$ *definierte Abbildung mit*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Basis von Bild f *und eine Basis von Kern* f *an.*

Aufgabe 11.6 *Sei* H *die Hyperebne im* $\mathbb{K}^n$ *gegeben durch*

$$H = \left\{ (k_1, \dots, k_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{K}^n : \sum_{i=1}^{n} k_i = 0 \right\}.$$

Weiterhin sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ *die lineare Abbildung mit* $f((k_1, \dots, k_n)^\mathsf{T}) = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i$.

(a) *Bestimmen Sie Kern* (f) *und Bild* (f).

(b) *Bestimmen Sie* $\dim H$, $\dim$ *Kern* (f) *und* $\dim$ *Bild* (f).

(c) *Bestätigen Sie* $\dim \mathbb{K}^n = \dim$ *Bild* $(f) + \dim$ *Kern* (f).

Aufgabe 12.1 *Sei* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *eine lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) *Liegt* $a = (1, 0, 0)^T$ *in Bild* (f)*?*

(b) *Bestimmen Sie Kern(f).*

(c) *Ist f surjektiv, injektiv bzw. bijektiv?*

Aufgabe 12.2 *Sei* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *eine bijektive lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass das Bild einer Geraden wieder eine Gerade ist.*

Aufgabe 12.3 *Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Eckpunkten* $A(2,-1,3)$, $B(1,1,1)$ *und* $C(0,0,5)$.

(a) *Bestimmen Sie den Winkel* $\measuredangle BAC$.

(b) *Bestimmen Sie den Vektor der Höhe des Dreiecks, die auf der Seite* $\overline{AB}$ *steht.*

Aufgabe 12.4 *Sei* $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ *mit*

$$v = \begin{pmatrix} \sin\psi\,\cos\phi \\ \sin\psi\,\sin\phi \\ \cos\psi \end{pmatrix}.$$

Man bestimme die Matrix $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, *die die Rotation um die Achse* $\{\lambda\, v : \lambda \in \mathbb{R}\}$ *mit Winkel* θ *in homogenen Koordinaten beschreibt.*

Aufgabe 12.5 *Gegeben sind die Vektoren* $a = (a_1, a_2, a_3)$ *und* $b = (b_1, b_2, b_3)$ *aus dem* $\mathbb{R}^3$. *Man zeige, dass*

$$a\times b = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} e_1 - \det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} e_2 + \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} e_3$$

einen Vektor $c = (c_1, c_2, c_3)$ *liefert, der orthogonal zu a und b ist.*

Aufgabe 13.1 (a) *Bilden Sie ein Orthonomalsystem mit den Spaltenvektoren der Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) *Zeigen Sie, dass für die aus den orthonomalen Spaltenvektoren gebildete orthogonale Matrix Q gilt:* $\langle Qx, Qy\rangle = \langle x, y\rangle$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 13.2 *Sei im Vektorraum* $\mathbb{P}_2$ *der Polynome vom Höchstgrad 2 mit* $\langle p, q\rangle = \int\limits_0^1 p(x)q(x)dx$ *für alle* $p, q \in \mathbb{P}_2$ *ein Skalarprodukt definiert, wobei* $\int\limits_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$ *gilt. Weiterhin sei* $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ *und* $p_3(x) = x^2$. *Orthonormieren Sie die Vektoren* p_1, p_2 *und* p_3.

Aufgabe 13.3 *Berechnen Sie die Determinaten der folgenden Matrizen:*

(a) $\begin{pmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{pmatrix}$ *(b)* $\begin{pmatrix} 1+\cos x & 1+\sin x & 1 \\ 1-\sin x & 1+\cos x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *(c)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 13.4 *Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt:*

(a) $\det \begin{pmatrix} x & -1 & x \\ -1 & x & x \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix} = 0$ *(b)* $\det \begin{pmatrix} x+1 & 1 & 2 \\ 2 & x & -1 \\ 3 & 1 & x \end{pmatrix} = 2$

Aufgabe 13.5 *Für $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ sei*

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Man zeige: $V(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$.

$V(x_1, \ldots, x_n)$ *heißt* Vandermondsche Determinante.