Mathematik IV für Informatiker (CV) SS 2011 **Übung 12**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 12.1 *Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:*

(a) $y'' + 2ay' + a^2y = 0$ *mit* $a \in R$,

(b) $4\frac{d^2\varphi}{d\varphi^2} + \varphi = 0$.

Aufgabe 12.2 *Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:*

(a) $4y^{(4)} - 3y'' - y = 0$,

(b) $y''' + 3ay'' + 3a^2y' + a^3y = 0$ *mit* $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 12.3 *Lösen Sie folgende Randwertprobleme:*

(a) $y'' + 4y' = 0$ *mit* $y(\ln 2) = 0$ *und* $y'(\ln 2) = -1$,

(b) $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 2s = 0$ *mit* $s(0) = 1$ *und* $s'(0) = 1$.

Aufgabe 12.4 *Gegeben sei die Differentialgleichung* $xy'' + 2y' - 10x = 0$.

(a) *Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.*

(b) *Bestimmen Sie durch Variation der Konstanten eine spezielle Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung.*

Aufgabe 12.5 *In einem Stromkreis mit dem Widerstand R, der Selbstinduktion L und der elektromagnetischen Kraft E genügt die Stromstärke I der Differentialgleichung*

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E.$$

Man löse das Anfangswertproblem für $I = 0$ *zum Zeitpunkt* $t = 0$ *unter der Bedingung, dass R und L konstant sind und E als zeitlich linear anwachsende Größe* $E = k \cdot t$ *betrachtet wird.*

Aufgabe 12.6 *Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:*

(a) $y'' - 4y = 8x^3$,

(b) $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

Votierungswoche: 04.07 - 08.07.2011

Mathematik IV für Informatiker (CV) SS 2011 **Übung 11**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 11.1 *Lösen Sie folgende Differentialgleichungen durch Separation der Variablen:*

(a) $x + xy + y'(y + xy) = 0$

(b) $\dot{r}\varphi^2 + r - 4 = 0$ *mit* $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}$

(c) $y'\sqrt{a^2 + x^2} - y = 0$ *mit* $a \in \mathbb{R}$

Aufgabe 11.2 *Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme:*

(a) $y' - 2\sqrt{y}\ln x = 0$ *mit* $y(e) = 1$

(b) $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy$ *mit* $y(0) = 1$

Aufgabe 11.3 *Lösen Sie die Gleichungen:*

(a) $(x^2 + x)y' = 2y + 1$

(b) $\dot{r} + r\tan\varphi = 0$ *mit* $r(\pi) = 2$

Aufgabe 11.4 *Bestimmen Sie alle Funktionen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, die folgendes erfüllen:*

- *Der Berührungspunkt jeder Tangente von* f *halbiert die Strecke zwischen den Schnittpunkten dieser Tangente mit den Koordinatenachsen.*
- f *geht durch den Punkt* $P(-1, 1)$*.*

Aufgabe 11.5 *Gegeben sei die Gleichung* $\tan\varphi = \frac{y^2}{\sqrt{1-x}}$.

(a) *Bestimmen Sie alle Funktionen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = y$*, die der Gleichung genügen, wenn* φ *den Anstiegswinkel der Tangente an einen beliebigen Punkt* $P(x, y)$ *an die Funktion* f *bezeichnet.*

(b) *Welche der unter (a) ermittelten Funktionen geht durch den Punkt* $P_0(0, \frac{1}{2})$*?*

Votierungswoche: 27.06. - 01.07.2011

Mathematik IV für Informatiker (CV) SS 2011 **Übung 10**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 10.1 *Bestimmen Sie die reellen Lösungen der Gleichung*

$$5 - \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{97 - x} \qquad (*),$$

indem Sie das Gleichungssystem lösen, deren beide Gleichungen Sie durch die Substitutionen $y = \sqrt[4]{x}$ *und* $z = \sqrt[4]{97-x}$ *in* $(*)$ *und die Bestimmung von* $y^4 + z^4$ *erhalten.*

Aufgabe 10.2 *Bestimmen Sie alle reellen Lösungen folgender Gleichungssysteme:*

(a) $x^4 - x^3 + y^4 - y^3 + z^4 - z^3 - xyz = -1$
$x + y + z = 1$

(b) $x^2 + y^2 - xy = 7$
$x^3 + y^3 - 6xy = -1$

Aufgabe 10.3 *Zeigen Sie, dass die Funktion* $s : D \to \mathbb{R}$ *mit* $s(t) = \frac{1}{t \ln ct}; c \in \mathbb{R}$ *der Gleichung* $t\frac{ds}{dt} + s = -ts^2$ *genügt.*

Aufgabe 10.4 *Gegeben sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) = (c_1 - \ln \sqrt{1 + e^{2x}})e^x + (c_2 + \arctan e^x)e^{2x}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $f(x)$ *die Gleichung* $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}$ *erfüllt.*

Aufgabe 10.5 *Bestimmen Sie die Funktionen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $y = f(x)$, *die folgende Gleichungen der Form* $y' = \frac{dy}{dx} = F(x, y)$ *erfüllen, indem Sie* $F(x, y)$ *in ein Produkt aus* $h(y)$ *und* $g(x)$, *also* $F(x, y) = h(y) \cdot g(x)$ *zerlegen und die Gleichung* $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$ *nach* y *auflösen:*

(a) $y' = \frac{y}{x}$

(b) $y' = -\frac{x+xy}{y+xy}$

Votierungswoche: 20.06. - 25.06.2011

Mathematik IV für Informatiker (CV) SS 2011 **Übung 9**
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 9.1 *Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit*

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ 16 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(a) *Prüfen Sie die Diagonaldominanz der Matrix A.*

(b) *Führen Sie zwei Iterationsschritte des Jacobi-Verfahrens mit dem Startvektor $x = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ durch.*

Aufgabe 9.2 *Gegeben sei das Gleichungssystem aus Aufgabe 9.1.*

(a) *Führen Sie zwei Iterationsschritte des Gauß-Seidel-Verfahrens mit dem Startvektor $x = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ durch.*

(b) *Vergleichen Sie das Ergebnis aus Aufgabe 9.1(b) mit dem Ergebnis aus (a).*

Aufgabe 9.3 *Gegeben sei das Lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ -4 & 10 & -1 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \\ 22 \end{bmatrix}.$$

(a) *Untersuchen Sie die Matrix A auf Diagonaldominanz.*

(b) *Führen Sie einen Iterationsschritt des Jacobi-Verfahrens mit dem Startvektor $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^T$ durch.*

(c) *Überprüfen Sie die Güte der unter (b) erhaltenen Näherungslösung.*

Aufgabe 9.4 *Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x - \cos x$.*

(a) *Bestimmen Sie ein Intervall $[a, b]$ in dem die Nullstelle der Funktion $f(x)$ liegt.*

(b) *Bestimmen Sie einen Näherungswert für die Nullstelle mithilfe des Newtonverfahrens auf 4 Stellen genau.*

(c) *Bestimmen Sie einen Näherungswert für die Nullstelle mithilfe des Sekantenverfahrens auf 4 Stellen genau und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus (b).*

Aufgabe 9.5 *Zur näherungsweisen Bestimmung von* $\sqrt{2}$ *kann man das Newton-Verfahren zur Ermittlung der Nullstelle von* $f(x) = x^2 - 2$ *auf dem Intervall* $I = [1, 2]$ *heranziehen. Wie viele Iterationsschritte sind nötig, damit der Fehler* $\frac{1}{512}$ *nicht übersteigt? (Verwenden Sie Satz 22.34).*

Aufgabe 9.6 *Untersuchen Sie folgende Polynome* $p(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}[x, y, z]$ *auf Symmetrie und bestimmen Sie gegebenenfalls ein Polynom* $g(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}[x, y, z]$ *mit* $p(\mathbf{x}) = g(\sigma_1(\mathbf{x}), \sigma_2(\mathbf{x}), \sigma_3(\mathbf{x}))$*:*

(a) $p(\mathbf{x}) = 2x^3 + 2y^3 + 2z^3 - 3x^2y - 3x^2z - 3xy^2 - 3y^2z - 3yz^2$,

(b) $p(\mathbf{x}) = x^2z^2 + 2xyz + 5y^2z^2$,

(c) $p(\mathbf{x}) = 1 + 3xyz + x^2 + y^2 + z^2$,

(d) $p(\mathbf{x}) = x^4 + y^4$

Aufgabe 9.7 *Bestimmen Sie mithilfe von Satz 22.42 alle Lösungen (in* $\mathbb{C}$*) des Gleichungssystems:*

$$\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & 4 \\ x^3 + y^3 & = & 8 \end{array}.$$

Aufgabe 9.8 *Gegeben seien die Polynome* $p_1(x, y) = x^2 + xy + 2x + y - 1$ *und* $p_2(x, y) = x^2 - y^2 + 3x + 2y - 1$.

(a) *Bestimmen Sie die Sylvester-Matrix* $S(p_1, p_2, y)$.

(b) *Für welche* $x \in \mathbb{R}$ *ist Res*$(p_1, p_2, y) = 0$*?*

Votierungswoche: 14.06. - 17.06.2011

Mathematik IV für Informatiker (CV) SS 2011 **Übung 8**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 8.1 *Gegeben seien die Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie für A und B eine QR-Faktorisierung an.

Aufgabe 8.2 *Gegeben seien*

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie eine QR-Faktorisierung der Matrix A.

ii) Finden Sie die Lösung des linearen Ausgleichsproblems $\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|$.

Aufgabe 8.3 *Bestimmen Sie die QR-Faktorisierung folgender Matrix:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8.4 *Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mithilfe einer QR-Faktorisierung:*

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -1 & \frac{5}{6} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{31}{30} \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 8.5 *Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mithilfe einer QR-Faktorisierung:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 4 \\ -4 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 60 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 8.6 *Die Parameter a und b der sogenannten Regressionsgeraden $y = ax + b$ sollen aus den in folgender Tabelle aufgenommenen Messdaten $(y_i, x_i); i = 1, \ldots, 4$ ermittelt werden:*

x_i	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$
y_i	$4,0$	$4,2$	$4,4$	$4,5$

(a) Formulieren Sie das Problem als lineares Ausgleichsproblem.

(b) Bestimmen Sie a und b mithilfe einer QR-Faktorisierung.

Aufgabe 8.7 *Beim Jacobi-Verfahren heisst die Matrix* $D^{-1}(L+U)$ *Iterationsmatrix. Der betragsmässig maximale Eigenwert einer Matrix wird auch als Spektralradius bezeichnet. Sei* A *die* $(n \times n)$*-Matrix mit*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A *hat die Eigenwerte* $2 - 2\cos(i/(n+1)\pi)$, $i = 1, \ldots, n$. *Bestimmen Sie den Spektralradius der zugehörigen Iterationsmatrix.*

Votierungswoche: 30.05. - 03.06.2011

Mathematik IV für Informatiker (CV) SS 2011 **Übung 7**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 7.1 *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre $n \times n$-Matrix, und sei $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthonormale Matrix. Zeigen Sie, dass* $\operatorname{cond}(A\,U) = \operatorname{cond}(U\,A) = \operatorname{cond}(A)$.

Aufgabe 7.2 *Berechnen Sie eine LU-Faktorisierung der Matrizen A und B mit*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 6 & -5 & -1 \\ -12 & 34 & 49 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}.$$

Im Falle der Matrix A schreibe man U als Produkt $E_1\,E_2\,\cdots\,E_k\,A$ mit geeigneten Elementarmatrizen E_i. Man bestimme anschließend $(E_1\,E_2\,\cdots\,E_k)^{-1}$.

Aufgabe 7.3 *Gegeben sei das Gleichungssystem $Ax = b$ mit*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ und } b = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

(a) *Bestimmen Sie mithilfe einer LU-Faktorisierung der Matrix A die Lösung des Gleichungssystems.*

(b) *Lösen Sie $Ax = b$ mit dem Gauß'schen Algorithmus, indem Sie die Brüche als Dezimalzahlen, gekürzt auf eine Stelle nach dem Komma, behandeln und vergleichen Sie mit Ihrer Lösung aus (a).*

Aufgabe 7.4 *Berechnen Sie eine Cholesky-Zerlegung der Matrix B aus Aufgabe 7.2.*

Aufgabe 7.5 *Gegeben seien* $A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 11 \end{pmatrix}$ *und* $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) *Führen Sie eine Cholesky-Zerlegung der Matrix A durch.*

(b) *Lösen Sie das Gleichungssystem $A = x = GG^T x = b$, indem Sie zuerst einen Vektor y aus $Gy = b$ und anschließend den Lösungsvektor x aus $G^T x = y$ bestimmen.*

Votierungswoche: 23.05. - 27.05.2011

Mathematik IV für Informatiker (CV) SS 2011 **Übung 6**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 6.1 *Gegeben sei die Funktion* $f : \mathbb{R}_{>-10} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \ln(x + 10)$.

(a) *Ermitteln Sie einen Näherungswert für* $\ln 11,1$ *an den Stützstellen* $x_0 = 0, x_1 = 1$ *und* $x_2 = 2$ *mithilfe der Polynominterpolation nach der Methode von Newton.*

(b) *Bestimmen Sie einen Näherungswert für* $\ln 11,1$ *mit dem Neville-Algorithmus.*

(c) *Schätzen Sie den Interpolationsfehler für* $\ln 11,1$ *ab.*

(d) *Wie hängt das Vorzeichen des Interpolationsfehlers von* x *ab?*

Aufgabe 6.2 *Gegeben sei die Funktion* $f : [0,4] \to [0,2]$ *mit* $f(x) = \sqrt{x}$ *an den Stützstellen* $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 4$.

(a) *Bestimmen Sie das Interpolationspolynom.*

(b) *Berechnen Sie die kubischen Splines auf dem Intervall* $[x_0, x_1]$ *und* $[x_1, x_2]$ *unter der Bedingung* $S_0''(x_0) = S_1''(x_2) = 0$.

(c) *Berechnen Sie mithilfe der Ergebnisse (a) und (b) jeweils Näherungswerte für* $\sqrt{\frac{1}{3}}$ *und* $\sqrt{3}$ *und vergleichen Sie diese mit den Werten eines Rechners.*

Aufgabe 6.3 *Bestimmen Sie je eine Näherung für* $\ln 2 = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ *nach*

(a) *der Rechteckregel,*

(b) *der Trapezregel,*

(c) *der Simsonregel*

und vergleichen Sie diese mit dem Rechnerwert für $\ln 2$.

Aufgabe 6.4 *Berechnen Sie die Koeffizienten der Newton-Cotes Formel für* $n = 3$.

Aufgabe 6.5 *Weisen Sie für die Zeilensummennorm* $\|A\|_\infty$ *von Matrizen* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *die Normeigenschaften nach. Zeigen Sie, dass* $\|A\|_\infty$ *mit der Maximumnorm* $\|x\|_\infty$ *von Vektoren* $x \in \mathbb{R}^n$ *verträglich ist.*

Aufgabe 6.6 *Berechnen Sie die Normen* $\|A\|_\infty, \|A\|_1$ *und* $\|A\|_2$ *für die Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0,99 \end{bmatrix}.$$

Votierungswoche: 16.05. - 20.05.2011

Mathematik IV für Informatiker (CV) SS 2011 **Übung 5**
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 5.1 *Welche Grundgesetze der Arithmetik reeller Zahlen gelten auf dem Computer nicht? Begründen Sie Ihre Aussagen.*

Aufgabe 5.2 *Formen Sie folgende Ausdrücke so um, dass ihre Auswertung möglichst ohne Auslöschung erfolgen kann:*

(a) $\sqrt{\frac{x+4}{x}} - \sqrt{1 + \frac{2}{x}}$

(b) $\frac{8}{x+2} - \frac{4-x}{4+x}$

(c) $\frac{1-\cos x}{x}$

Aufgabe 5.3 *Sei die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \tan \pi x$ *an den Stützstellen* $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{6}$ *und* $x_2 = \frac{1}{4}$ *gegeben.*

(a) *Bestimmen Sie das Interpolationspolynom* $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

(b) *Benutzen Sie zur Interpolation* $Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 \frac{1}{x - \frac{1}{2}}$, *d. h. berechnen Sie die Konstanten* b_0, b_1 *und* b_2 *von* $Q(x)$.

(c) *Welche Näherungen ergeben sich aus (a) und (b) für* $\tan 20°$*?*

Aufgabe 5.4 *Gegeben sei die Funktion* $f : [0,1] \to [0,1]$ *mit* $f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$ *an den Stützstellen* $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}$ *und* $x_2 = 1$.

(a) *Bestimmen Sie das zugehörige Interpolationspolynom* $p(x)$.

(b) *Ermitteln Sie die parametrische Form* $C : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *mit* $C(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t_2$ *und* $a_i \in \mathbb{R}^2$ *der quadratischen Bezierkurve mit den Kontrollpunkten* $c_i = \begin{pmatrix} x_i \\ f(x_i) \end{pmatrix}; i = 0, 1, 2$.

(c) *Vergleichen Sie die Funktion* $f(x)$ *mit dem Interpolationspolynom* $p(x)$ *und der Bezierkurve* $C(t)$.

Aufgabe 5.5 *Zeigen Sie, dass sich, numerisch günstig auswertbar, das Interpolationspolynom* $p(x)$ *in Lagranscher Form auch darstellen lässt durch*

$$p(x) = \begin{cases} y_i & \textit{für} \quad x = x_i; i = 0, \ldots, n \\ \frac{\sum_{i=0}^{n} \frac{c_i}{x - x_i} y_i}{\sum_{i=0}^{n} \frac{c_i}{x - x_i}} & \textit{für} \quad x \neq x_i : i = 0, \ldots, n \end{cases},$$

wobei $\frac{1}{c_i} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (x_i - x_k)$ *gilt.*

Aufgabe 5.6 *Sei* $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = x^4 - 3\,x^2 + 1$. *Man bestimme das Interpolationspolynom* p *von Grad* 2 *bzgl. den Stützstellen* $(-2, f(-2))$, $(0, f(0))$ *und* $(2, f(2))$ *und bestimme eine obere Schranke für*

$$\max_{x \in [-2,2]} |f(x) - p(x)| \,.$$

Votierungswoche: 09.05. - 13.05.2011

Mathematik IV für Informatiker (CV) SS 2011 **Übung 4**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 4.1 *Zeigen Sie, dass die Tangentialebenen der Flächen* $xyz = a^3$ *mit* $a > 0, a \in \mathbb{R}$ *mit den Koordinatenebenen Pyramiden bilden, die ein Volumen von* $V = \frac{9}{2}a^3(FE)$ *haben.*

Aufgabe 4.2 *Eine Tangentialebene der Fläche* $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ *mit* $a > 0, a \in \mathbb{R}$*, in einem Punkt* $(x^\star, y^\star, z^\star)$ *mit* $x^\star, y^\star, z^\star > 0$ *schneidet die Koordinatenachsen. Zeigen Sie, dass die Summe der Abstände vom Koordinatenursprung zu den Schnittpunkten (Achsenabschnitte) gleich a sind.*

Aufgabe 4.3 *Sei* $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ *der* $\mathbb{R}$*-Vektorraum der Quaternionen. Zeigen Sie die Distributivität der Multiplikation (siehe Definition 21.22 der Vorlesung!) in* $\mathbb{H}$*.*

Aufgabe 4.4 *Man zeige, dass für* $r, s \in \mathbb{H}$ *gilt:*

i) $\|r\| = \sqrt{r\overline{r}}$,

ii) $\overline{r\,s} = \overline{s}\,\overline{r}$.

iii) $\|rs\| = \|r\|\|s\|$,

iv) *Für* $r \neq 0$ *ist* $r^{-1} = \frac{\overline{r}}{\|r\|^2}$ *(multiplikatives) Inverses zu* r.

Aufgabe 4.5 *Gegeben seien die Quaternionen* $r_1 = (3 + 4i - 2j + k)$ *und* $r_2 = (2 - 3i + 5j - k)$*. Berechnen Sie* $r_1 \cdot r_2, \|r_1 \cdot r_2\|$ *und* $(r_1 \cdot r_2)^{-1}$*.*

Aufgabe 4.6 *Gegeben seien die Rotationen*
R_r *um* $\{\lambda(\sqrt{3}, 1, 2)^T : \lambda \in \mathbb{R}\}$ *mit dem Winkel* $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ *und*
R_s *um* $\{\mu(1, 1, 1)^T : \mu \in \mathbb{R}\}$ *mit dem Winkel* $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$.
Bestimmen Sie unter Verwendung der Quaternionen den Drehwinkel der Rotation $R_r \circ R_s$*.*

Votierungswoche: 02.05. - 06.05.2011

Mathematik IV für Informatiker (CV) SS 2011 **Übung 3**
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 3.1 *Man bestimme Kontrollpunkte* $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}^2$*, so dass die Bézierkurve*

$$B(t) = \sum_{i=0}^{3} b_{i,3}(t)c_i \quad \textit{mit} \quad t \in [0,1]$$

gleich der folgenden Kurve ist:

$$c(t) = \begin{bmatrix} t^3 + t + 1 \\ t^2 - 2t \end{bmatrix},\ t \in [0,1].$$

Berechnen Sie $B(0)$ *und* $B(1)$ *und skizzieren Sie das kleinste konvexe Vieleck, das die Kurve enthält.*

Aufgabe 3.2 *Es sei eine Kurve* $C : [-1,0] \to \mathbb{R}^2$ *gegeben durch*

$$c(s) = \begin{pmatrix} -1 + 6s^2 + 3s^3 \\ 2 + 6s + 3s^2 - 2s^3 \end{pmatrix}.$$

a) Man bestimme eine Reparametrisierung $\overline{c} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *von c.*

b) Man bestimme ein $m \in \mathbb{N}$ *und Kontrollpunkte* $c_0, \ldots, c_m \in \mathbb{R}^2$*, so dass die Bézierkurve*

$$B(t) = \sum_{i=0}^{m} b_{i,m}(t)c_i, \quad t \in [0,1],$$

gleich der Kurve c (also auch gleich $\overline{c}$ *ist.*

c) Man teile die Bézierkurve B aus b) bei $B\left(\frac{1}{2}\right)$ *in einen linken Teil* $B_l : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *und einen rechten Teil* $B_r : [0,1] \to \mathbb{R}^2$*.*
Hinweis: Es genügt die jeweils m Kontrollpunkte von B_l *und* B_r *anzugeben.*

Aufgabe 3.3 *Man ermittle die parametrische Form* $B(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$, $a_i \in \mathbb{R}^3$*, der kubischen Bézierkurve mit den Kontrollpunkten*

$$c_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und bestimme die Geschwindigkeitsvektoren in den Punkten $B(0)$ *und* $B(1)$*.*

Aufgabe 3.4 *Gegeben seien die Kontrollpunkte*

$$c_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) *Ermitteln Sie die parametrische Form* $B(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t_2 + a_3 t^3$, $a_i \in \mathbb{R}^2$, *der kubischen Bézierkurve mit diesen Kontrollpunkten.*

b) *Teilen Sie die Bézierkurve* $B(t)$ *in zwei Bézierkurven* B_l *und* B_r *dritten Grades, mit* $B_l(t) = B\left(\frac{1}{4}t\right)$ *für* $t \in [0,1]$ *und* $B_r(t) = B\left(\frac{1}{4} + \left(1 - \frac{1}{4}\right)t\right)$ *für* $t \in [0,1]$.

Aufgabe 3.5 *Bestimmen Sie die Tangentialebene der Fläche*

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (2a^2 - z^2)x^2 - a^2 y^2 = 0\right\}$$

im Punkt $P(a,a,a)$.

Aufgabe 3.6 *Ermitteln Sie die parametrische Form* $S : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ *mit* $S(s,t) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{2} b_{i,1}(s) b_{j,2}(t) c_{ij}$ *der Bézierfläche mit den Kontrollpunkten* $c_{0,0} = (1,0,0)^T, c_{0,1} = (1,0,-1)^T, c_{0,2} = (-1,0,-1)^T, c_{1,0} = (0,1,0)^T$, $c_{1,1} = (0,1,-1)^T$ *und* $c_{1,2} = (0,0,1)^T$.

Votierungswoche: 26.04. - 29.04.2011

Mathematik IV für Informatiker (CV) SS 2011 **Übung 2**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 2.1 *Berechnen Sie die Länge der Kurve* $c(t)$ *im* $\mathbb{R}^3$ *mit* $c(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)^T$, $t \in [0,1]$.

Aufgabe 2.2 *Bestimmen Sie eine Reparametrisierung mit konstanter Geschwindigkeit für folgende Kurven:*

(a) $c(t) = (2t-1, 4t^2-4t+1)^T)$ *für* $t \in [-1,1]$,

(b) $c(t) = (\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t)^T$ *für* $t \in (0,\infty)$.

Aufgabe 2.3 *Zeigen Sie, dass für Bernsteinpolynome gilt:*

(a) $b'_{i,m}(t) = \frac{(i-mt)}{t(1-t)} \cdot b_{i,m}(t)$ *mit* $t \neq 0$ *und* $t \neq 1$.

(b) Für Bernsteinpolynome gilt die Symmetrie: $b_{m-i,m}(t) = b_{i,m}(1-t), i = 0,1,\ldots,m.$

Aufgabe 2.4 *Bestimmen Sie Kontrollpunkte* $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2$, *so dass die Bézierkurve*

$$B(t) = \sum_{i=0}^{2} b_{i,2}(t)c_i, t \in [0,1],$$

gleich der Kurve

$$c(t) = (2t-1, 4t^2-4t+1)^T, t \in [0,1]$$

ist. Man gebe zudem eine Reparametrisierung der Kurve $c(t)$ *für das Intervall* $[-1,1]$ *an und fertige eine Skizze der Kurve und den Kontrollpunkten an.*

Aufgabe 2.5 *Geben Sie eine Reparametrisierung* $\bar{c} : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^3$ *der Kurve*

$$c(t) = ((t+2)^2, t^3+3t^2+3t, 3+t)^T, t \in [-1,1]$$

an und bestimmen Sie Kontrollpunkte $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}^3$, *so dass die Bézierkurve*

$$B(t) = \sum_{i=0}^{3} b_{i,3}(t)c_i, t \in [0,1]$$

gleich der Kurve $\bar{c}(t)$ *ist.*

Aufgabe 2.6 *Bestimmen Sie die Kontrollpunkte* $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}^2$*, so dass die Bézierkurve*

$$B(t) = \sum_{i=0}^{3} b_{i,3}(t) c_i \textit{ mit } t \in [0, 1]$$

gleich der Kurve $c(t) = (t^3 + t + 1, t^2 - 2t)^T, t \in [0, 1]$ *ist. Berechnen Sie* $B(0)$ *und* $B(1)$ *und skizzieren Sie das kleinste konvexe Vieleck, dass die Kurve enthält.*

Votierungswoche: 18.04. - 21.04.2011

Mathematatik IV für Informatiker (CV) SS 2011 **Übung 1**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 1.1 *Gegeben sei die Kurve* $\{(x, y)\mathbb{R}^2 : 2y^2 = x(x^2 + y^2)\}$.

(a) *Zeichnen Sie die Kurve.*

(b) *Geben Sie die Kurve in Polarkoordinaten an.*

Aufgabe 1.2 *Gegeben sei die Kurve* $r = \frac{1 \pm \sin\varphi}{\cos\varphi}$ *in Polarkoordinaten.*

(a) *Geben Sie eine implizite Darstellung der Kurve an.*

(b) *Zeichnen Sie die Kurve.*

Aufgabe 1.3 *Ein Kreis mit dem Radius* $r = 4$ *cm rollt ohne zu gleiten auf der Außenseite eines Kreises mit dem Radius* $R = 1$ *cm.*

(a) *Stellen Sie die Parametergleichungen der Kurve auf, die von einem Punkt* P *auf dem Umfang des rollenden Kreises beschrieben wird.*

(b) *Zeichnen Sie die Kurve.*

(c) *Skizzieren Sie die Kurve für den Fall* $r = R$.

Aufgabe 1.4 *Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor und die Längenfunktion folgender Kurven*

(a) $C(t) = [(12 + 0,4t - 0,01t^2)\sin\frac{\pi t}{180}, (12 + 0,4t - 0,01t^2)\cos\frac{\pi t}{180}]^T$, $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$,

(b) $C(t) = [a\cos t, a\sin t, bt]^T$ *mit* $t \in \mathbb{R}$ *und* $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) *Skizzieren Sie die Kurven.*

Aufgabe 1.5 *Bestimmen Sie den Tangenten- und Normalenvektor der Kurve* $C(t) = [t^3, t^2]^T, t \in \mathbb{R}$ *im Punkt* $C(1)$ *und skizzieren Sie diese Kurve.*

Aufgabe 1.6 *Gegeben sei die Kurve* $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^3 + y^2 = x^2\})$.

(a) *Bestimmen Sie den Tangenten- und Normalenvektor der Kurve* C *im Punkt* $(0, -1)$.

(b) *Skizzieren Sie die Kurve.*

(c) *Gibt es einen Normalenvektor im Punkt* $(0, 0)$*?*

Votierungswoche: 11.04. - 15.04.2011