Mathematik IV für Informatiker (CV) SS 2010 **Übung 13**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 13.1 *Gegeben sei die Kurve*

$$f(x) = \left(x^2, \frac{2}{3}x^3\right)^T, \ x \in [-1, 1].$$

(a) Man berechne die Geschwindigkeit.

(b) Man berechne die Länge der Kurve.

(c) Man reparametrisiere die Kurve auf das Intervall $[0, 1]$.

(d) Man ermittle geeignete Kontrollpunkte $c_0, \dots, c_3$ *für eine Darstellung als kubische Bézierkurve*

$$B(t) = \sum_{i=0}^{3} b_{i,3}(t) c_i, \ t \in [0, 1].$$

Aufgabe 13.2 *Gegeben sei die Kurve*

$$C = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + x^3 = y^2\}.$$

(a) Bestimmen Sie die Tangente im Punkt $P_1(-1, 0)$.

(b) Geben Sie einen Normalenvektor im Punkt $P_2(0, 0)$ *an.*

(c) Skizzieren Sie die Kurve.

Aufgabe 13.3 *Die Funktion* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *ist für* $-\infty < x < +\infty$ *durch ein Interpolationspolynom höchstens 2. Grades bei Verwendung der Stützstellen* $(0, f(0)), (1, f(1))$ *und* $(2, f(2))$ *zu approximieren. Berechnen Sie das Interpolationspolynom nach einem Verfahren Ihrer Wahl, geben Sie eine Näherung für* $f(\frac{4}{5})$ *an und schätzen Sie den Fehler ab!*

Aufgabe 13.4 *Gegeben sei das lineare Gleichungssystem* $Ax = b$ *mit*

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \\ 16 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Prüfen Sie die Matrix A *auf strikte Diagonaldominanz.*

(b) Führen Sie zwei Schritte des Jacobi-Verfahrens mit dem Startvektor $x = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ durch.

(c) Führen Sie zwei Schritte des Gauß-Seidel-Verfahrens mit dem Startvektor $x = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ durch.

Aufgabe 13.5 *Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem:*

$$t^2 s' = 2ts - 3 \quad \textit{mit} \quad s(-1) = 1.$$

Aufgabe 13.6 *Lösen Sie die Differentialgleichung $y''' + y'' = 6x + e^{-x}$.*

Votierungswoche: 28.06. - 02.07.2010

Mathematik IV für Informatiker (CV) SS 2010 **Übung 12**
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 12.1 *Man bestimme die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen mithilfe der Variation der Konstanten:*

(a) $y' - \frac{3y}{x} = x$,

(b) $xy' + y = \ln x + 1$.

Aufgabe 12.2 *Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung:*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad x \in (0, 1).$$

Benutzen Sie dazu Satz 22.21 sowie die spezielle Lösung $y(x) = x$.

Aufgabe 12.3 *In einem Stromkreis mit dem Widerstand* R*, der Selbstinduktion* L *und der elektromotorischen Kraft* E *genügt die Stromstärke* I *der Differentialgleichung*

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E.$$

Man löse das Anfangswertproblem für $I = 0$ *zum Zeitpunkt* $t = 0$ *unter der Bedingung, dass* R *und* L *konstant sind und* E *als zeitlich linear anwachsende Größe* $E = k \cdot t$ *betrachtet wird.*

Aufgabe 12.4 *Lösen Sie folgendes Randwertproblem* $y''' + y'' + 8y' = 10y$ *mit* $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$ *und* $y''(0) = -67$.

Aufgabe 12.5 *Ermitteln Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichung mit Hilfe der Variation der Konstanten:*

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Votierungswoche: 21.06. - 25.06.2010

Mathematik IV für Informatiker (CV) SS 2010 **Übung 11**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 11.1 *Untersuchen Sie folgende Mengen von Funktionen* $f_i : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, *auf lineare Unabhängigkeit:*

(a) $f_1(x) = \sin^2 x$, $f_2(x) = \cos^2 x$ *und* $f_3(x) = \cos 2x$,

(b) $f_1(x) = 1 - \cos x - \sin x$, $f_2(x) = 1 - \cos 4x$ *und* $f_3(x) = \sin 3x$.

Aufgabe 11.2 *Gegeben sei die Differentialgleichung* $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$ *mit der allgemeinen Lösung* $y = C_1 \cdot \frac{1}{x^2} + C_2 \cdot \frac{\ln x}{x^2}$.

(a) *Zeigen Sie die lineare Unabhängigkeit der Lösungen* $y_1 = \frac{1}{x^2}$ *und* $y_2 = \frac{\ln x}{x^2}$.

(b) *Bestätigen Sie die allgemeine Lösung.*

Aufgabe 11.3 *Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:*

(a) $y'' + 2ay' + a^2y = 0$ *mit* $a \in \mathbb{R}$,

(b) $s'' + 2s' + 2s = 0$ *mit* $s(0) = s'(0) = 1$.

Aufgabe 11.4 *Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen:*

(a) $y'' - 2y' = 0$,

(b) $y''' + 8y = 0$.

Votierungswoche: 14.06. - 18.06.2010

Mathematik IV für Informatiker (CV) SS 2010 **Übung 10**
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 10.1 *Prüfen Sie, ob die Differentialgleichungen*

(a) $y''x\ln x = y'$,

(b) $y'''y = y''y'$,

(c) $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2\cos 2x$.

von folgenden Funktionen erfüllt werden $(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R})$*:*

(a) $y = C_1 x(\ln x - 1) + C_2$,

(b) $y = C_1 e^{\sqrt{C_3 x}} + C_2 e^{\sqrt{C_3 x}}$ *und* $y = C_4 x + C_5$,

(c) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{\sqrt{2}}{4}\cos(\frac{\pi}{4} - 2x)$.

Aufgabe 10.2 *Ermitteln Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen durch Separation der Variablen:*

(a) $y' + x^2 y' = 2xy$

(b) $\varphi^2 r' + r = 4$

(c) $2sts' = 1 + t^2$

Aufgabe 10.3 *Lösen Sie die Anfangswertprobleme*

(a) $(x^2 + x)y' = 2y + 1$ *mit* $y(-\frac{1}{2}) = 5$,

(b) $y' \sin y \cos x = \cos y \sin x$ *mit* $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

Aufgabe 10.4 *Gegeben sei die Gleichung* $\tan\varphi = \frac{y^2}{\sqrt{1-x}}$.

(a) *Bestimmen Sie alle Funktionen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = y$*, die der obigen Gleichung genügen. Dabei sei* φ *der Anstiegswinkel der Tangente an die Funktion* f *in einem beliebigen Punkt* $P(x, y)$.

(b) *Welche der unter (a) ermittelten Funktionen geht durch den Punkt* $P_0(0, \frac{1}{2})$*?*

Votierungswoche: 07.06. - 11.06.2010

Mathematik IV für Informatiker (CV) SS 2010 **Übung 9**
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 9.1 *Untersuchen Sie folgende Polynome* $p(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}[x, y, z]$ *auf Symmetrie und bestimmen Sie gegebenenfalls ein Polynom* $g(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}[x, y, z]$ *mit* $p(\mathbf{x}) = g(\sigma_1(\mathbf{x}), \sigma_2(\mathbf{x}), \sigma_3(\mathbf{x}))$*:*

i) $p(\mathbf{x}) = 2x^3 + 2y^3 + 2z^3 - 3x^2y - 3x^2z - 3xy^2 - 3y^2z - 3yz^2$,

ii) $p(\mathbf{x}) = x^2y + y^2z + z^2x$,

iii) $p(\mathbf{x}) = 1 + 3xyz + x^2 + y^2 + z^2$,

iv) $p(\mathbf{x}) = x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3$.

Aufgabe 9.2 *Seien* γ_1 *und* γ_2 *die Nullstellen des Polynoms* $p(x) = x^2 + x - 19$. *Berechnen Sie* $\gamma_1^5 + \gamma_2^5$ *mithilfe der Sätze 21.39 und 21.42.*

Aufgabe 9.3 *Bestimmen Sie mithilfe von Satz 21.42 alle Lösungen (in* $\mathbb{C}$*) des Gleichungssystem:*

$$\begin{array}{ccccc} x^5 & + & y^5 & = & 31 \\ x & + & y & = & 1. \end{array}$$

Aufgabe 9.4 *Gegeben seien die Polynome* $p_1(x, y) = x^2 + xy + 2x + y - 1$ *und* $p_2(x, y) = x^2 - y^2 + 3x + 2y - 1$.

i) *Bestimmen Sie die Sylvester-Matrix* $S(p_1, p_2, y)$.

ii) *Für welche* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $\mathrm{Res}(p_1, p_2, y) = 0$*?*

Votierungswoche: 31.05. - 04.06.2010

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 8.1 *Gegeben sei das lineare Gleichungssystem* $Ax = b$ *mit*

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -4 & -2 \\ -4 & 10 & -4 \\ -6 & -2 & 12 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Prüfen Sie die Diagonaldominanz der Matrix A.

(b) Führen Sie drei Iterationsschritte des Jacobi-Verfahrens mit dem Startvektor $x = (0,0,0)^T$ *durch.*

Aufgabe 8.2 *Gegeben sei das lineare Gleichungssystem aus Aufgabe 8.1.*

(a) Führen Sie drei Iterationsschritte des Gauß-Seidel-Verfahrens mit dem Startvektor $x = (0,0,0)^T$ *durch.*

(b) Vergleichen Sie das Ergebnis aus Aufgabe 8.1 (b) mit dem Ergebnis aus Teil (a).

Aufgabe 8.3 *Gegeben sei die Gleichung* $\ln x + x = 0$.

(a) Bestimmen Sie ein Intervall $[a, b]$ *in dem die Lösung dieser Gleichung liegt und zeigen Sie, dass es nur eine Lösung gibt.*

(b) Bestimmen Sie einen Näherungswert der Lösung mithilfe des Newton-Verfahrens auf 5 Stellen genau.

(c) Bestimmen Sie einen Näherungswert der Lösung mithilfe des Sekantenverfahrens auf 5 Stellen genau und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus (b).

Aufgabe 8.4 *Zur näherungsweisen Bestimmung von* $\sqrt{2}$ *kann man das Newton-Verfahren zur Ermittlung der Nullstelle von* $f(x) = x^2 - 2$ *auf dem Intervall* $I = [1, 2]$ *heranziehen. Wie viele Iterationsschritte sind nötig, damit der Fehler* $\frac{1}{512}$ *nicht übersteigt? (Verwenden Sie Satz 21.34).*

Votierungswoche: 25.05. - 28.05.2010

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 7.1 *Berechnen Sie eine LU-Faktorisierung der Matrix B mit*

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 & -10 \\ 3 & 7 & -3 & 5 \\ 12 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 12 & 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 7.2 *Gegeben sei das Gleichungssystem $Ax = b$ mit*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ und } b = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

(a) *Bestimmen Sie mithilfe einer LU-Faktorisierung der Matrix A die Lösung des Gleichungssystems.*

(b) *Lösen Sie das Gleichungssystem, indem Sie die Brüche als Dezimalzahlen, gekürzt auf eine Stelle nach dem Komma, behandeln und vergleichen Sie mit der exakten Lösung.*

Aufgabe 7.3 *Gegeben sei das folgende Gleichungssystem $Ax = b$ mit*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ und } b = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

(a) *Zeigen Sie, dass auf die Matrix A eine Cholesky-Zerlegung anwendbar ist.*

(b) *Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems mithilfe der Cholesky-Zerlegung.*

Aufgabe 7.4 *Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mithilfe einer QR-Faktorisierung (vgl. Bemerkung 21.27):*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 4 \\ -4 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 60 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 7.5 *Die Parameter a und b der sogenannten Regressionsgeraden $y = ax + b$, d.h., der Geraden, die die Summe der Quadrate der vertikalen Abstände zu den Messpunkten minimiert, sollen aus den in folgender Tabelle aufgenommenen Messdaten (y_i, x_i), $i = 1, \ldots, 4$, ermittelt werden:*

x_i	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$
y_i	$4,0$	$4,2$	$4,4$	$4,5$

(a) *Formulieren Sie das Problem als lineares Ausgleichsproblem.*

(b) *Bestimmen Sie a und b mithilfe einer QR-Faktorisierung.*

Votierungswoche: 17.05. - 21.05.2010

Aufgabe 6.1 *Berechnen Sie die Koeffizienten der Newton-Cotes-Formeln für $n = 2$ (Simpson-Regel), $n = 3$ ($\frac{3}{8}$-Regel) und für $n = 4$ (Milne-Regel).*

Aufgabe 6.2 *Berechnen Sie die Werte der Newton-Cotes-Formeln für $n = 2, 3$ und 4 bei der Berechnung von $\int_0^1 \sin \pi x \, dx$.*

Aufgabe 6.3 *Laut Vorlesung lässt sich die Newton-Cotes Integrationsformel mit $n = 1$ (Trapezregel)*

$$S(h) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

als Polynom $S(h) = \alpha_0 + \alpha_1 h^2 + \ldots + \alpha_m h^{2m}$ auffassen, für das $S(0) = \int_a^b f(x)dx$ gilt. Zeigen Sie: Wird $S(h)$ bezüglich der Stützstellen $(h_i^2, S(h_i))$ mit $h_0 = a-b$ und $h_{i+1} = \frac{h_i}{2}$ durch ein Interpolationspolynom T_r vom Grad r approximiert, so erhält man mithilfe des Neville-Algorithmus mit $x = 0$ und $x_i = h_i^2$ zur Berechnung eines Näherungswertes von $\int_a^b f(x)dx = S(0) \approx T_{rr}$ folgende Formeln:

$$\begin{aligned} T_{i0} &= S(h_i),\ i = 0, \ldots, r, \\ T_{ij} &= T_{i,j-1} + \frac{T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}}{\left(\frac{h_{i-j}}{h_i}\right)^2 - 1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6.4 *Leiten Sie unter Anwendung der Simpson-Regel auf die Teilintervalle einer geeigneten Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in n Teilintervalle folgende Formel zur näherungsweisen Berechnung bestimmter Integrale her (zusammengesetzte Simpson-Regel): $\int_a^b f(x)dx \approx S(h)$ mit $h = \frac{b-a}{2n}$ und*

$$S(h) = \frac{h}{3}[f(a)+2(f(a+2h)+\ldots+f(b-2h))+4(f(a+h)+\ldots+f(b-h))+f(b)].$$

Aufgabe 6.5

a) *Zeigen Sie, dass die Matrixnorm*

$$||A|| = \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{||Ax||}{||x||}$$

die Normeigenschaften erfüllt.

(b) *Bestimmen Sie die Norm folgender Matrix:* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6.6 *Bestimmen Sie die Kondition der Matrix* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,99 & 1 \end{pmatrix}$.

Votierungswoche: 10.05. - 14.05.2010

Mathematik IV für Informatiker (CV) SS 2010 **Übung 5**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 5.1 *Gegeben sei die Funktion* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

(a) *Bestimmen Sie eine Näherung für das bestimmte Integral* $I = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$, *indem Sie das Interpolationspolynom* $p_2(x)$ *an den Stützstellen* $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ *und* $x_2 = 1$ *der Funktion* $f(x)$ *benutzen.*

(b) *Bestimmen Sie eine weitere Näherung für das Integral* I, *indem als Näherung für* $f(x)$ *das Taylorpolynom 2. Grades an der Stelle* $x^* = 0$ *benutzen.*

(c) *Vergleichen Sie die unter (a) und (b) erhaltenen Näherungswerte mit dem wirklichen Wert.*

(d) *Skizzieren Sie* $f(x)$, $p_2(x)$ *und das Taylorpolynom 2 aus Teil b) im Interval* $[-1, 1]$.

Aufgabe 5.2 *Gegeben sei die Funktion* $f : [0, \frac{1}{4}] \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \tan \pi x$ *an den Stützstellen* $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$ *und* $x_2 = \frac{1}{4}$ *(siehe auch Aufgabe 4.6!). Bestimmen Sie den Wert des Interpolationspolynoms* $p(x^*)$ *für* $x^* = 0,125$

(a) *nach der Methode von Lagrange,*

(b) *nach der Methode von Newton,*

(c) *mit dem Neville-Algorithmus.*

Aufgabe 5.3 *Schätzen Sie den Interpolationsfehler von* $p(x^*)$ *mit* $x^* = 0,125$ *aus der Aufgabe 5.2 mithilfe von Satz 21.6 der Vorlesung ab.*

Aufgabe 5.4 *Gegeben sei die Funktion* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *mit* $f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$ *an den Stützstellen* $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ *und* $x_2 = 1$.

(a) *Bestimmen Sie das zugehörige Interpolationspolynom* $p(x)$.

(b) *Ermitteln Sie die parametrische Form* $C : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ *mit* $C(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t_2$ *und* $a_i \in \mathbb{R}^2$ *der quadratischen Bézierkurve mit den Kontrollpunkten* $c_i = \begin{pmatrix} x_i \\ f(x_i) \end{pmatrix}$, $i = 0, 1, 2$.

(c) *Vergleichen Sie die Funktion* $f(x)$ *mit dem Interpolationspolynom* $p(x)$ *und der Bézierkurve* $C(t)$.

Aufgabe 5.5 *Subtraktion fast gleich großer Zahlen ist numerisch schlecht, da es zur Auslöschung kommen kann. Formen Sie folgende Ausdrücke so um, dass ihre Auswertung möglichst ohne den Genauigkeitsverlust bei der Subtraktion erfolgen kann:*

(a) $\sqrt{\frac{x+4}{x}} - \sqrt{1 + \frac{2}{x}}$

(b) $\frac{8}{x+2} - \frac{4-x}{4+x}$

(c) $\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$

Aufgabe 5.6 *Zeigen Sie, dass sich, numerisch günstiger auswertbar, das Interpolationspolynom $p(x)$ in Lagrange'scher Form auch darstellen lässt durch*

$$p(x) = \begin{cases} y_i & \textit{für} \quad x = x_i,\ i = 0, \ldots, n \\ \frac{\sum_{i=0}^{n} \frac{c_i}{x-x_i} y_i}{\sum_{i=0}^{n} \frac{c_i}{x-x_i}} & \textit{für} \quad x \neq x_i,\ i = 0, \ldots, n \end{cases},$$

wobei $\frac{1}{c_i} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (x_i - x_k)$ *gilt.*

Votierungswoche: 03.05. - 07.05.2010

Mathematik IV für Informatiker (CV) SS 2010 **Übung 4**
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 4.1 *Ermitteln Sie die parametrische Form der Bézierfläche* $S : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ *mit* $S(s,t) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{2} b_{i,1}(s) b_{j,2}(t) c_{i,j}$ *mit den Kontrollpunkten*
$c_{0,0} = (1,0,0)^T$, $c_{0,1} = (1,0,-1)^T$, $c_{0,2} = (-1,0,-1)^T$, $c_{1,0} = (0,1,0)^T$, $c_{1,1} = (0,1,-1)^T$ *und* $c_{1,2} = (0,0,1)^T$.
Beschreiben Sie das Polyeder, deren Ecken durch die Kontrollpunkte gegeben sind.

Aufgabe 4.2 *Ein Kreis* K_1 *mit dem Radius* R_1 *rollt ohne zu gleiten in einem Kreis* K_2 *mit dem vierfachen Radius* $R_2 = 4R_1$ *ab. Die Bahnkurve, die ein Punkt* P *auf dem Umfang des rollenden Kreises* K_1 *beschreibt, hat die implizite Gleichung:* $|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = R_2^{\frac{2}{3}}$.

(a) Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve an.

(b) Zeichnen Sie die Kurve.

Aufgabe 4.3 *Unter der Krümmung* κ *einer ebenen Kurve verstehen wir das Verhältnis der Richtungsänderung zur Längenänderung der Bogenlänge, beschrieben durch* $\kappa = \frac{d\alpha}{ds}$, *wobei* α *der Neigungswinkel der Kurventangente und* s *die Bogenlänge ist. Ist die Kurve der Graph einer Funktion* f, *so ergibt sich die Krümmung im Punkt* $(x, f(x))$ *aus:*

$$\kappa = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

(a) Bestimmen Sie die Krümmung κ *für* $f(x) = xe^{-x}$ *im Scheitelpunkt.*

(b) Berechnen Sie den Krümmungsradius $r = \left|\frac{1}{\kappa}\right|$ *im Scheitelpunkt.*

Aufgabe 4.4 *Ist eine ebene Kurve in Parameterdarstellung durch* $x(t)$ *und* $y(t)$ *gegeben, so gilt für die Krümmung:*

$$\kappa = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(a) Bestimmen Sie die Krümmung der Kurve $c(t) = (2(t - \sin t), 2(1 - \cos t))^T$ *in ihrem Scheitelpunkt.*

(b) Berechnen Sie den Krümmungsradius im Scheitelpunkt.

Aufgabe 4.5 *Durch die Gleichung* $r = f(\varphi)$ *sei eine ebene Kurve in Polarkoordinaten gegeben. Bestimmen Sie die Krümmung* κ *der Kurve im Punkt* $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$*.*

Aufgabe 4.6 *Sei die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \tan \pi x$ *an den Stützstellen* $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{6}$ *und* $x_2 = \frac{1}{4}$ *gegeben.*

(a) *Bestimmen Sie das Interpolationspolynom* $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ *mit* $p(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, 2.$

(b) *Benutzen Sie zur Interpolation* $Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 \frac{1}{x - \frac{1}{2}}$*, d. h., berechnen Sie die Konstanten* b_0, b_1 *und* b_2 *von* $Q(x)$*.*

(c) *Welche Näherungen ergeben sich aus (a) und (b) für* $\tan 20°$ *?*

Votierungswoche: 26.04. - 30.04.2010

Mathematik IV für Informatiker (CV) SS 2010 **Übung 3**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 3.1 *Ermitteln Sie die parametrische Form* $B(t) = a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$, $a_i \in \mathbb{R}^3$, *der kubischen Bézierkurve mit den Kontrollpunkten*

$$c_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ c_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie die Geschwindigkeitsvektoren in den Punkten $B(0)$ *und* $B(1)$.

Aufgabe 3.2

(a) *Ermitteln Sie die parametrische Form* $B(t) = a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$, $a_i \in \mathbb{R}^2$, *der kubischen Bézierkurve mit den Kontrollpunkten*

$$c_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(b) *Teilen Sie die Bézierkurve* $B(t)$ *in zwei Bézierkurven* B_l *und* B_r *dritten Grades, mit* $B_l(t) = B(\frac{1}{4}t)$ *für* $t \in [0,1]$ *und* $B_r(t) = B(\frac{1}{4} + (1-\frac{1}{4})t)$ *für* $t \in [0,1]$.

Aufgabe 3.3 *Beweisen Sie Teil iv) des Satzes 20.12 aus dem Skript.*

Aufgabe 3.4 *Bestimmen Sie den Normaleneinheitsvektor der Flächen*

(a) $S(s,t) = (s^2t,\ st^2,\ st)^T$ *in* $S(s_0,\ t_0)$,

(b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y - x\tan\frac{z}{a} = 0\}$ *im Punkt* $P(a, a, \frac{\pi}{4}a)$.

Aufgabe 3.5 *Sei* $S : [0, 2\pi]^2 \to \mathbb{R}^3$ *mit* $S(s,t) = \begin{pmatrix} (1+\cos s)\cos t \\ (1+\cos s)\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$ *eine Fläche.*

(a) *Bestimmen Sie den Normalenvektor der Fläche* S *in* $S(\frac{\pi}{4}, 0)$.

(b) *Bestimmen Sie die Tangentialebene von* S *in* $S(0, \frac{\pi}{4})$.

(c) *Skizzieren Sie die Fläche.*

Aufgabe 3.6 *Bestimmen Sie die Tangentialebene der Fläche*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (2a^2 - z^2)x^2 - a^2y^2 = 0\}$$

im Punkt $P(a, a, a)$.

Votierungswoche: 19.04. - 23.04.2010

Mathematik IV für Informatiker (CV) SS 2010 **Übung 2**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 2.1 *Bestimmen Sie eine Reparametrisierung mit konstanter Geschwindigkeit für folgende Kurven:*

(a) $C(t) = \left(2t - 1,\, 4t^2 - 4t + 1\right)^T$ *für* $t \in [-1, 1]$,

(b) $C(t) = \left((t+2)^2,\, t^3 + 3t^2 + 3t,\, 3 + t\right)^T$ *für* $t \in [-1, 1]$,

(c) $C(t) = (\cos t + t \sin t,\, \sin t - t \cos t)^T$ *für* $t \in (0, \infty)$.

Aufgabe 2.2 *Zeigen Sie, dass für Bernsteinpolynome gilt:*

(a) $b'_{i,m}(t) = \frac{(i-mt)}{t(1-t)} \cdot b_{i,m}(t)$ *mit* $t \neq 0$ *und* $t \neq 1$.

(b) *Jedes Bernsteinpolynom* $b_{i,m}(t)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, *hat genau ein Maximum bei* $t = \frac{i}{m}$.

Aufgabe 2.3 *Bestimmen Sie Kontrollpunkte* $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2$, *so dass die Bézierkurve*

$$B(t) = \sum_{i=0}^{2} b_{i,2}(t) c_i,\ t \in [0, 1],$$

gleich der Kurve

$$c(x) = (2x - 1,\, 4x^2 - 4x + 1)^T,\ x \in [0, 1]$$

ist. Man gebe zudem eine Reparametrisierung der Kurve $c(x)$ *für das Intervall* $[-1, 1]$ *an und fertige eine Skizze der Kurve und den Kontrollpunkten an.*

Aufgabe 2.4 *Geben Sie eine Reparametrisierung* $\bar{C} : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^3$ *der Kurve*

$$C(x) = ((x+2)^2,\, x^3 + 3x^2 + 3x,\, 3 + x)^T,\ x \in [-1, 1]$$

an und bestimmen Sie Kontrollpunkte $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}^3$, *so dass die Bézierkurve*

$$B(t) = \sum_{i=0}^{3} b_{i,3}(t) c_i,\ t \in [0, 1]$$

gleich der Kurve $\bar{C}(t)$ *ist.*

Aufgabe 2.5 *Ermitteln Sie die* parametrische Form $B(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, $a_i \in \mathbb{R}^2$, *der quadratischen Bézierkurve mit den Kontrollpunkten*

$$c_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix},\ c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ c_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie $B(\frac{1}{2})$ *und* $B(\frac{3}{2})$.

Votierungswoche: 12.04. - 16.04.2010

Mathematik IV für Informatiker (CV) SS 2010 **Übung 1**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 1.1 *Seien $\gamma, r > 0$. Man berechne den Geschwindigkeitsvektor und die Längenfunktion von*

(a) $c(t) = (e^{\gamma t} \cos t, e^{\gamma t} \sin t)^T, t \in \mathbb{R}$,

(b) $c(t) = (r \cos t, r \sin t, \gamma t)^T, t \in \mathbb{R}$

und skizziere den Verlauf.

Aufgabe 1.2 *Ein Kreis mit dem Radius $r = 1$ cm rollt ohne zu gleiten auf der Außenseite eines Kreises mit dem Radius $R = 4$ cm.*

(a) *Stellen Sie die Parametergleichungen der Kurve auf, die von einem Punkt P auf dem Umfang des rollenden Kreises beschrieben wird.*

(b) *Zeichnen Sie die Kurve.*

(c) *Skizzieren Sie die Kurve für den Fall $r = R$.*

Aufgabe 1.3 *Bestimmen Sie den Tangential-, den Normalenvektor und eine Normalendarstellung der Tangente für die Kurve $c(t) = (t^3, t^2)^T, t \in \mathbb{R}$ im Punkt $c(1)$ und skizzieren Sie diese Kurve.*

Aufgabe 1.4 *Sei $c(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)^T, t \in [0, 2\pi]$. Man skizziere die Kurve und berechne ihre Länge.*

Aufgabe 1.5

(a) *Bestimmen Sie den Tangential- und Normalenvektor der Kurve $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^3 + y^2 = x^2\}$ im Punkt $(0, -1)$.*

(b) *Skizzieren Sie die Kurve.*

(c) *Gibt es einen Normalenvektor im Punkt $(0, 0)$?*

Aufgabe 1.6 *Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor und die Längenfunktion folgender Kurven*

(a) $C(t) = \big((2 + t - 3t^2) \sin \pi t, (2 + t - 3t^2) \cos \pi t\big)^T,\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

(b) $C(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)^T$ *mit* $t \in \mathbb{R}$ *und* $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) *Skizzieren Sie die Kurve aus Teil (a).*

Votierungswoche: 06.04. - 09.04.2010

Mathematatik IV für Informatiker (CV) SS 2010 **Übung 0**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 0.1 *Die Schaftlänge von Zylinderschrauben einer Produktionsreihe wird als normalverteilte Zufallsvariable angesehen. Bei einer Stichprobe vom Umfang* $n = 25$ *wird die Schaftlänge jeder Schraube gemessen. Die Stichprobe ergibt* $\bar{x} = 16\,mm$ *und* $\bar{s}^2 = 484\,\mu m^2$. *Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall für* σ^2 *unter der Voraussetzung, dass das Konfidenzniveau* 0.99 *beträgt.*

Aufgabe 0.2 *Unter* 3000 *Lebendgeburten wurden* 1578 *Knaben gezählt. Bestimmen Sie daraus ein Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit* p *einer Knabengeburt zu* $1 - \alpha = 0.99$.

Aufgabe 0.3 *In der Vergangenheit betrug die Varianz der normalverteilten Lebensdauer einer bestimmten Batteriesorte* $\sigma^2 = 1,1$ *Jahre*^{2}. *Es soll nun auf Stichprobenbasis geprüft werden, ob sich durch Einführung eines kostengünstigeren Produktionsverfahrens die Varianz der Lebensdauer erhöht. Eine Stichprobe von* $n = 25$ *nach dem neuen Verfahren gefertigter Batterien liefert eine Varianz von* $s^2 = 1,6$ *Jahre*^{2} *(Signifikanzniveau* $\alpha = 0.01$*).*

Aufgabe 0.4 *Bei einer Qualitätskontrolle wurden* 21 *fehlerhafte Teile in einer Stichprobe vom Umfang* $n = 500$ *festgestellt. Prüfen Sie bei einem Signifikanzniveau* $\alpha = 0.05$ *die Angabe des Herstellers, in seiner Gesamtproduktion sei der Ausschussanteil nicht größer als* 3%.

Aufgabe 0.5 *Unter Berücksichtigung mut- und böswilliger Feuermeldungen werden in einer Stadt während der* 52 *Wochen eines Jahres gezählt:*

in	19	20	8	4	1 *Wochen*
gab es	0	1	2	3	4 *Feuermeldungen.*

(a) *Bestimmen Sie das arithmetische Mittel und die Varianz für die Feuermeldungen pro Woche.*

(b) *Ein Test hat ergeben, dass mit hoher Wahrscheinlichkeit die Anzahl der Feuermeldungen pro Woche ungefähr poissonverteilt mit dem geschätzten Parameter* λ *ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für* 5 *und mehr Feuermeldungen in einer Woche.*

(c) *Alle wieviel Jahre ist dieser Fall zu erwarten?*