Mathe IV für Informatiker (CV) SS 2008 **Übung 13**

OvG-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 13.1 *Ermitteln Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichung mithilfe der Variation der Konstanten:*

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Aufgabe 13.2 *Lösen Sie die folgende Differentialgleichung unter Berücksichtigung der angegebenen Bedingungen:*

$$a^3 \frac{d^2 s}{dt^2} + as = 1 \textit{ mit } a \in \mathbb{R} \textit{ für } s(a\pi) = 0 \textit{ und } \frac{ds(0)}{dt} = 1.$$

Aufgabe 13.3 *Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichung:*

$$2y'' + 2y' + 5y = 50 \cos 2x.$$

Aufgabe 13.4 *Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:*

$$y''' + y'' = 6x + e^{-x}.$$

Aufgabe 13.5 *Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:*

$$y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 7,6 \textit{ für } y(0) = 3 \textit{ und } y'(0) = 6.$$

Aufgabe 13.6 *Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:*

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}.$$

Abgabe: 07.07.2008

Mathe IV für Informatiker (CV) SS 2008 **Übung 12**
OvG-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 12.1 *Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem:*

$$y'' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \textit{mit} \quad y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\ln 2}{2} \quad \textit{und} \quad y'(\frac{\pi}{4}) = 1.$$

Aufgabe 12.2 *Lösen Sie die Differentialgleichung* $yy'' + (y')^2 = 0$ *mithilfe folgender Substitutionen:* $y' = u,\ y'' = \frac{du}{dx} = u\frac{du}{dy}$.

Aufgabe 12.3 *Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen folgender Differentialgleichungen:*

(a) $y'' - 4y' + 3y = 0$ *und*

(b) $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - 4x = 0.$

Aufgabe 12.4 *Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichung:* $y^{(8)} + y^{(6)} - y^{(4)} - y'' = 0$.

Aufgabe 12.5 *Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem* $y''' + y'' + 8y' = 10y$ *mit* $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$ *und* $y''(0) = -67$.

Aufgabe 12.6 *Bestimmen Sie die Funktion* y, *die die Gerade* $g(x) = x$ *im Punkt* $P(0,0)$ *berührt und der Gleichung* $y'' - y = 0$ *genügt.*

Abgabe: 30.06.2008

Mathe IV für Informatiker (CV) SS 2008 **Übung 11**

OvG-Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 11.1 *Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:*

(a) $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$

(b) $xy' + 2\sqrt{xy} = y$

Aufgabe 11.2 *Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:*

(a) $\frac{ds}{dt} = \frac{s}{t} - \frac{t}{s}$

(b) $t\frac{ds}{dt} - 2s = t^3 \ln t$

Aufgabe 11.3 *Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:*

$$xy' = y(1 + \ln \frac{y}{x}) \textit{ mit } y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Aufgabe 11.4 *Ermitteln Sie die Lösung des Anfangswertproblems*

$$xy' + y - e^x = 0 \textit{ mit } y(a) = b.$$

Aufgabe 11.5 *In einem Stromkreis mit konstantem Widerstand R und konstanter Selbstinduktion L genügt die Stromstärke der Differentialgleichung*

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E.$$

Dabei wird die elektromotorische Kraft $E = kt$ als linear abhängig von der Zeit t betrachtet. Zur Zeit $t = 0$ sei die Stromstärke $I = 0$.
Finden Sie eine Formel für die Stromstärke in Abhängigkeit von der Zeit t.

Aufgabe 11.6 *Lösen Sie folgende Differentialgleichung $x^2y' + xy = 1$, indem Sie die Substitution $t = xy$ und $dt = d(xy) = xdy + ydx$ benutzen.*

Abgabe: 23.06.2008

Mathe IV für Informatiker (CV) SS 2008 **Übung 10**

OvG-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 10.1 *Zeigen Sie, dass die Funktionen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-3x}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ *Lösungen der Differentialgleichung* $y''' - 9y' = 0$ *sind.*

Aufgabe 10.2 *Lösen Sie folgende Differentialgleichungen, indem Sie die Variablen trennen:*

(a) $y' + x^2 y' = 2xy$

(b) $\varphi^2 \frac{dr}{d\varphi} + r = 4$

(c) $2st \frac{ds}{dt} = 1 + t^2$

Aufgabe 10.3 *Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme*

(a) $x^2 y' + y^2 = 0$ *mit* $y(-1) = 1$

(b) $y' - 2y \cot x = \cot x$ *mit* $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$

(c) $\sin y \cos x = \cos y \sin x$ *mit* $y(0) = \frac{\pi}{4}$

Aufgabe 10.4 *Bestimmen Sie alle Funktionen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *die folgendes erfüllen:*

- *Der Berührungspunkt jeder Tangente von* f *halbiert die Strecke zwischen den Schnittpunkten dieser Tangente mit den Koordinatenachsen.*
- f *geht durch den Punkt* $P(-1, 1)$.

Aufgabe 10.5 *Gegeben sei die Gleichung* $\tan \varphi = \frac{y^2}{\sqrt{1-x}}$.

(a) *Bestimmen Sie alle Funktionen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = y$, *die der Gleichung genügen, wenn* φ *den Anstiegswinkel der Tangente an einen beliebigen Punkt* $P(x, y)$ *an die Funktion* f *bezeichnet.*

(b) *Welche der unter (a) ermittelten Funktionen geht durch den Punkt* $P_0(0, \frac{1}{2})$*?*

Abgabe: 16.06.2008

Mathe IV für Informatiker (CV) SS 2008 **Übung 9**
OvG-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 9.1 *Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit*

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \textit{ und } b = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ 16 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(a) *Prüfen Sie die Diagonaldominanz der Matrix A.*

(b) *Führen Sie zwei Iterationsschritte des Jacobi-Verfahrens mit dem Startvektor $x = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ durch.*

Aufgabe 9.2 *Gegeben sei das Gleichungssystem aus Aufgabe 9.1.*

(a) *Führen Sie zwei Iterationsschritte des Gauß-Seidel-Verfahrens mit dem Startvektor $x = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ durch.*

(b) *Vergleichen Sie das Ergebnis aus Aufgabe 9.1 b) mit dem Ergebnis aus a).*

Aufgabe 9.3 *Gegeben sei die Gleichung $3x^2 - e^x = 0$.*

(a) *Bestimmen Sie Intervalle $[a, b]$, in denen die drei Lösungen dieser Gleichung liegen.*

(b) *Bestimmen Sie diese drei Näherungswerte mithilfe des Newton-Verfahrens auf drei Stellen genau.*

Aufgabe 9.4 *Bestimmen Sie die größte Lösung der Gleichung aus Aufgabe 9.3 mit dem Sekantenverfahren auf drei Stellen genau und vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis aus Aufgabe 9.3 b).*

Aufgabe 9.5 *Zur näherungsweisen Bestimmung von $\sqrt{2}$ kann man das Newton-Verfahren zur Ermittlung der Nullstelle von $f(x) = x^2 - 2$ auf dem Intervall $I = [1, 2]$ heranziehen. Wieviele Iterationsschritte sind nötig, damit der Fehler $\frac{1}{512}$ nicht übersteigt? (Verwenden Sie Satz 21.30)*

Abgabe: 09.06.2008

Mathe IV für Informatiker (CV) SS 2008 **Übung 8**
OvG-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 8.1 *Berechnen Sie eine LU-Faktorisierung der Matrix A mit*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 8.2 *Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems $Ax = \left(\frac{2}{3}, 2, \frac{3}{2}\right)^T$ mit A aus Aufgabe 8.1, indem Sie die Brüche als Dezimalzahlen, gekürzt auf zwei Stellen, behandeln. Vergleichen Sie diese mit der exakten Lösung.*

Aufgabe 8.3 *Berechnen Sie eine Cholesky-Zerlegung der Matrix B mit*

$$B = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 11 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 8.4 *Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mithilfe einer QR-Faktorisierung:*

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -1 & \frac{5}{6} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{31}{30} \end{bmatrix}$$

Aufgabe 8.5 *Die Parameter a und b der sogenannten Regressionsgeraden $y = ax + b$ sollen aus den in folgender Tabelle aufgenommenen Messdaten $(y_i, x_i); i = 1, \ldots, 4$ ermittelt werden:*

x_i	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$
y_i	$4,0$	$4,2$	$4,4$	$4,5$

(a) Formulieren Sie das Problem als lineares Ausgleichsproblem.

(b) Bestimmen Sie a und b mithilfe einer QR-Faktorisierung.

Abgabe: 02.06.2008

Mathe IV für Informatiker (CV) SS 2008 **Übung 7**
OvG-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 7.1 *Berechnen Sie die Koeffizienten der Newton-Cotes-Formeln für $n = 2$ (die Simpson-Regel) und für $n = 4$ (die Milne-Regel).*

Aufgabe 7.2 *Berechnen Sie eine Näherung für $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ nach den unter 1) bestimmten Regeln für eine äquidistante Unterteilung des Intervalls $[1, 2]$ in 4 Teilintervalle.*

Aufgabe 7.3 *Laut Vorlesung lässt sich die Newton-Cotes Interpolationsformel mit $n = 1$ (Trapezformel)*

$$S(h) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

als Polynom $S(h) = \alpha_0 + \alpha_1 h^2 + \ldots + \alpha_m h^{2m}$ auffassen, für das gilt $S(0) = \int_a^b f(x)dx$.
Zeigen Sie: Wird $S(h)$ bezüglich der Stützstellen $(h_i^2, S(h_i))$ mit $h_0 = a - b$ und $h_{i+1} = \frac{h_i}{2}$ durch ein Interpolationspolynom T_r vom Grad r approximiert, so erhält man mithilfe des Neville-Algorithmus mit $x = 0$ und $x_i = h_i^2$ zur Berechnung eines Näherungswertes von $\int_a^b f(x)dx = S(0) \approx T_{rr}$ folgende Formeln:

$$\begin{aligned} T_{i0} &= S(h_i);\ i = 0, \ldots, r, \\ T_{ij} &= T_{i,j-1} + \frac{T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}}{(\frac{h_{i-j}}{h_i})^2 - 1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 7.4 *Man löse*

(a) *Zeigen Sie, dass die Matrixnorm $||A|| = \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{||Ax||}{||x||}$ die Normeigenschaften erfüllt.*

(b) *Bestimmen Sie die Kondition der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0,99 \end{bmatrix}$.*

Aufgabe 7.5 *Sei A eine reguläre $n \times n$ Matrix. Zeigen Sie, dass für alle orthogonalen Matrizen $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt: $||U \cdot A|| = ||A \cdot U|| = ||A||$.*

Abgabe: 26.05.2008

Mathe IV für Informatiker (CV) SS 2008 **Übung 6**
OvG-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 6.1 *Zeigen Sie, dass sich, numerisch günstig auswertbar, das Interpolationspolynom $p(x)$ in Lagranscher Form auch darstellen lässt durch*

$$p(x) = \begin{cases} y_i & \text{für} \quad x = x_i;\ i = 0, \dots, n \\ \frac{\Sigma_{i=0}^n \frac{c_i}{x-x_i} y_i}{\Sigma_{i=0}^n \frac{c_i}{x-x_i}} & \text{für} \quad x \neq x_i;\ i = 0, \dots, n \end{cases},$$

wobei $\frac{1}{c_i} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (x_i - x_k)$ *gilt.*

Aufgabe 6.2 *Gegeben sei die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \tan(\pi x)$ *an den Stützstellen* $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$ *und* $x_2 = \frac{1}{4}$ *(siehe auch Aufgabe 2.5!). Bestimmen Sie den Wert des Interpolationspolynoms* $p(x^*)$ *für* $x^* = 0,25$

(a) *nach der Methode von Lagrange*

(b) *nach der Methode von Newton*

(c) *mit dem Neville-Algorithmus.*

Aufgabe 6.3 *Schätzen Sie den Interpolationsfehler von* $p(x^*)$ *mit* $x^* = 0,25$ *aus der Aufgabe* **6.2** *mithilfe von Satz 21.6 der Vorlesung ab.*

Aufgabe 6.4 *Gegeben sei die Funktion* $f : \mathbb{R}_{>10} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \ln(x+10)$.

(a) *Ermitteln Sie einen Näherungswert für* $\ln 11,1$ *mithilfe der Polynominterpolation an den Stützstellen* $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ *und* $x_2 = 2$.

(b) *Schätzen Sie den Interpolationsfehler für* $\ln 11,1$ *ab.*

(c) *Wie hängt das Vorzeichen des Interpolationsfehlers von* x *ab?*

Aufgabe 6.5 *Gegeben sei die Funktion* $f : [0,1] \to [0,1]$ *mit* $f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$ *an den Stützstellen* $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ *und* $x_2 = 1$.

(a) *Bestimmen Sie das zugehörige Interpolationspolynom* $p(x)$.

(b) *Ermitteln Sie die parametrische Form* $C : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *mit* $C(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t_2$ *und* $a_i \in \mathbb{R}^2$ *der quadratischen Bezierkurve mit den Kontrollpunkten* $c_i = \begin{pmatrix} x_i \\ f(x_i) \end{pmatrix}$; $i = 0, 1, 2$.

(c) *Vergleichen Sie die Funktion* $f(x)$ *mit dem Interpolationspolynom* $p(x)$ *und der Bezierkurve* $C(t)$.

Abgabe: 19.05.2008

Mathe IV für Informatiker (CV) SS 2008 **Übung 5**

OvG-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 5.1 *Bestimmen Sie die Ebene, die die Fläche*

$$x^2 + 4y^2 + z^2 - 36 = 0$$

berührt und parallel zur Ebene $x + y - z = 0$ liegt.

Aufgabe 5.2 *Zeigen Sie, dass die Summe der Quadrate der Abschnitte, die von der Tangentialebene der Fläche*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0, \ a \in \mathbb{R}$$

auf den Koordinatenachsen erzeugt werden, gleich der konstanten Größe a^2 ist.

Aufgabe 5.3 *Welche Grundgesetze der Arithmetik reeller Zahlen gelten auf dem Computer nicht? Begründen Sie Ihre Aussagen.*

Aufgabe 5.4 *Formen Sie folgende Ausdrücke so um, dass ihre Auswertung möglichst ohne Auslöschung erfolgen kann:*

(a) $\sqrt{\frac{x+4}{x}} - \sqrt{1 + \frac{2}{x}}$

(b) $\frac{8}{x+2} - \frac{4-x}{4+x}$

(c) $\frac{1-\cos x}{x}$

Aufgabe 5.5 *Gegeben sei die Funktion $f : D \to [-1, 1]$ mit $f(x) = \sin \frac{\pi}{4} x$.*

(a) *Bestimmen Sie eine Näherung für das bestimmte Integral $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{4} x \, dx$, indem Sie das Interpolationspolynom $P_2(x)$ an den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ der Funktion $f(x)$ benutzen.*

(b) *Bestimmen Sie eine weitere Näherung für das Integral I, indem als Näherung für $f(x)$ das Taylorpolynom an der Stelle $x^* = 1$ benutzen.*

(c) *Vergleichen Sie die unter (a) und (b) erhaltenen Näherungswerte mit dem wirklichen Wert.*

Abgabe: 05.05.2008

Mathe IV für Informatiker (CV) SS 2008 **Übung 4**
OvG-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 4.1 *Bestimmen Sie den Normaleneinheitsvektor der Flächen*

(a) $S(s,t) = (s^2t, st^2, st)^T$ *in* $S(s_0, t_0)$,

(b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y - x\tan\frac{z}{a} = 0\}$ *im Punkt* $P(a, a, \frac{\pi}{4}a)$.

Aufgabe 4.2 *Sei* $S : [0, 2\pi]^2 \to \mathbb{R}^3$ *mit* $S(s,t) = \begin{pmatrix} (1+\cos s)\cos t \\ (1+\cos s)\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$ *eine Fläche.*

(a) *Bestimmen Sie den Normalenvektor der Fläche* S *in* $S(0, \frac{\pi}{4})$.

(b) *Bestimmen Sie die Tangentialebene von* S *in* $S(0, \frac{\pi}{4})$.

(c) *Skizzieren Sie die Fläche.*

Aufgabe 4.3 *Bestimmen Sie die Tangentialebene der Fläche*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (2a^2 - z^2)x^2 - a^2y^2 = 0\}$$

im Punkt $P(a, a, a)$.

Aufgabe 4.4 *Ermitteln Sie die parametrische Form* $S : [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ *mit* $S(s,t) = \sum\limits_{i=0}^{1}\sum\limits_{j=0}^{2} b_{i,1}(s)b_{j,2}(t)c_{ij}$ *der Bezierfläche mit den Kontrollpunkten* $c_{0,0} = (1,0,0)^T$, $c_{0,1} = (1,0,-1)^T$, $c_{0,2} = (-1,0,-1)^T$, $c_{1,0} = (0,1,0)^T$, $c_{1,1} = (0,1,-1)^T$ *und* $c_{1,2} = (0,0,1)^T$.

Aufgabe 4.5 *Sei die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \tan \pi x$ *an den Stützstellen* $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$ *und* $x_2 = \frac{1}{4}$ *gegeben.*

(a) *Bestimmen Sie das Interpolationspolynom* $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

(b) *Benutzen Sie zur Interpolation* $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2\frac{1}{x-\frac{1}{2}}$, *d. h. berechnen Sie die Konstanten* b_0, b_1 *und* b_2 *von* $Q(x)$.

(c) *Welche Näherungen ergeben sich aus (a) und (b) für* $\tan 20°$*?*

Abgabe: 28.04.2008

Mathe IV für Informatiker (CV) SS 2008 **Übung 3**
OvG-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 3.1 *Man ermittle die* parametrische Form $C : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^2$ *mit* $C(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ *und* $a_i \in \mathbb{R}^2$ *der quadratischen Bezierkurve mit den Kontrollpunkten*

$$c_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix},\ c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ c_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Man reparametrisiere das Ergebnis auf das Intervall $[-1, 1]$.

Aufgabe 3.2 *Man ermittle die* parametrische Form $B(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$, $a_i \in \mathbb{R}^3$, *der kubischen Bezierkurve mit den Kontrollpunkten*

$$c_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ c_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und bestimme die Geschwindigkeitsvektoren in den Punkten $B(0)$ *und* $B(1)$.

Aufgabe 3.3 *Man bestimme Kontrollpunkte* $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2$, *so dass die Bezierkurve*

$$B(t) = \sum_{i=0}^{2} b_{i,2}(t) c_i,\ t \in [0,1],$$

gleich der Kurve

$$C(t) = (2t - 1, 4t^2 - 4t + 1)^T,\ t \in [0,1],$$

ist.

Aufgabe 3.4 *Man löse*

(a) *Ermitteln Sie die parametrische Form* $B(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t_2 + a_3 t^3$, $a_i \in \mathbb{R}^2$, *der Kubischen Bezierkurve mit den Kontrollpunkten*

$$c_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(b) *Teilen Sie die Bezierkurve* $B(t)$ *in zwei Bezierkurven* B_l *und* B_r *dritten Grades, mit* $B_l(t) = B(\frac{1}{4}t)$ *für* $t \in [0,1]$ *und* $B_r(t) = B(\frac{1}{4} + (1 - \frac{1}{4})t)$ *für* $t \in [0,1]$.

Aufgabe 3.5 *Man bestimme Kontrollpunkte* $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}^3$*, so dass die Bezierkurve*

$$B(t) = \sum_{i=0}^{3} b_{i,3}(t)c_i,\ t \in [0,1],$$

gleich der Kurve

$$C(t) = (2t-1, 4t^2-4t+1, t^3)^T,\ t \in [0,1],$$

ist.

Abgabe: 21.04.2008

Mathe IV für Informatiker (CV) SS 2008 **Übung 2**
OvG-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 2.1 *Man berechne Geschwindigkeits- und Längenfunktion der Kurve*

$$C : [0, \pi/2] \mapsto \mathbb{R}^2 \textit{ mit } C(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)^T$$

und bestimme ihre Länge. Zudem gebe man eine Normalendarstellung der Tangente an, die die Kurve im Punkt $C(\pi/4)$ berührt.

Aufgabe 2.2 *Man bestimme Kontrollpunkte c_0, c_1, c_2, so dass die Bezierkurve*

$$B(t) = \sum_{i=0}^{2} b_{i,2}(t)c_i,\ t \in [0,1],$$

gleich der Kurve

$$c(x) = (2x - 1, 4x^2 - 4x + 1)^T,\ x \in [0,1],$$

ist. Man gebe zudem eine Reparametrisierung der Kurve $c(x)$ für das Intervall $[-1,1]$ an und zeichne eine Skizze von ihr und den Kontrollpunkten.

Aufgabe 2.3 *Man bestimme Kontrollpunkte $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}^3$, so dass die Bezierkurve*

$$B(t) = \sum_{i=0}^{3} b_{i,3}(t)c_i,\ t \in [0,1],$$

gleich der Kurve

$$C(t) = (2t - 1, 4t^2 - 4t + 1, t^3)^T,\ t \in [0,1],$$

ist.

Aufgabe 2.4 *Man gebe eine Reparametrisierung $\bar{C} : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^3$ der Kurve*

$$C(x) = ((x+2)^2, x^3 + 3x^2 + 3x, 3 + x)^T,\ x \in [-1,1],$$

an und bestimme Kontrollpunkte $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}^3$, so dass die Bezierkurve

$$B(t) = \sum_{i=0}^{3} b_{i,3}(t)c_i,\ t \in [0,1],$$

gleich der Kurve $\bar{C}(t), t \in [0,1]$, ist.

Aufgabe 2.5 *Man ermittle die* parametrische Form $B(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2, a_i \in \mathbb{R}^2$*, der quadratischen Bezierkurve mit den Kontrollpunkten*

$$c_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix},\ c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ c_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

und berechne $B(\frac{1}{2})$ und $B(\frac{3}{2})$.

Abgabe: 14.04.2008

Mathe IV für Informatiker (CV) SS 2008 **Übung 1**
OvG-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 1.1 *Seien $\gamma, r > 0$. Man berechne die Geschwindigkeitsvektor und die Längenfunktion von*

i) $c(t) = (\mathrm{e}^{\gamma\, t}\cos t, \mathrm{e}^{\gamma\, t}\sin t)^\intercal$, $t \in \mathbb{R}$,

ii) $c(t) = (r\, \cos t, r\, sin\, t, \gamma\, t)^\intercal$, $t \in \mathbb{R}$,

und skizziere den Verlauf.

Aufgabe 1.2 *Man berechne den (Einheits-)Tangentenvektor, den (Einheits-)Normalenvektor und eine Normalendarstellung der Tangente für*

$$c(t) = (t^2, t^3), \quad t \in \mathbb{R},$$

im Punkt c(1) und skizziere die Kurve.

Aufgabe 1.3 *Man bestimme den (Einheits-)Tangentenvektor, den (Einheits-)Normalenvektor und eine Normalendarstellung der Tangente für*

$$c = \{(x, y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 : x^2 + x^3 = y^2\},$$

im Punkt $(-1, 0)$ und skizziere die Kurve. Gibt es einen Normalenvektor im Punkt $(0, 0)$?

Aufgabe 1.4 *Sei $c(t) = (t - \sin t,\, 1 - \cos t)^\intercal$, $t \in [0, 2\,\pi]$. Man skizziere die Kurve, und berechne Ihre Länge.*

Aufgabe 1.5 *Man berechne eine Reparametrisierung mit konstanter Geschwindigkeit der Kurve*

$$c(t) = (\cos t + t\, \sin t, \sin t - t\, \cos t)^\intercal, t \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Abgabe: 07.04.2008