Mathematik II für Informatiker SS 2007 **Übung 13**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 13.1 *Bestimmen Sie die Stammfunktion folgender Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit Hilfe der angegebenen Substitutionen:*

a) $f(x) = \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}$ *(Substitution:* $t = e^x$*)*

b) $f(x) = \frac{1}{1+3\cos^2 x}$ *(Substitution:* $t = \tan x$*)*

c) $f(x) = \sin^2 x \cos x$ *(Substitution:* $y = \sin x$*)*

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ *(Substitution:)* $y = x + \sqrt{x^2+4}$

Aufgabe 13.2 *Bestimmen Sie die Integrale:*

a) $\int\limits_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2}$

b) $\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$ (*Substitution:* $x = t^2$)

c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x \, dx$

d) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \, dx$ (*Substitution:* $t = 4 - x^2$)

Aufgabe 13.3 *Bestimmen Sie die Stammfunktion folgender Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit Hilfe der partiellen Integration:*

a) $f(x) = x^2 e^{-x}$

b) $f(x) = e^x \sin x$

c) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

Aufgabe 13.4 *Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Gleichung:*

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \; dx = \frac{n-1}{n} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \; dx.$$

Aufgabe 13.5 *Bestimmen Sie die folgenden Integrale:*

a) $\int\limits_0^1 \ln(x+1) dx$

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \; dx$

c) $\int\limits_1^{3} \frac{dx}{x+x^2}$

Aufgabe 13.6 *Bestimmmen Sie den Inhalt der Fläche, die durch folgende Funktionen* $f_1 : D \to \mathbb{R}$ *und* $f_2 : D \to \mathbb{R}$ *(D jeweils maximal gewählt) begrenzt werden:*

a) $f_1(x) = x^2 \quad , \quad f_2(x) = 2 - x^2$

b) $f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad , \quad f_2(x) = \sqrt{4x}.$

Abgabe: 09.07.2007

Mathematik II für Informatiker SS 2007 **Übung 12**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 12.1 *Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n}$ *mit* $0 \le b < a$ *und ihren Konvergenzbereich.*

Aufgabe 12.2 *Gegeben sei das Integral* $\int_1^2 \frac{dx}{x}$.

(a) *Bestimmen Sie die Ober- und Untersumme bei der Teilung des Integrationsintervalles in fünf äquidistante Teile.*

(b) *Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (a) mit dem Integralwert* $\ln 2$.

Aufgabe 12.3 *Zeigen Sie mithilfe Lemma 13.10 aus der Vorlesung, dass die Funktion* $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = x^2$ *über* $[0, b]$ *integrierbar ist, d. h. zu jedem* $\varepsilon > 0$ *existiert eine Zerlegung* Z *von* $[0, b]$, *so dass* $O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon$. *Benutzen Sie die von* n *abhängige äquidistante Zerlegung* Z *der Form*

$$0 = x_0 < \frac{b}{n} = x_1 < 2\cdot\frac{b}{n} = x_2 < \ldots < k\cdot\frac{b}{n} = x_k < \ldots < x_n = b,\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Aufgabe 12.4 *Geben Sie mithilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung (Satz 13.13 der Vorlesung) eine obere und eine untere Schranke für das Integral* $\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}\,dx$ *an, wenn* $\int_0^{100} \frac{dx}{e^x} \approx 1$ *angenommen werden kann.*

Aufgabe 12.5 *Finden Sie die Stammfunktionen folgender Funktionen* $f : D \to \mathbb{R}$:

(a) $f(x) = 4x^7 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{8}x^4 + 24$

(b) $f(x) = \left(\frac{1+x}{x}\right)^2 - \left(\frac{1-x}{x}\right)^2$

(c) $f(x) = (1 + x)(1 - 2x)(1 + 3x)$

(d) $f(x) = \frac{e^{4x}+2e^x+5}{e^x}$

(e) $f(x) = \frac{x+3\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$

Abgabe: 02.07.2007

Mathematik II für Informatiker SS 2007 **Übung 11**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 11.1 *Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Grades an der jeweiligen Stelle $x^\star$ folgender Funktionen:*

(a) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}$ *an* $x^\star = 0$

(b) $f(x) = (2 - \frac{x}{a})^2$ *an* $x^\star = a \neq 0$

Aufgabe 11.2 *Zeigen Sie mithilfe eines geeigneten Taylorpolynoms der Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$, dass folgende Ungleichung für alle $x \in [0, 10^{-2}]$ gültig ist:*

$$0 \leq 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{x+1} \leq \frac{1}{8} \cdot 10^{-4}.$$

Aufgabe 11.3 *Berechnen Sie den Wert für* $\sin 2^\circ$ *mithilfe eines geeigneten Taylorpolynoms, so dass der absolute Fehler kleiner als* $5 \cdot 10^{-4}$ *ist. Wieviele Glieder sind nötig?*

Aufgabe 11.4 *Berechnen Sie mithilfe des Newton-Verfahrens die kleinste positive Lösung der Gleichung $x^3 + e^{-x} = 2$ auf 3 Stellen genau.*

Aufgabe 11.5 *Entwickeln Sie die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$ in einer Potenzreihe um den Nullpunkt (Taylorreihe mit dem Entwicklungspunkt $x^\star = 0$) und geben Sie den Konvergenzbereich der Reihe an.*

Aufgabe 11.6 *Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^{10}}{(1-x^2)}$ am Entwicklungspunkt $x^\star = 0$ und geben Sie den Konvergenzbereich der Reihe an.*

Abgabe: 25.06.2007

Mathematik II für Informatiker SS 2007 **Übung 10**
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 10.1 *Zeigen Sie mithilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung die Gültigkeit folgender Ungleichungen:*

(a) $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$; $x > 0$

(b) $|\arctan x - \arctan y| \leq \frac{1}{2}|x-y|$; $x, y \geq 1$.

Aufgabe 10.2 *Zeigen Sie, dass für eine im Intervall* $[a, b]$ *stetige und auf* (a, b) *differenzierbare Funktion* $f(x)$ *die Anwendung des Satzes von Rolle auf die Funktion*

$$\Phi(x) = \begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix}$$

auf den Mittelwertsatz der Differentialrechnung führt.

Aufgabe 10.3 *Gegeben sei die Funktion* $f : [\frac{1}{2}, 4] \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \log_2(x4^x)$ *und die Stützstellen* $x_0 = \frac{1}{2}, x_1 = 1, x_2 = 2$ *und* $x_3 = 4$.

(a) Ermitteln Sie das Interpolationspolynom durch x_0, x_1, x_2, x_3.

(b) Bestimmen Sie mithilfe des Interpolationspolynoms einen Näherungswert des Funktionswertes für $x = 3$.

(c) Mithilfe eines Rechners wurde der Wert für $\log_2 3 = 1,58496$ *ermittelt. Vergleichen Sie den unter Verwendung dieses Wertes ermittelbaren Näherungswert für* $f(x)$ *an der Stelle* $x = 3$ *mit dem unter (b) erhaltenen Näherungswert.*

Aufgabe 10.4 *Bestimmen Sie das Interpolationspolynom für die Funktion* $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \sqrt{x}$ *und den Stützstellen* $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 4$ *und berechnen Sie mithilfe des Interpolationspolynoms einen Näherungswert für* $\sqrt{\frac{1}{3}}$ *und* $\sqrt{3}$.

Aufgabe 10.5 *Gegeben sei die Funktion* $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \sqrt{x}$ *und die Stützstellen* $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 4$.

(a) Berechnen Sie die Kubischen Splines auf dem Intervall $[x_0, x_1]$ *und* $[x_1, x_2]$ *unter der Bedingung* $p_0''(x_0) = p_1''(x_2) = 0$.

(b) Berechnen Sie hieraus einen Näherungswert für $\sqrt{\frac{1}{3}}$ *und* $\sqrt{3}$.

(c) Vergleichen Sie die Näherungswerte mit den Näherungswerten aus Aufgabe 4 und denen mit einem Rechner berechneten Werten.

Abgabe: 18.06.2007

Mathematik II für Informatiker SS 2007 **Übung 9**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 9.1 *Berechnen Sie* $y''(1)$ *für* $y = (1 + \frac{1}{x})^x$.

Aufgabe 9.2 *Bestimmen Sie die* n*-te Ableitung folgender Funktionen:*
(a) $f(x) = a^x$ *(b)* $f(x) = \ln x$

Aufgabe 9.3 *Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ *an der Stelle* $x_0 = -1$.

Aufgabe 9.4 *Gegeben sei die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = xe^{-2x^2}$. *Berechnen Sie*

(a) Extremwerte und Wendepunkte

(b) Null- und Unstetigkeitsstellen

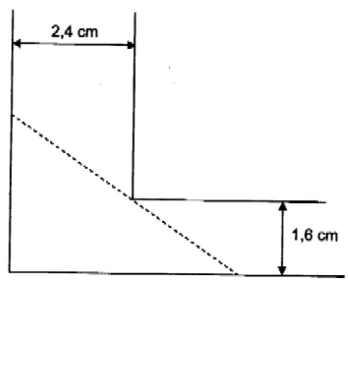
(c) Monotonie-, Konkavitäts- und Konvexitätsintervalle

(d) Untersuchen Sie das Verhalten im Unendlichen

(e) Skizzieren Sie das Bild der Funktion

Aufgabe 9.5 *Bestimmen Sie von der Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *mit*
$f(x) = (x-1)^2 e^{2x}$
(a) die Extremwerte *(b) und die Wendepunkte.*

Aufgabe 9.6 *Zwei Korridore der Breiten 2,4 m und 1,6 m schneiden zueinander im rechten Winkel (siehe Skizze!). Bestimmen Sie die größte Länge einer Leiter, die horizontal von dem einen Korridor in den anderen getragen werden kann.*



Abgabe: 11.06.2007

Mathematik II für Informatiker SS 2007 **Übung 8**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 8.1

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt x_0 differenzierbar sind:

1. $f(x) = |x-5| + 6x, \quad x_0 = 5$
2. $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}+x) & \textit{für } x < 0 \\ 1+x^2 & \textit{für } x \geq 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0.$

Aufgabe 8.2 *Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = \begin{cases} x & \textit{für } x \leq a \\ 2+bx^2 & \textit{für } x > a \end{cases}$$

stetig differenzierbar in $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 8.3

Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^3} + 3\sqrt[3]{x} - \frac{8}{3\sqrt{x}}$ (b) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(c) $f(x) = \sqrt{3 - \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ (d) $f(x) = \ln(\tan\frac{x}{2}) + \frac{\cos x}{2\sin^2 x}$

(e) $f(x) = \arctan 2x + \arctan\frac{1}{x}$ (f) $f(x) = \ln 2 + \ln\sqrt{\frac{e^{5x}}{e^{5x+3}}}$.

Aufgabe 8.4

Die an den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ im Punkt (x_0, y_0) gelegte Tangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Zeigen Sie, daß der Flächeninhalt des Dreieckes unabhängig von der Wahl des Punktes (x_0, y_0) ist.

Aufgabe 8.5

Man berechne mit Hilfe der Regel von L'Hospital folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x^3}{2(x^2-1)}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\ln(\sin x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to 2} (\frac{1}{x-2} - \frac{1}{\ln(x-1)})$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}}$

(e) $\lim\limits_{x\to \pi} (\pi - x) \tan \frac{x}{2}$ (f) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

(g) $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)^{\ln x}$.

Aufgabe 8.6 *Für differenzierbare Funktionen f mit positiven Funktionswerten gilt die Regel*

$$\frac{d}{dx}(\ln(f(x))) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Berechnen Sie damit die erste Ableitung von

(a) $f(x) = 2x^{3x}, (x > 0)$ (b) $f(x) = x^{\sin x}, (0 < x < \pi)$

(c) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} \cdot 3^x \cdot \cos^4 x}{(2+3x)^2}$.

Abgabe: 04.06.2007

Mathematik II für Informatiker SS 2007 **Übung 7**
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 7.1 *Zeigen Sie mithilfe von Definition 10.17 aus dem Skript, dass der Grenzwert* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-x-1}{1-x^2}$ *gleich* $-3/2$ *ist, indem Sie als Folgen* (x_n) *beliebige Folgen* $(1+a_n)$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *verwenden.*

Aufgabe 7.2 *Berechnen Sie folgende Grenzwerte:*

(a) $\lim\limits_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

(e) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\cos x - \cos a}{x-a}$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[10]{x^{15}}}{\sqrt[5]{x^{10}+x}}$

(g) $\lim\limits_{x\to 1-} x(2x+e^{\frac{1}{x-1}})^{-1}$

(h) $\lim\limits_{x\to 1+} x(2x+e^{\frac{1}{x-1}})^{-1}$

Aufgabe 7.3 *Es gilt der Satz: Für* n *stetige Funktionen* $f_1,\dots,f_n$ *in* $\mathbb{R}$ *sind auch die Funktionen*

$$F_{\min}(x) = \min_{1\le K\le n} f_K(x) \text{ und } F_{\max}(x) = \max_{1\le K\le n} f_K(x)$$

stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g_c(x) = \begin{cases} -c & \text{für } f(x) < -c \\ f(x) & \text{für } -c \le f(x) \le c \\ c & \text{für } f(x) > c \end{cases}$$

für jede stetige Funktion f *in* $\mathbb{R}$ *ebenfalls stetig in* $\mathbb{R}$ *ist.*

Aufgabe 7.4 *Gegeben sei die Funktion* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{für } |x| < 2 \\ 2 & \text{für } x = 2 \\ 3 & \text{für } |x| > 2 \text{ und } x = -2 \end{cases}$$

(a) Ermitteln Sie die Unstetigkeitsstellen; also die Stellen, an denen f nicht stetig ist.

(b) Skizzieren Sie das Bild der Funktion $f(x)$.

Aufgabe 7.5 *Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:*

(a) $f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

(b) $f(x) = \frac{2x^3-4x^2}{|x-2|}$

(c) $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{für } x < 1 \\ 2x & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$

Aufgabe 7.6 *Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktionenschar*

$$f_a(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x \leq 1 \\ 3 - ax^2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ist.

Abgabe: 29.05.2007

Mathematik II für Informatiker SS 2007 **Übung 6**

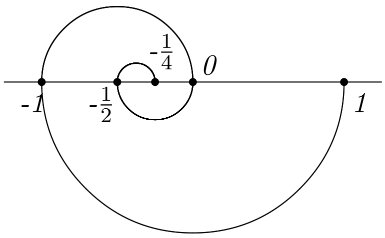
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

PROF. DR. MARTIN HENK, DR. MICHAEL HÖDING

Aufgabe 6.1 *Geben Sie an, für welche* $x \in \mathbb{R}$ *die folgenden Reihen konvergieren:*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{4n^3}$ *(b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{n(n+1)}$.

Aufgabe 6.2 *Eine Spirale wird folgendermaßen aus Halbkreisen zusammengesetzt: Man beginnt mit einem Halbkreis mit Radius 1. An dessen Ende wird gemäß der untenstehenden Zeichnung ein Halbkreis mit Radius* $1/2$ *angehängt, der wiederum von einem Halbkreis mit Radius* $1/4$ *fortgesetzt wird, usw.: Der Radius des folgenden Halbkreises ist stets halb so groß wie der des vorangegangenen. Untersuchen Sie, ob die Länge der so erzeugten Spirale endlich ist.*



Aufgabe 6.3 *Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls ihre Summe an:*

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^n}{5^{n+1}}$ *(b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(n+1)^2}{n^2+2n}$.

Aufgabe 6.4 *Untersuchen Sie die Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *auf Monotonie:*

(a) $f(x) = \frac{x+1}{x-2} (x \neq 2)$ *(b)* $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}, (x \geq 1)$.

Aufgabe 6.5 *(a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Gleichung* $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ *für beliebige* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a, b > 0$.

(b) Lösen Sie mithilfe der Gleichung aus (a) die folgende Gleichung:

$4 \log_4 x + 3 = 2 \log_x 2$.

Aufgabe 6.6 *Bestimmen Sie alle* $x \in \mathbb{R}$*, die die folgende Gleichung lösen:*

$$16 \cdot 5^{x-1} + 2 \cdot 3^x = 3^{x+3} - 5^{x-2}.$$

Abgabe: 21.05.2007

Mathematatik II für Informatiker SS 2007 **Übung 5**
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 5.1 *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge nichtnegativer Zahlen.*

(a) *Zeigen Sie:* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert* $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2$ *konvergiert*

(b) *Gilt die Umkehrung?*

Aufgabe 5.2 *Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf ihr Konvergenzverhalten mithilfe des Majorantenkriteriums:*

$$a)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}} \quad b)\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k-1}} \quad c)\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\ln k}$$

Aufgabe 5.3 *Untersuchen Sie mithilfe des Quotientenkriteriums folgende Reihen auf Konvergenz*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(3n-2)2^n} \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$$
$$c)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n}{(n+1)!} \quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!(n+3)!3^n}{(2n)!}$$

Aufgabe 5.4 *Bestimmen Sie die Summe folgender Reihen, indem Sie jedes Glied a_n dieser Reihen in zwei Brüche zerlegen, deren Nenner die beiden Nennerfaktoren des jeweiligen Gliedes a_n der Reihe ist:*

$$a)\ \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots \qquad b)\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{(k+2)!}$$

Aufgabe 5.5 *Geben Sie alle $x\in\mathbb{R}$ an, für die die folgende Reihe konvergiert:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n n!}{(n+1)^n}$$

Aufgabe 5.6 *Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$ konvergent, bzw. absolut konvergent?*

Abgabe: 14.05.2007

Mathematik II für Informatiker SS 2007 **Übung 4**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 4.1 *Untersuchen Sie folgende Zahlenfolgen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *auf Monotonie und Beschränktheit und geben Sie jeweils die ersten fünf Glieder an:*

(a) $a_n = \frac{n+1}{n^2+5}$

(b) $a_n = \frac{n+1}{2^n+5}$

Aufgabe 4.2 *Untersuchen Sie die folgenden rekursiv gegebenen Zahlenfolgen auf Monotonie und Beschränktheit:*

(a) $a_{n+1} = \frac{2}{a_n}$, a_0 *ist ein beliebiges aber festes Element des reellen Intervalls* $(1, 2)$

(b) $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $a_0 = \sqrt{2}$

Aufgabe 4.3 *Gegeben sei die Zahlenfolge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *mit* $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

(a) *Geben Sie ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *an, so dass für alle* $n \geq n_0$ *gilt* $|a_n - 1| < 0,01$.

(b) *Geben Sie für* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *an, so dass für alle* $n \geq n_0$ *gilt* $|a_n - 1| < \varepsilon$.

Aufgabe 4.4 *Geben Sie ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *an, so dass für alle* $n \geq n_0$ *gilt* $|a_n - a| < \varepsilon$.

(a) $a_n = \frac{1-\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}, a = -1,$

(b) $a_n = \frac{n^2-1}{3n^2+1}, a = \frac{1}{3}.$

Aufgabe 4.5 *Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:*

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-n^4}{n^4+3n^2-1}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2-1}{n^3\sqrt{4n^2+1}-2n^4}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n+1}$

Aufgabe 4.6 *Der Grenzwert der Zahlenfolge* (a_n) *mit* $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ *ist gleich* e. *Ermitteln Sie die Grenzwerte von*

(a) $a_n = (1 + \frac{2}{3n})^{3n}$,

(b) $a_n = (\frac{n}{n+1})^n$.

Abgabe: 07.05.2007

Mathematik II für Informatiker SS 2007 **Übung 3**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 3.1 *Seien* $\delta_1 = (1\ 4\ 3\ 2)$ *und* $\delta_2 = (1\ 3)$ *Permutationen aus der Gruppe* S_4.

(a) Bestimmen Sie die Gruppe G*, die von* $\{\delta_1, \delta_2\}$ *erzeugt wird und geben Sie die Verknüpfungstafel an.*

(b) Bestimmen Sie alle Untergruppen und Normalteiler von G.

Aufgabe 3.2 *Gegeben sei die abelsche Gruppe* $G = (M, *)$ *mit* $M = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ *und der gewöhnlichen Matrizenmultiplikation* $*$ *sowie den Matrizen*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Ist die Gruppe zyklisch?

(b) Bestimmen Sie die Ordnung der Gruppenelemente.

(c) Bestimmen Sie eine nichttriviale Untergruppe U *und zerlegen Sie* M *in Linksnebenklassen bezüglich* U.

Aufgabe 3.3 *Sei* $H = (C, \cdot)$ *die Gruppe mit* $C = \{1, -1, i, -i\}$ *und der gewöhnlichen Multiplikation* $\cdot$ *komplexer Zahlen. Ist* $G = (M, *)$ *aus Aufgabe 3.2 isomorph zur Gruppe* H*?*

Aufgabe 3.4 *15 Räuber erbeuteten eine Anzahl von Goldmünzen. Nach gleichmäßigem Aufteilen blieben 7 Münzen übrig. In einem Streit wurde ein Räuber erschlagen. Nun blieben nach dem Aufteilen 8 Münzen übrig. Wieder kam ein Räuber in einem weiteren Streit um und die Goldmünzen ließen sich nun gleichmäßig unter den verbliebenen 13 Räubern aufteilen. Wie viele Goldmünzen waren es? Benutzen Sie den Chinesischen Restsatz.*

Aufgabe 3.5 *Ein Zauberer legt 56 numerierte Spielkarten in 8 Zeilen und somit 7 Spalten auf einem Tisch aus und bittet einen Zuschauer, sich eine Karte zu merken. Der Zauberer fragt den Zuschauer, in welcher Spalte die Karte liegt. Dann sammelt der Zauberer die Karten in der gleichen Reihenfolge, in der sich die Karten zu Beginn des Tricks in seiner Hand befanden ein und legt sie anschließend in 7 Zeilen, also auch 8 Spalten erneut aus. Er fragt den Zuschauer abermals, in welcher Spalte sich die Karte befindet und erkennt nach kurzer Zeit die Karte, die sich der Zuschauer gemerkt hat. Finden Sie mithilfe des Chinesischen Restsatzes heraus, um welche Karte es sich handelt.*

Aufgabe 3.6 *Bestimmen Sie die letzte Ziffer der Zahl* 3^{1289} *mithilfe der Kongruenz* $3^4 \equiv 1 \mod 10$ *und den Eigenschaften von* $\mathbb{Z}_{10}$.

Abgabe: 30.04.2007

Mathematik II für Informatiker SS 2007 **Übung 2**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 2.1 *Sei* $M = \{m + n\sqrt{2} : m, n \in \mathbb{Z}\}$. *Zeigen Sie, dass die Menge* M *mit der gewöhnlichen Addition* $+$ *eine abelsche Gruppe bildet.*

Aufgabe 2.2 *Sei* $(G; 0)$ *eine Gruppe und* g_1, g_2, g *beliebige Elemente aus* G. *Zeigen Sie:*

(a) Gilt $g \circ g_1 = g \circ g_2$, *so gilt auch die Gleichung* $g_1 = g_2$.

(b) Es gibt ein $x \in G$ *und* $y \in G$ *mit* $g_1 \circ x = g_2$ *und* $y \circ g_1 = g_2$.

Aufgabe 2.3 *Sei in der endlichen Menge* $N = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ *folgende Operation* $\oplus$ *erklärt:*

$$k_1 \oplus k_2 = \begin{cases} k_1 + k_2 \text{ für } k_1 + k_2 \leq n-1 \\ k_1 + k_2 - n \text{ für } k_1 + k_2 \geq n. \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass die Menge N *mit der Operation* $\oplus$ *eine abelsche Gruppe bildet.*

Aufgabe 2.4 *Gegeben sei eine beliebige invertierbare* $n \times n$*-Matrix* C. *Zeigen Sie, dass die Menge* A_n *aller invertierbaren Matrizen* A *mit* $A \cdot C = C \cdot A$ *eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation bildet.*

Aufgabe 2.5 *Sei* M *die Menge der komplexen* 2×2*-Matrizen*

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}$$

mit $x, y \in \mathbb{C}$ *und* $\bar{x}, \bar{y}$ *konjugiert komplex zu* x, y. *Zeigen Sie, dass unter der Bedingung* $x\bar{x} + y\bar{y} > 0$ *die Menge* M *mit der gewöhnlichen Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.*

Aufgabe 2.6 *In der Menge* $G = \{a, b, c, d\}$ *sei die Operation* $*$ *durch folgende Operationstabelle gegeben:*

$*$	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	a	b	c	d
c	d	c	b	a
d	c	d	a	b

(a) Zeigen Sie, dass G *mit der Operation* $*$ *eine abelsche Gruppe bildet.*

(b) Bestimmen Sie die Ordnung aller Elemente von G.

(c) Bestimmen Sie alle nichttrivialen Untergruppen von $(G; *)$.

(d) Zeigen Sie, dass diese Untergruppen Normalteiler sind.

Abgabe: 23.04.2007

Mathematik II für Informatiker SS 2007 **Übung 1**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 1.1 *Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome und Eigenwerte folgender Matrizen:*

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1.2 *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = 1$ und A folgende Matrix:*

$$A = \begin{pmatrix} -ab & \frac{1}{2}(a^2 - b^2) & 0 \\ \frac{1}{2}(a^2 - b^2) & ab & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ermitteln Sie alle Eigenwerte von A.

Aufgabe 1.3 *Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.*

(a) *Geben Sie das charakteristische Polynom an.*

(b) *Berechnen Sie die Eigenwerte von A und die zugehörigen Eigenvektoren.*

(c) *Welche der Eigenvektoren sind zueinander orthogonal.*

Aufgabe 1.4 *Für die Matrix $B = \begin{pmatrix} b_1 & 2 & 2 \\ 2 & b_2 & 1 \\ 2 & 1 & b_3 \end{pmatrix}$ sei $x = (1, 0, -2)^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$.*

(a) *Was folgt hieraus für die Konstanten b_1, b_2 und b_3?*

(b) *Geben Sie einen weiteren Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 an.*

(c) *Lassen sich die Konstanten b_1, b_2 und b_3 so bestimmen, dass $\lambda_2 = -3$ ein weiterer Eigenwert von B ist?*

Aufgabe 1.5 *Sei* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ *eine reelle Matrix. Geben Sie eine Basis des* $\mathbb{R}^3$ *an, die aus Eigenvektoren von* A *besteht.*

Aufgabe 1.6 *Sei* $p(x) = a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$, *ein Polynom. Man bestimme eine* $3{\times}3$ *Matrix* A *mit* $\det(A) = p(x)$. *Kann man dies auf beliebige Polynome* $a_n\,x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1\,x + a_0$ *verallgemeinern?*

Abgabe: 16.04.2007