Mathematik III für Informatiker WS 2007/08 **Übung 13**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 13.1 *Zur Produktion von mindestens 100 Bauteilen einer Sorte* B_1 *und mindestens 150 Bauteilen einer Sorte* B_2 *stehen drei Maschinen* M_1, M_2 *und* M_3 *zur Verfügung. Die Tabelle gibt die Herstellungszeit (in Stunden) an, die für ein Bauteil der Sorte* B_i *auf der Maschine* M_k *benötigt wird. Die mögliche Einsatzzeit beträgt für* M_1 *180 Stunden, für* M_2 *150 Stunden, für* M_3 *100 Stunden.*

	M_1	M_2	M_3
B_1	2	(∗)	1
B_2	3	1,5	1

(∗) bedeutet: B_1 *kann auf* M_2 *nicht hergestellt werden.*

Wieviel Bauteile jeder Sorte hat jede Maschine zu produzieren, damit die Gesamtherstellungszeit minimiert wird?

(a) *Erarbeiten Sie für dieses lineare Optimierungsproblem ein mathematisches Modell.*

(b) *Geben Sie die Normalform an.*

Aufgabe 13.2 *Ein Betrieb hat die Möglichkeit, 2 Werkstücke* W_1 *und* W_2 *zu produzieren, wozu er seine nicht voll ausgelasteten Drehbänke, Fräs- und Hobelmaschinen ausnutzen kann. In der folgenden Tabelle sind die freie Maschinenkapazität, der Gewinn und die Bearbeitungszeit für ein Werkstück* $W_i (i = 1, 2)$ *angegeben:*

	Bearbeitungszeit in Minuten		Freie Maschinenkapazität in Minuten
	W_1	W_2	
Drehen	0	5	500
Fräsen	10	10	1500
Hobeln	10	5	1200
Gewinn in EURO	1	2	

(a) *Stellen Sie ein mathematisches Modell auf.*

(b) *Lösen Sie das LOP graphisch.*

Aufgabe 13.3 *Bestimmen Sie eine Lösungen des folgenden linearen Optimierungsproblems.*

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & 15x_1 & + & 8x_2 & - & 32x_3 & = & z \\
 & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & 8 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & \leq & 8 \\
 & 9x_1 & + & 5x_2 & - & 18x_3 & \leq & 36 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0.
\end{array}$$

Aufgabe 13.4 *Die Lebensdauer X (in Zeiteinheiten) einer Sorte von elektronischen Bauelementen sei durch die folgende Dichtefunktion gegeben*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ 0,06x^2 e^{-0,02x^3} & \text{für} \quad x > 0. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F(t)$.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein solches Bauelement mindestens 2 Zeiteinheiten ausfallfrei arbeitet?

(c) Welche Zeit überleben 90% der Bauelemente?

Aufgabe 13.5 *Eine Maschine stellt Verpackungsmaterial her, das ein Gewicht von 1000 g haben soll. Das tatsächliche Gewicht G (in g) lässt sich als eine normalverteilte Zufallsgröße mit $\mu = 1000$ auffassen.*

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Sollgewicht um mehr als 15 g überschritten wird, wenn $\sigma^2 = 100$ gilt?

(b) Wie groß darf σ höchstens sein, damit $P(950 \leq G \leq 1050) \geq 0,98$ gilt?

Aufgabe 13.6 *Um zu prüfen, ob beim Messen der Spannung mit einem Spannungsmeßgerät ein systematischer Fehler vorliegt, wird an einer vollständig geladenen 10 V-Batterie neun mal die Klemmspannung gemessen. Es ergaben sich folgende Werte in V:*
9,7; 10,2; 10,0; 9,6; 9,5; 10,1; 9,9; 9,4; 9,8

Testen Sie bei einem $\alpha = 0,05$ und $\sigma = 0,8$ die Hypothese H_0, dass kein systematischer Fehler vorliegt ($H_0 : \mu = \mu_0 = 10$), unter der Voraussetzung, dass die Messergebnisse normalverteilt sind.

Abgabe: 21. Januar 2008

Mathematik III für Informatiker WS 2007/08 **Übung 12**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

PROF. DR. MARTIN HENK, DR. MICHAEL HÖDING

Aufgabe 12.1 *Bestimmen Sie die lokalen Extremwerte der Funktion* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x, y) = 3x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 12y^2 + 3$.

Aufgabe 12.2 *Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x, y) = x^2 + y^2$ *unter der Nebenbedingung* $x^3 + y^3 + 1 = 0$.

Aufgabe 12.3 *Bestimmen Sie die Jacobimatrix und die Jacobideterminante der Abbildung* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *mit*

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \sin y \\ xyz \\ x \cos y \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.4 *Berechnen Sie das Integral* $\int_Q f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ *für die Funktion*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad mit \quad f(x, y) = \sin(2x + y)$$

über dem Integrationsbereich $Q = [1, 2] \times [0, 4]$.

Aufgabe 12.5 *Berechnen Sie das Integral* $\int_B f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$, $f(x, y) = e^{x+y}$, *auf dem Normalbereich* B, *der aus dem Rechteck mit den Eckpunkten* $(0, 2)$, $(-1, 2)$, $(-1, -2)$ *und* $(0, -2)$ *und der an dieses Rechteck angesetzten Halbkreisscheibe* $x^2 + y^2 = 4$, $(x \geq 0)$ *besteht.*

Aufgabe 12.6 *Berechnen Sie das Integral* $\int_B f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ *mit Hilfe von Polarkoordinaten für die Funktion*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad mit \quad f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

auf dem Normalbereich $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$.

Abgabe: 14. Januar 2008

Mathematik III für Informatiker WS 2007/08 **Übung 11**
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 11.1 *Vier gleiche Computerchips haben, bezogen auf die Zeit* t*, die gleiche Zuverlässigkeit von* $0,9$.
X *sei die Anzahl der während der Zeit* t *funktionstüchtigen Computerchips.*

(a) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wenigstens zwei Chips funktionstüchtig sind.*

(b) *Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz.*

Aufgabe 11.2 *Eine Lieferung von 100 DVD's wird einer Qualitätskontrolle unterzogen. Hierzu wird eine Stichprobe von 5 DVD's überprüft. Der Hersteller gibt an, dass die Lieferung 10 fehlerhafte DVD's enthält. Die Lieferung wird zurückgeschickt, wenn unter den 5 geprüften DVD's mehr als eine DVD fehlerhaft ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Lieferung zurückgeschickt?*

Aufgabe 11.3 *In einer Werkstatt einer Computerfirma unterliege die zufällige Reparaturdauer eines Computers einer Exponentialverteilung mit dem Parameter* $\lambda = 0,5$.

(a) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zur Reparatur eines beliebigen Computers mindestens 3 Stunden benötigt werden.*

(b) *Wieviel Stunden werden im Durchschnitt zur Reparatur eines Computers benötigt?*

Aufgabe 11.4 *Auf einer Maschine werden Computerkabel hergestellt, deren Länge* L *eine Normalverteilte Zufallsgröße mit* $\mu = 25\,cm$ *und* $\sigma = 0,05\,cm$ *ist.*

(a) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Länge eines Kabels zwischen* $24,86\,cm$ *und* $25,14\,cm$ *liegt?*

(b) *Wie viel Prozent der Kabel sind länger als* $25,1\,cm$*?*

(c) *Bestimmen Sie* δ *derart, dass* $P(|L - \mu| < \delta) = 0,92$ *gibt.*

Aufgabe 11.5 *Die Lebensdauer eines Computerbauteiles ist annähernd normalverteilt mit einer Standardabweichung von* $\sigma = 600\,h$. *Eine zufällige Stichprobe vom Umfang* $n = 36$ *ergibt eine durchschnittliche Lebensdauer von* $3000\,h$. *Bestimmen Sie ein* $95\,\%$*-tiges Konfidenzintervall für den unbekannten Parameter* μ *der Normalverteilung.*

Aufgabe 11.6 *Der durchschnittliche Preis eines bestimmten Druckertyps lag im letzten Jahr bei 120,00 EUR.*

(a) Lässt sich diese Angabe mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,05$ *auch für dieses Jahr aufrechterhalten, wenn unterstellt wird, dass die Preise normalverteilt mit* $\sigma^2 = 100$ *sind und eine Testkaufserie von 100 Stück dieses Typs in diesem Jahr einen Durchschnittspreis von 121,50 EUR ergab.*

(b) Würde sich die Testentscheidung in (a) ändern, wenn der Stichprobenumfang 400 bei gleichem Stichprobenergebnis gewesen wäre?

Abgabe: 7. Januar 2007

Mathematik III für Informatiker WS 2007/08 **Übung 10**
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 10.1 *Für die unabhängig arbeitenden Computer betragen die Intaktwahrscheinlichkeiten* $0,9$ *und* $0,85$ *bzw.* $0,8$ *bezogen auf ein Jahr. Sei* X *die Anzahl der Computer, die während des Jahres störungsfrei arbeiten.*

(a) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitstabelle der Zufallsgröße* X.

(b) *Berechnen Sie die Verteilungsfunktion* $F(x)$.

(c) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Jahr wenigstens zwei Computer intakt sind.*

Aufgabe 10.2 *Ein Netz aus fünf unverzweigt geschalteten gleichartigen elektrischen Geräten arbeitet nicht, weil genau eines der Geräte defekt ist. Sei* X *die Anzahl der Geräte, die überprüft werden müssen (ohne Zurücklegen), um festzustellen, welches der Geräte defekt ist.*

(a) *Berechnen Sie die Verteilungsfunktion* $F(x)$ *der Zufallsgröße* X *unter der Voraussetzung, dass jedes Gerät mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausfällt.*

(b) *Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion.*

(c) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei und höchstens vier Geräte überprüft werden müssen, um festzustellen, welches der fünf Geräte defekt ist.*

(d) *Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von* X.

Aufgabe 10.3 *Die Lebensdauer* X *(in Zeiteinheiten) einer Sorte von Bauelementen eines Computers kann durch die Dichtefunktion*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad x \leq 0 \\ 0,8xe^{-0,4x^2} & \textit{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

beschrieben werden.

(a) *Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von* X.

(b) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein solches Bauelement mindestens 4 Zeiteinheiten arbeitet?*

(c) *Welche Zeit überleben* 80% *der Bauelemente?*

Aufgabe 10.4 *Eine Zufallsgröße X besitze folgende Verteilungsfunktion*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad t \le 1 \\ \frac{3}{3}x + \frac{3}{4} & \textit{für} \quad -1 < t \le \frac{1}{3} \\ 1 & \textit{für} \quad \frac{1}{3} < t \end{cases}$$

(a) *Bestimmen Sie die Dichtefunktion $f(x)$.*

(b) *Berechnen Sie den Erwartungswert $E(x)$.*

Aufgabe 10.5 *Sei $f(x)$ eine durch*

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \textit{für} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

gegebene Funktion.

(a) *Zeigen Sie, dass $f(x)$ Dichtefunktion einer Zufallsgröße X ist.*

(b) *Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$.*

(c) *Berechnen Sie $E(X)$ und $Var(X)$.*

Aufgabe 10.6 *Sei $f(x)$ eine durch*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad x < 1 \\ a \ln x & \textit{für} \quad 1 \le x \le e \\ 0 & \textit{für} \quad x > e \end{cases}$$

gegebene Funktion.

(a) *Bestimmen Sie die Konstante $a \in \mathbb{R}$ so, dass f Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße X ist.*

(b) *Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$.*

Abgabe: 17.12.2007

Mathematik III für Informatiker WS 2007/08 **Übung 9**
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 9.1 *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter der Voraussetzung der Gleichwahrscheinlichkeit einer Mädchen- und Jungengeburt in einer Familie mit 5 Kindern*

(a) *genau 2 Mädchen und 3 Jungen sind?*

(b) *alles Mädchen sind?*

Aufgabe 9.2 *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Lottospiel "6 aus 49", dass ein Spieler*

(a) *"6 Richtige" hat?*

(b) *einen "Dreier" hat?*

Aufgabe 9.3 *Der Verursacher eines Verkehrsunfalls hat Fahrerflucht begangen. Ein Unfallzeuge macht folgende Angaben über das Kfz-Kennzeichen: Das Ortskennzeichen war MD, dem eine der Buchstabengruppen EU, EV, EY und drei Ziffern folgten. Die erste Ziffer war eine 3 und unter den restlichen zwei Ziffern war mindestens eine 4. Der Zeuge sieht alle auf Grund dieser Angaben möglichen Kennzeichen als gleichwertig an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass*

(a) *das Kennzeichen EY enthält?*

(b) *die ersten beiden Ziffern 34 sind?*

(c) *die letzten beiden Ziffern 46 lauten?*

(d) *unter den Ziffern eine 0 vorkommt?*

(e) *die letzte Ziffer größer als die beiden anderen ist?*

Aufgabe 9.4 *In einer Schaltung sind die Bauteile B_1 und B_2 in Reihe (unverzweigt) geschaltet. Zu diesen beiden Bauteilen ist ein weiteres Bauteil B_3 parallel (verzweigt) geschaltet. Die Bauteile B_1, B_2 und B_3 fallen mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,05$ und $0,08$ bzw. $0,1$ unabhängig voneinander aus.*

(a) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt die Schaltung aus?*

(b) *Wieviel Bauteile der Sorte B_3 müssen mindestens parallel dazugeschaltet werden, wenn die Schaltung höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit von $2 \cdot 10^{-4}$ ausfallen soll?*

Aufgabe 9.5 *In einer Lieferung von 12 Druckern sind 4 nicht voll funktionstüchtig. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 2 aufeinanderfolgenden Funktionstest 2 Drucker einwandfrei arbeiten, wenn*

(a) *der zuerst überprüfte Drucker in die Werkstatt gebracht wurde,*

(b) *der zuerst überprüfte Drucker leider zu den anderen zurückgestellt wurde und nicht mehr festzustellen ist, welcher der nicht funktionstüchtige Drucker war.*

Aufgabe 9.6 *Ein Computernetz wird* $24\,h$ *benutzt. Die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall des Netzes in der Zeit von 7:00 Uhr bis 17:00 Uhr beträgt* $0,3$. *In der Zeit von 17:00 Uhr bis 23:00 Uhr fällt das Netz mit einer Wahrscheinlichkeit von* $0,15$ *und in der restlichen Zeit mit einer Wahrscheinlichkeit von* $0,05$ *aus. Bestimmen Sie die totale Wahrscheinlichkeit für den Ausfall des Computernetzes.*

Abgabe: 10.12.2007

Mathematik III für Informatiker WS 2007/08 **Übung 8**
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 8.1 *Lösen Sie die linearen Optimierungsprobleme aus den Aufgaben 7.1 und 7.4 mit dem Simplexalgorithmus.*

Aufgabe 8.2 *Lösen Sie das lineare Optimierungsprobleme mit dem Simplexalgorithmus:*

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \max\{ & 600x_1 & + & 200x_2 & + & 300x_3 & : & \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 2200 \\ & 10x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & \leq & 7200 \\ & 500x_1 & + & 225x_2 & + & 300x_3 & \leq & 20\,000 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0\} \end{array}$$

Aufgabe 8.3 *Bestimmen Sie alle Ecken des Polygons*

$$\begin{array}{lrcrcl} P = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1, \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 5, \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 8, \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0\}. \end{array}$$

Desweiteren bestimme man für jede Ecke $\mathbf{x}$ *eine Kostenfunktion* $\mathbf{c}$*, so dass* $\mathbf{x}$ *die einzige Lösung des LOP's* $\max\{\mathbf{c}^\intercal \mathbf{x} : \mathbf{x} \in P\}$ *ist.*

Aufgabe 8.4 *Bestimmen Sie für folgendes lineares Optimierungsproblem eine erste zulässige Lösung mithilfe des Simplexalgorithmus (Phase I):*

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \min\{ & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & : & \\ & 3x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & \leq & 0 \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & & & \geq & 10 \\ & & & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 4 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0\} \end{array}$$

Aufgabe 8.5 *Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus. Bestimmen Sie dazu zuerst eine erste zulässige Lösung mit der Phase I.*

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \min\{ & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & : & \\ & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & 2x_1 & - & x_2 & & & \leq & 3 \\ & x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 2 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0\} \end{array}$$

Abgabe: 03.12.2007

Mathematik III für Informatiker WS 2007/08 **Übung 7**
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
PROF. DR. MARTIN HENK, DR. MICHAEL HÖDING

Aufgabe 7.1 *Erarbeiten Sie für das folgende Problem ein mathematisches Modell: Ein Computerbauteil wird aus zwei verschiedenen Bauteilen in unterschiedlichen technologischen Verfahren hergestellt. Jedes der beiden technologischen Verfahren erfordert 3 wesentliche Einsatzgrößen (z. B. Arbeitsaufwand in Zeiteinheiten, Energiekosten in Cent und Materialumfang in Stück), die nur in beschränktem Umfang zur Verfügung stehen. Der erforderliche Einsatz an Einsatzgrößen je Computerbauteil ist in folgender Tabelle für jedes technologische Verfahren zusammengestellt:*

Einsatzgröße	*Aufwand an Einsatzgrößen*		*Verfügbare Fonds der Einsatzgrößen*
	1. Verfahren	*2. Verfahren*	
Arbeitsaufwand	*10*	*11*	*750*
Energiekosten	*3*	*2*	*200*
Materialumfang	*25*	*27*	*2000*

In welchem Umfang muss die Produktion des Computerbauteils nach den beiden technologischen Verfahren durchgeführt werden, damit die Produktionsmenge maximal wird?

Aufgabe 7.2 *Geben Sie solche Werte der reellen Konstanten a, b, c, d an, sodass für das lineare Optimierungsproblem*

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & - & x_2 & = & z \\ & -2x_1 & + & ax_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & bx_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & + & x_2 & \geq & c \\ & dx_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & \leq & 1 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

eine der folgenden Aussagen gilt:

(a) *Es besitzt genau eine Optimallösung.*

(b) *Der zulässige Bereich ist leer.*

(c) *Der zulässige Bereich ist unbeschränkt und das Problem ist lösbar.*

(d) *z ist nach oben unbeschränkt.*

(e) *Es besitzt unendlich viele Lösungen.*

Aufgabe 7.3 *Rundeisenstangen der Länge $l = 20$ m sind in kürzere Stangen zu zerschneiden. Benötigt werden:*

mindestens 4000 Stück der Länge $l_1 = 9$ m,
mindestens 5000 Stück der Länge $l_2 = 8$ m,
mindestens 3000 Stück der Länge $l_3 = 6$ m.
Stellen Sie ein mathematisches Modell zur Ermittlung eines Zuschnittplanes mit minimalem Verbrauch an 20 m-Stangen auf. Benutzen Sie als Variablen die Anzahl der jeweils möglichen Zuschnittvarianten.

Aufgabe 7.4 *Ein Betrieb hat die Möglichkeit aus drei bei seiner Hauptproduktion anfallenden Abfallstoffen A_1, A_2, A_3 drei Produkte P_1, P_2, P_3 herzustellen. Die Tabelle gibt an, wieviel Mengeneinheiten (ME) von A_i für eine ME von P_j erforderlich sind. Ferner enthält die Tabelle die von A_i zur Verfügung stehende ME ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$). Wie viele ME von den P_j sind herzustellen, wenn der durch die Produktion der P_j insgesamt erzielbare Gewinn möglichst groß sein soll? Der Gewinn pro ME P_1 ist 60,- EUR, pro ME P_2 40,- EUR und pro ME P_3 100,- EUR.*

	P_1	P_2	P_3	*verfügb. ME*
A_1	*5*	*2*	*6*	*450*
A_2	*2*	*4*	*4*	*260*
A_3	*1*	*6*	*2*	*200*

Stellen Sie ein math. Modell auf.

Aufgabe 7.5 *Geben Sie zu folgenden linearen Optimierungsproblemen die Normalform an:*
(a)

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\min & 2x_1 & - & 4x_2 & & & & & = & z \\
& x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\
& x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & = & -11 \\
& & & & - & 3 & \le & x_2 & \le & 10 \\
& & & & & & & 2x_3 & \ge & 4 \\
& & & & & & & x_1, x_4 & & \textit{beliebig}
\end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max & x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & z \\
& x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & & = & 38 \\
& 2x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & & & = & 51 \\
& & & 5x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \ge & 49 \\
& x_1 & & & & & & & \ge & -28 \\
& & & & & \multicolumn{3}{c}{0 \le x_2 \le 10} & & \\
& & & & & & & x_3, x_4 & & \textit{beliebig}
\end{array}$$

Aufgabe 7.6 *Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge mit $C \neq \emptyset$. Zeigen Sie: Ist für ein $x \in C$ die Menge $C \backslash \{x\}$ konvex, dann ist x Eckpunkt von C, d. h. x lässt sich nicht als konvexe Linearkombination von zwei Elementen aus C darstellen.*

Abgabe: 26.11.2007

Mathematik III für Informatiker WS 2007/08 **Übung 6**
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 6.1 *Berechnen Sie das Integral* $\int\limits_D \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} d\mathbf{x}$

(a) auf dem Normalbereich $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |(x,y)| \leq \frac{1}{2}\}$

(b) auf D *aber durch eine geeignete Transformation in Polarkoordinaten*

Aufgabe 6.2 *Bestimmen Sie das Integral* $\int\limits_D (xy) d\mathbf{x}$*, wenn der Normalbereich* $D = T(\widetilde{D})$ *in Polarkoordinaten durch*
$\widetilde{D} = \{(r,\varphi) : a \leq r \leq b,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 < a \leq b;\ a,b \in \mathbb{R}\}$ *gegeben ist.*

Aufgabe 6.3 *Eine Fläche* B *im* $\mathbb{R}^2$ *werde durch die Kurven* $x = 0,\ y = 2x$ *und* $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ *eingeschlossen. Bestimmen Sie den Schwerpunkt von* B*.*

Aufgabe 6.4 *Stellen Sie für folgendes Lineares Optimierungsproblem ein mathematisches Modell der Form* $\max\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ *auf:*
Ein Schiff mit einer Ladefähigkeit von 7000 t und einer Laderaumkapazität von 10 000 m^3 *soll drei Güter* G_1, G_2 *und* G_3 *in solchen Mengen laden, dass der Frachtertrag möglichst groß wird. Die folgende Tabelle zeigt für jedes Gut die notwendigen Angaben:*

	G_1	G_2	G_3
angebotene Menge in t	*3500*	*4000*	*2000*
benötigter Laderaum in m^3*/t*	*1,2*	*1,1*	*1,5*
Frachtertrag in EUR/t	*250*	*300*	*350*

Aufgabe 6.5 *Lösen Sie die linearen Optimierungsprobleme*

$$\max\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \textit{ und } \min\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle : A\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

graphisch für $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 13 \\ 15 \end{bmatrix}$ *und*

(a) $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Abgabe: 19.11.2007

Mathematik III für Informatiker WS 2007/08 **Übung 5**
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 5.1 *Berechnen Sie die Integrale* $\int\limits_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ *und skizzieren Sie den Normalbereich* D *für folgende Funktionen* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*:*

(a) $f(x, y) = x + 2y$ *für* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 3, (y-1)^2 \leq x \leq 3\}$,

(b) $f(x, y) = 1 + xy + y$ *für* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1+x^2}\}$, *unter Verwendung der Substitution* $x = \sinh(t)$ *bzw.* $t = \operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ *zur Lösung des Integrals* $\int \sqrt{1+x^2}dx$.

Aufgabe 5.2 *Berechnen Sie das Integral* $\int\limits_D e^{x+y} d\mathbf{x}$ *auf dem Dreieck* D *mit den Eckpunkten* $(1, 1)$, $(1, 2)$ *und* $(2, 2)$.

Aufgabe 5.3 *Berechnen Sie das Integral* $\int\limits_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ *auf dem Normalbereich* D *für die Funktion* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *mit*

$f(x, y, z) = xyz$ *für* $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x \leq 2,\ x \leq y \leq 3x,\ 0 \leq z \leq xy\}$.

Aufgabe 5.4 *Berechnen Sie das Integral*

$$\int\limits_0^8 \int\limits_{x-1}^{3+\frac{x}{2}} \int\limits_0^{x+y+4} (x + y + z)dz\, dy\, dx.$$

Durch welche Flächen wird der zugehörige Normalbereich D *begrenzt?*

Aufgabe 5.5 *Der Normalbereich*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \sin x\}$$

ist mit Masse der Dichte $\varrho(x, y) = 1 + x + 4y$ *belegt.*
Bestimmen Sie die Gesamtmasse $m = \int\limits_D \varrho(\mathbf{x})d\mathbf{x}$.

Abgabe: 12.11.2007

Mathematik III für Informatiker WS 2007/08 **Übung 4**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

PROF. DR. MARTIN HENK, DR. MICHAEL HÖDING

Aufgabe 4.1 *Die Funktion* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(y-x) - \frac{3}{2}$ *sei auf der Menge* $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$ *erklärt. Bestimmen Sie die Länge und Größe der absoluten Extrema von* f.

Aufgabe 4.2 *Berechnen Sie die Integrale* $\int\limits_Q f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ *und skizzieren Sie die Integrationsbereiche* Q *für folgende Funktionen* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*:*

(a) $f(x,y) = (x-y)^2$ *für* $Q = [-1,1] \times [-2,3]$,

(b) $f(x,y) = \frac{1}{y^3} \sin(\frac{x}{y})$ *für* $Q = [\frac{\pi}{2}, \pi] \times [\frac{1}{2}, 1]$.

Aufgabe 4.3 *Berechnen Sie das Integral* $\int\limits_Q f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ *für die folgenden Funktionen* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$*:*

(a) $f(x,y,z) = xy^2$ *für* $Q = [0,1] \times [-1,2] \times [0,1]$,

(b) $f(x,y,z) = \frac{2yz}{x+y^2+z^2}$ *für* $Q = [1,2] \times [0,1] \times [0,1]$.

Aufgabe 4.4 *Berechnen Sie das Integral* $\int\limits_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ *und skizzieren Sie den Normalbereich für folgende Funktion* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*:*

$$f(x,y) = \frac{2y}{1+x^2} \text{ für } D = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x^2\}$$

Aufgabe 4.5 *Berechnen Sie das Integral von Aufgabe 4.4 noch einmal, indem Sie beim Integrieren eine andere Reihenfolge verwenden.*

Abgabe: 05.11.2007

Mathematik III für Informatiker WS 2007/08 **Übung 3**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 3.1 *Gegeben seien die Funktion* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x,y) = x^2 e^y$, *die Funktion* $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $x = x(t)$ *und* $y = y(t)$. *Ermitteln Sie* $\frac{d\,f(x,y)}{d\,t}$ *mittels Kettenregel, wenn*

i) $x = t^2$ *und* $y = \ln t^2$,

ii) $x = \ln t^2$ *und* $y = t^2$.

Aufgabe 3.2 *Bestimmen Sie die lokalen Extremwerte der Funktion* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4a^2xy + 8a^4$ *in Abhängigkeit des Parameters* $a \in \mathbb{R}$ *mit* $a \neq 0$.

Aufgabe 3.3 *Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x,y) = x^2 + xy - 2y^2$ *unter der Nebenbedingung* $2x + y = 8$.

Aufgabe 3.4 *Sei* $D = \{(x,y)^\intercal : x^2 + y^2 \leq 1\}$. *Bestimmen Sie die lokalen Extremwerte der Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x,y) = x^3 + y^3$.

Aufgabe 3.5 *Eine Straße hat die Form einer Parabel* $y = x^2$. *Bestimmen Sie einen Punkt* $P = (x,y)$ *dieser Kurve, so dass das Quadrat des Abstandes* $\|P - P_0\|^2$ *zum Punkt* $P_0 = (3,5)$ *minimal wird.*

Aufgabe 3.6 *Die Funktion* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *mit*

$$F(x,y,z) = (F_1, F_2, F_3)^\intercal = \left(\frac{x}{x^2+y^2+1}, \frac{y}{x^2+y^2+1}, z \right)^\intercal$$

beschreibt ein Kraftfeld. Zeigen Sie, dass es sich hierbei um ein konservatives Kraftfeld handelt, d. h.

$$rot\,F = \nabla \times F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Die linke Seite $\mathrm{rot}\,F = \nabla \times F$ *wird als Rotation bezeichnet, wobei der „Gradient als Nabla-Operator* ∇*“ geschrieben wird.*

Abgabe: 29.10.2007

Mathematik III für Informatiker WS 2007/08 **Übung 2**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 2.1 *Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Abbildung*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2y + e^{xz^2} \\ 4z^3 - \sin(ye^x) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.2 *Bestimmen Sie die Jacobimatrix und ihre Determinante (Jacobideterminante) der Abbildung*

$$f(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}, \text{ wobei } r > 0,\ \varphi \in (0,2\pi), \vartheta \in (0,\pi).$$

Aufgabe 2.3 *Gegeben seien die Funktionen* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x,y) = e^{3x+2y}$, $g_1(t) = \cos t$, $g_2(t) = t^2$. *Bestimmen Sie die Ableitung*

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial g_1} \cdot \frac{dg_1}{dt} + \frac{\partial h}{\partial g_2} \cdot \frac{dg_2}{dt}$$

der Parameterfunktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $h(t) = f(g_1(t), g_2(t))$.

Aufgabe 2.4 *Bestimmen Sie Lage und Art der Extremwerte der Funktion* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

Aufgabe 2.5 *Welches Volumen kann ein Quader maximal haben, wenn seine Raumdiagonale die Länge 1 aufweist?*

Aufgabe 2.6 *In einem Produktionsprozeß läßt sich die Abhängigkeit der Produktionskosten* K *(in Geldeinheiten) von den Produktionsmengen* q_1, q_2 *und* q_3 *(in Mengeneinheiten) dreier Produkte durch den folgenden Zusammenhang beschreiben:*

$$K(q_1,q_2,q_3) = 10 + q_1^2 - 2\ln(q_1q_2) + q_2^2 - 3q_2 + 2q_3^2.$$

Bestimmen Sie die optimalen Produktionsmengen q_1, q_2 *und* q_3*, so dass die Kostenfunktion* $K(q_1,q_2,q_3)$ *ein Minimum annimmt.*

Abgabe: 22.10.2007

Mathematik III für Informatiker WS 2007/08 **Übung 1**
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 1.1 *Ermitteln Sie die maximal möglichen Definitionsbereiche* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *der folgenden Funktionen* $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *und zeichnen Sie die Höhenlinien, d.h.* $\{(x, y) \in D : f(x, y) = \text{const.}\}$.

(a) $f(x, y) = \frac{x}{y}$

(b) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

(c) $f(x, y) = y^2 - x^2$

(d) $f(x, y) = \frac{xy}{x-y}$

Aufgabe 1.2 *Untersuchen Sie die Funktion* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für} \quad x^2+y^2 > 0 \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

Aufgabe 1.3 *Für* $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ *skizzieren Sie den Schnitt des Graphen mit der 2-dimensionalen Ebene* $\{x_1 - x_2 = 0 \wedge x_2 - x_3 = 1\}$.

Aufgabe 1.4 *Bestimmen Sie die ersten partiellen Ableitungen für*

(a) $f(x, y) = x^y + y^x$

(b) $f(x, y) = \ln(\sqrt{x}\sqrt{y})$

(c) $f(x, y) = x^{(y^2)}$

(d) $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Aufgabe 1.5 *Berechnen Sie den Gradienten der Funktion* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x, y) = e^{2x-y} \sin(x + y)$ *an der Stelle* (π, π).

Aufgabe 1.6 *Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen dritter Ordnung für*

(a) $f(x, y) = \sin(x \cdot \sin y)$

(b) $f(x, y, z) = x^{y+z}$.

Abgabe: 15.10.2007

Mathematik III für Informatiker WS 2007/08 **Übung 0**
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 0.1 *Berechnen Sie den Flächeninhalt der folgenden ebenen Mengen A und B und skizzieren Sie diese:*

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{y},\ 0 \leq y \leq \sqrt{x},\ x + y \leq \frac{3}{4}\}$

(b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2y^2 \leq x \leq 1 - 3y^2\}$

Aufgabe 0.2 *Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und bestimmen Sie im Falle der Existenz ihren Wert:*

(a) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x \ln x} dx$

(b) $\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$

(c) $\int\limits_0^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^3}} dx$

(d) $\int\limits_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx$ *mit* $\lambda > 0$

Aufgabe 0.3 *Berechnen Sie einen Näherungswert für* π, *indem Sie auf das Integral* $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$ *die* Simpsonsche Regel *anwenden. Zerlegen Sie dazu den Integrationsbereich in vier Teilintervalle.*

Aufgabe 0.4 *Rotiert eine Ellipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ *jeweils um die x-Achse bzw. y-Achse, so entstehen Rotationskörper mit einem Volumen* V_x *bzw.* V_y. *Diese Volumen lassen sich nach folgenden Formeln berechnen:* $V_x = \pi \int\limits_{-a}^{a} y^2 dx$ *und* $V_y = \pi \int\limits_{-b}^{b} x^2 dy$.

(a) *Berechnen Sie* V_x *und* V_y.

(b) *Zeigen Sie, dass* $\frac{V_x}{V_y} = \frac{b}{a}$ *gilt.*

Aufgabe 0.5

1. *Für die „Sägezahnfunktion“*

$$f(t) = \begin{cases} t + \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} < t < 0 \\ t, & 0 < t < \frac{1}{2} \end{cases}$$

   berechne man das 2.te und 8.te Fourierpolynom und stelle sie zusammen mit f graphisch dar.

2. *Entwickeln Sie die Funktion* $f(t) = t$, $t \in [-\pi, \pi]$, *in eine Fourierreihe.*