Universität Magdeburg 16.12.2006

Test: Mathematik für Informatiker I

Name:	**Mat.Nr.:**
Übungsgruppe:	
Erreichte Punktezahl:	**Klausurpunkte:**

Kreuzen Sie die richtigen Antworten an.

1. **Relationen und Abbildungen**

☒ Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann injektiv, wenn zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ existiert mit $f(x) = y$.
siehe Definition 2.16 i)

☒ Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann surjektiv, wenn zu jedem $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ existiert mit $f(x) = y$.
siehe Definition 2.16 ii)

☐ Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -|x| + x^2$. f ist bijektiv.
z.B. ist f nicht injektiv da $f(1) = 0 = f(-1)$.

☒ Die Umkehrabbildung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ mit $f(x) = 2^x$ ist die Abbildung $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \ln(x)/\ln(2)$.
es ist $g(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)} = \log_2(x)$, also $g(f(x)) = \log_2(2^x) = x$; siehe Bemerkung 0.12

2. **Elementares Zählen und komplexe Zahlen**

☒ Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$.
folgt aus Satz 3.13 mit $0 = (1-1)^n$ und war Beispiel zu diesem Satz in der Vorlesung

☒ In $\mathbb{Z}_7$ gilt $[2]_7 + [35]_7 = [-12]_7$.
z.B. ist $[35]_7 = [0]_7$ und $[-12]_7 = [2]_7$

☒ $(7 + \mathrm{i})/(3 - \mathrm{i}) = 2 + \mathrm{i}$.
$(2 + \mathrm{i})(3 - \mathrm{i}) = 6 - 2\,\mathrm{i} + 3\,\mathrm{i} - \mathrm{i}^2 = 7 + \mathrm{i}$

☒ $2(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}) \cdot 3(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}) = 6\,\mathrm{i}$.
siehe Bemerkung 3.47 und beachte, dass $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

3. **Matrizen**

Seien $A, B, C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ reguläre Matrizen, und sei $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Welche der folgenden Aussagen gelten allgemein?

☐ $(A + B)^2 = A^2 + 2\,A\,B + B^2$.
wegen $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + A\,B + B\,A + B^2$ ist die Aussage äquivalent zu $B\,A = A\,B$, was im Allgemeinen nicht gilt; siehe Beispiel nach Satz 4.24

☒ $(\lambda \cdot A \cdot B)^{-1} = \lambda^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$.
siehe Satz 4.32

☒ Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $\mathbf{x}^\mathsf{T} A\, \mathbf{y} = \mathbf{y}^\mathsf{T} A^\mathsf{T} \mathbf{x}$.
wegen $\mathbf{x}^\mathsf{T} A\, \mathbf{y} \in \mathbb{K}$ *ist* $\mathbf{x}^\mathsf{T} A\, \mathbf{y} = (\mathbf{x}^\mathsf{T} A\, \mathbf{y})^\mathsf{T}$ *und mit Satz 4.24 iv) ist* $(\mathbf{x}^\mathsf{T} A\, \mathbf{y})^\mathsf{T} = \mathbf{y}^\mathsf{T} A^\mathsf{T} \mathbf{x}$

☐ Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dann gilt $A \cdot B = B \cdot A$.
z.B. ist für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B \cdot A$

4. **Vektorräume**

☐ Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ sind linear unabhängig, wenn eine Linearkombination von $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ den Nullvektor ergibt.
siehe Definition 5.19

☒ Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ sind linear abhängig, wenn ihre Summe $\mathbf{0}$ ist.
siehe Definition 5.19

☐ $\{(1,2,0)^\mathsf{T}, (1,1,1)^\mathsf{T}, (3,5,1)^\mathsf{T}\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^3$.
die Vektoren sind linear abhängig, da z.B. $2\cdot(1,2,0)^\mathsf{T} + (1,1,1)^\mathsf{T} - (3,5,1)^\mathsf{T} = (0,0,0)^\mathsf{T}$*;*
siehe Definition 5.27

☐ $\{(x_1,x_2,x_3)^\mathsf{T} \in \mathbb{C}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = i\}$ ist ein 2-dimensionaler Teilraum des $\mathbb{C}^3$.
z.B. ist $(0,0,0,)^\mathsf{T}$ *nicht in der Menge enthalten; siehe Satz 5.6*

5. **Aufgabe** Gegeben sei das folgende inhomogene Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 + \alpha \\ x_1 \qquad + \alpha\, x_3 \qquad &= 2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

und sei L der Lösungsraum des zugehörigen *homogenen* Gleichungssystems.

i) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\dim_\mathbb{R} L = 1$.

ii) Im Falle $\dim_\mathbb{R} L = 2$ bestimme man alle Lösungen des obigen inhomogenen Gleichungssystems.

z.B.: Man überführt die erweiterte Matrix des Gleichungssystems in „Stufenform“

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+\alpha \\ 1 & 0 & \alpha & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & (\alpha-1)/2 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & (1-\alpha)/2 \end{pmatrix}.$$

Für das homogene System ergibt sich somit die „Stufenform“

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $\alpha \neq 1$ ist nur die Variable x_4 frei wählbar, und somit ist in diesem Fall $\dim_{\mathbb{R}} L = 1$. *Für $\alpha = 1$ ist auch x_3 frei wählbar, und dann ist* $\dim_{\mathbb{R}} L = 2$. *Für $\alpha = 1$ reduziert sich die erweiterte Matrix des inhomogenen Gleichungssystems zu*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist der Lösungsraum des inhomogenen Gleichungssystems gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$