Universität Magdeburg 07.06.2008

Test: Mathematik für Informatiker IV (CV-Zweig)

Name:	**Mat.Nr.:**
Übungsgruppe:	
Erreichte Punktezahl:	**Bonuspunkte:**

Für eine *wahre* Aussage tragen Sie bitte ein **w** in das Kästchen ein; für eine *falsche* Aussage ein **f**. Sollten Sie die Antwort nicht wissen, dann können Sie das Kästchen auch leer lassen.

1. **Kurven**

w Die Kurve $c : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit $c(t) = ((t^2 + 1)\cos t, (t^2 + 1)\sin t)$ hat an der Stelle $t = 0$ die Geschwindigkeit 1.

Es ist $\dot{c}(t) = (2t\cos t - (t^2 + 1)\sin t, 2t\sin t + (t^2 + 1)\cos t)$, also $\dot{c}(0) = (0, 1)$. Also hat c in $t = 0$ die Geschwindigkeit $||\dot{c}(0)|| = 1$.

f Eine Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt algebraisch genau dann, wenn es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$.

vgl. Bemerkung 20.2

w Sei $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ die Bézierkurve bzgl. den Kontrollpunkten $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}^2$. Dann ist $c(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ in der konvexen Hülle der $c_1, \ldots, c_m$ enthalten.

vgl. Satz 20.16 iii)

w Betrachten Sie die Kurve $c(t) = (\sin t - \cos t - t\cos t, \sin t + \cos t + t\sin t)$ auf dem Intervall $[0, 1]$. Die Länge von c beträgt $\frac{3}{2}$.

Es ist $\dot{c}(t) = (\cos t + \sin t - \cot t + t\sin t, \cos t - \sin t + \sin t + t\cos t) = (\sin t(1 + t), \cos t(1 + t))$. Es folgt

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_0^1 ||\dot{c}(t)||dt = \int_0^1 \sqrt{\sin t^2(1+t)^2 + \cos t^2(1+t)^2}dt \\ &= \int_0^1 (1+t)dt = \left[t + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

2. **Interpolationspolynome**

w Das Interpolationspolynom bzgl. den Stützstellen $(0, 2), (1, 10)$ und $(2, 24)$ ist $3x^2 + 5x + 2$.

Nach Satz 21.1 gibt es zu drei gegebenen Stützstellen genau ein Interpolationspolynom vom Grad zwei. Es reicht also zu zeigen, dass die drei gegebenen Punkte die Gleichung $y = 3x^2 + 5x + 2$ erfüllen, was man leicht nachrechnet.

$\boxed{\text{f}}$ Zu vier beliebigen Stützstellen $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq i \leq 4$, gibt es genau ein Polynom p vom Grad höchstens 4, mit $p(x_i) = y_i, 1 \leq i \leq 4$.

Eindeutigkeit ist nur gegeben, wenn man als Höchstgrad 3 betrachtet. (vgl. Satz 21.1)

$\boxed{\text{w}}$ Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$ und p das Interpolationspolynom bzgl. den Stützstellen $(-1, \frac{1}{e}), (0,1)$ und $(1, e)$. Der Fehler $|f(\frac{1}{2}) - p(\frac{1}{2})|$ ist nicht größer als $\frac{1}{4}$.

Nach Satz 21.6 kann man den Fehler wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} |f(\tfrac{1}{2}) - p(\tfrac{1}{2})| &\leq \frac{\max\limits_{x\in[-1,1]} |f'''(x)|}{3!} |(\tfrac{1}{2} - x_0)(\tfrac{1}{2} - x_1)(\tfrac{1}{2} - x_2)| \\ &= \frac{\max\limits_{x\in[-1,1]} |e^x|}{6} |(\tfrac{1}{2} + 1)(\tfrac{1}{2} - 0)(\tfrac{1}{2} - 1)| = \frac{e}{16} < \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{w}}$ Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$. Die Approximation von $\int_a^b f(x)dx$ mittels Trapezregel ist stets größer als der exakte Wert.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x_i = a + i\frac{b-a}{n}, i = 0, \dots, n$ eine äquidistante Einteilung des Intervalls $[a,b]$. Nach der Trapezregel (vgl. Beispiel 21.11) gilt nun

$$T_n := \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{2n}(f(x_i) + f(x_{i+1})) \approx \int_a^b f(x)dx.$$

Für $f(x) = x^2$ liegt die Verbindungslinie von $(x_i, f(x_i))$ mit $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ stets oberhalb des Funktionsgraphen im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$. Somit ist der Flächeninhalt jedes der Trapeze in der obigen Formel echt größer als $\int_{x_i}^{x_{i+1}} x^2dx$ und damit gilt für die Approximation $T_n > \int_a^b x^2dx$.

3. **Numerik I**

$\boxed{\text{f}}$ Für jede $n \times n$ Matrix A gibt es eine untere und obere Dreiecksmatrix L und U mit $A = L\,U$.

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ist $L = (l_{i,j})$ eine untere, und $U = (u_{i,j})$ eine obere Dreiecksmatrix mit $A = L\,U$, so erhält man durch Ausmultiplizieren die Bedingungen:

$$u_{1,1}\,l_{1,1} = 0, \quad u_{1,1}\,l_{2,1} = 1, \quad u_{1,2}\,l_{1,1} = 1, \quad u_{1,2}\,l_{2,1} + u_{2,2}\,l_{2,2} = 0.$$

Aus den ersten beiden folgt $l_{1,1} = 0$. Dies führt in der dritten zu einem Widerspruch.

$\boxed{\text{f}}$ Sei A eine $m \times n$-Matrix mit $m \geq n$ und $\operatorname{rang} A = n$, und sei $b \in \mathbb{R}^m$. Dann gibt es immer eine Lösung von $A\,x = b$.

Sei $m = 2, n = 1$, und $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = (1, -1)^\intercal$. Dann hat das Gleichungssystem $A\,x = b$ sicherlich keine Lösung.

$\boxed{\text{f}}$ Sei A eine $m \times n$-Matrix mit $m \geq n$ und $\operatorname{rang} A = n$, und sei $b \in \mathbb{R}^m$. Dann gibt es ein $x^\star \in \mathbb{R}^n$ mit $\|A\,x^\star - b\| \geq \|A\,x - b\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Sei $y \in \mathbb{R}^n$ mit $A\,y \neq 0$. Dann gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|A(\lambda\,y) - b\| \geq \|A\lambda\,y\| - \|b\| = |\lambda|\,\|A\,y\| - \|b\|.$$

Die rechte Seite kann beliebig groß werden, insbesonder größer als $\|A\,x^\star - b\|$.

$\boxed{\text{w}}$ Sei P eine $n \times n$- Permutationsmatrix. Dann ist $P^\intercal P = I_n$.

In jeder Zeile und Spalte von P steht genau eine 1 und sonst nur Nullen. Damit ist das Skalarprodukt zwischen zwei verschiedenen Spalten 0, und zwischen den selben Spalten 1. Dies ist aber nur eine Umformulierung von $P^\intercal P = I_n$.

4. Numerik II

$\boxed{\text{f}}$ Die Kondition einer Matrix kann kleiner als 1 sein.

Aufgrund der Submultiplikativität der Norm folgt (vgl. 2.15) $\operatorname{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \geq \|A\,A^{-1}\| = \|I_n\| = 1$.

$\boxed{\text{f}}$ Die Kondition einer $n \times n$ orthogonalen Matrix ist n.

Die Kondition der Einheitsmatrix ist 1.

$\boxed{\text{w}}$ Für eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{i,j})$ sei $|A| = \max\{|a_{i,j}| : 1 \leq i, j \leq n\}$. Dann ist $|\cdot|$ eine Norm auf dem Vektorraum der $n \times n$-Matrizen.

Im Zweifelsfall nachrechnen!

$\boxed{\text{w}}$ Sei $|\cdot|$ eine Matrixnorm. Für je zwei Matrizen A, B gilt: $|A - B| \geq |A| - |B|$. Wie bei einer Vektornorm folgt dies aus der Dreiecksungleichung für Normen:

$$|A| = |A - B + B| \leq |A - B| + |B|.$$

5. Aufgabe

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie eine LU-Faktorisierung $A = LU$ der Matrix A.

(b) Bestimmen Sie eine Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ indem Sie zuerst einen Vektor y mit $Ly = b$ und anschließend einen Vektor x mit $Ux = y$ bestimmen.

zu a) (vgl. Satz 21.17)

$$
\begin{array}{cccc}
 & L_k & U_k & \\
k=0: & \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&8\\1&1&2\end{pmatrix}, & \\
k=1: & \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&-1&-1\end{pmatrix}, & \begin{array}{l}\alpha_{1,2}=-2\\ \alpha_{1,3}=-1\end{array} \\
k=2: & \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}, & \alpha_{2,3}=1
\end{array}
$$

Also ist

$$
L=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}
$$

zu b) Aus $Ly=b$ folgt

$$
\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad \text{also}\quad \begin{array}{ll} y_1 & =1\\ y_2=1-2y_1 & =-1.\\ y_3=1-y_1+y_2 & =-1\end{array}
$$

Aus $Ux=y$ folgt

$$
\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\quad \text{also}\quad \begin{array}{ll} x_3 & =-1\\ x_2=-1-2x_3 & =1\\ x_1=1-2x_2-3x_3 & =2\end{array}\ .
$$