Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

# Modulprüfung Mathematik IV

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik

SS 2010
01.10.2010

| Name | Vorname | Fachrichtg. | Matrikelnr. |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Punkte Klausur**

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| max. Punkte | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** |
| Punkte | | | | | | |

| Punkte Klausur | $\sum$ | Note |
|---|---|---|
| | | |

**Bitte beachten!**

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Bearbeitungszeit 120 Minuten.

**Viel Erfolg!**

**1. Kurven I**

Sei $B : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ die durch die Kontrollpunkte

$$c_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

definierte Bézierkurve.

i) Bestimmen Sie die Kontrollpunkte der Kurve $\dot{B}(t)$.

ii) Skizzieren Sie die Kurven $B$ und $\dot{B}$.

LÖSUNG

i) Es ist

$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{i=0}^{3} b_i, m(t)c_i = (1-t)^3 c_0 + 3(1-t)^2 t c_1 + 3(1-t)t^2 c_2 + t^3 c_3 \\ &= \begin{pmatrix} -t^3 + 3t^2 + 3t - 2 \\ 6t^3 - 9t^2 + 3t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Komponentenweises ableiten liefert

$$\dot{B}(t) = \begin{pmatrix} -3t^2 + 6t + 3 \\ 18t^2 - 18t + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 18 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 6 \\ -18 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich mit Satz 20.15 für die Kontrollpunkte $d_i$ von $\dot{B}(t)$, dass

$$\begin{aligned} d_0 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, d_1 = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}, \\ d_2 &= \begin{pmatrix} -3 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alternativ ist

$$\begin{aligned} c(t) &= \sum_{i=0}^{2} b_{i,3}(t) d_i = (1-t)^2 d_0 + 2(1-t)t d_1 + t^2 d_2 \\ &= d_0 + (-2d_0 + 2d_1)t + (d_0 - 2d_1 + d_2)t^2. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen $\binom{3}{3} = d_0$, $\binom{6}{-18} = -2d_0 + 2d_1$ und $\binom{-3}{18} = d_0 - 2d_1 + d_2$ aus denen man durch sukzessives Einsetzen die Punkte $d_i$ ermittelt.

ii)

**2. Kurven II**

Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, und sei $c_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ die Kurve $c_k(t) = (\cos(t)^k, \sin(t)^k)$.

i) Man skizziere die Kurven $c_k$ für $k = 1$, $k = 2$ und berechne für $k = 2$ ihre Länge.

ii) Man bestimme die Tangente von $c_k$ im Punkte $t = \frac{\pi}{4}$.

LÖSUNG

i) Für $k = 1$ erhält man den Kreis mit Radius 1. Für $k = 2$ ist $c_2(t) = (\cos(t)^2, \sin(t)^2)$, d.h. die $x, y$ Koordinaten der Punkte auf der Kurve erfüllen stets $x + y = 1$.

Somit durchläuft $c_2(t)$ für $t \in [0, 2\pi]$ viermal das Segment, welches $(1, 0)^\intercal$ und $(0, 1)^\intercal$ verbindet. Die Länge ist daher $4\sqrt{2}$, bzw. für $k = 2$ ist

$$\dot{c_2}(t) = \begin{pmatrix} -2\cos t \sin t \\ 2 \sin t \cos t \end{pmatrix} \text{ und } ||\dot{c_2}(t)|| = 2\sqrt{2}\sqrt{\cos^2 t \sin^2 t}.$$

Also ergibt sich für die Länge der Kurve $c_2$

$$\int_0^{2\pi} ||\dot{c_2}(t)||\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos(t)^2 \sin(t)^2}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} |\cos t \sin t|\,\mathrm{d}t$$
$$2\sqrt{2} \cdot 4 \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t\,\mathrm{d}t = 8\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2}\right) = 4\sqrt{2}.$$

ii) Allgemein ist

$$\dot{c_k}(t) = \begin{pmatrix} -k\cos^{k-1} t \sin t \\ k \sin^{k-1} t \cos t \end{pmatrix} \text{ und für } t = \frac{\pi}{4} \text{ ergibt sich } \dot{c_k}(\pi/4) = \begin{pmatrix} -k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \\ k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \end{pmatrix},$$

bzw. $\dot{c_k}(\pi/4) = k\,\sqrt{2}^{-k}(-1, 1)^\intercal$. Beachte $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$. Weiterhin ist $c_k(\pi/4) = \sqrt{2}^{-k}(1, 1)^\intercal$. Damit ist die Tangente in $\pi/4$ gegeben durch

$$\left\{\sqrt{2}^{-k}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\right\} \text{ bzw. durch } \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x + y = \sqrt{2}^{2-k}\right\}.$$

**3. Numerik I**

Seien $\sigma_i$ für $i = 1, 2$ die $i$-ten elementarsymmetrischen Funktionen in $x, y$.

i) Zeigen Sie, dass
$$x^4 + y^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2.$$

ii) Bestimmen Sie alle Lösungen (in $\mathbb{C}$) des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{ccccc} x^4 & + & y^4 & = & 17 \\ x & + & y & = & 3. \end{array}$$

LÖSUNG

i) Mittels Satz 21.42 wird $x^4 + y^4$ als ein Polynom in den Unbekannten $\sigma_1$ und $\sigma_2$ geschrieben. Daraus folgt

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= (x+y)^4 - (4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3) = \sigma_1^4 - 2xy(2x^2 + 3xy + 2y^2) \\ &= \sigma_1^4 - 2\sigma_2(2(x+y)^2 - xy) = \sigma_1^4 - 2\sigma_2(2\sigma_1^2 - \sigma_2) = \\ &= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2. \end{aligned}$$

ii) Da $\sigma_1 = x + y = 3$, liefert das Einsetzen von $i)$ in $x^4 + y^4 = 17$

$$\sigma_2^2 - 18\sigma_2 + 32 = 0.$$

Somit erhalten wir $\sigma_2 = 2$ und $\sigma_2 = 16$.
Mit $\sigma_2 = xy = 2$ und $\sigma_1 = x + y = 3$ sind die Lösungen dieses Systems, die Lösungen der folgenden Gleichung $z^2 - 3z + 2 = 0$, d.h., $(x, y) \in \{(2, 1), (1, 2)\}$.
Mit $\sigma_2 = xy = 16$ und $\sigma_1 = x + y = 3$, sind die Lösungen dieses Systems, die Lösungen der folgenden Gleichung $z^2 - 3z + 16 = 0$, d.h., $(x, y) \in \{(\frac{3+\sqrt{55}i}{2}, \frac{3-\sqrt{55}i}{2}), (\frac{3-\sqrt{55}i}{2}, \frac{3+\sqrt{55}i}{2})\}$.

## 4. Numerik II

1. Für eine reelle $n \times n$ Matrix $A$ mit Einträgen $a_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$, sei $||A||$ definiert als $||A|| = \max\{|a_{ij}| : 1 \leq i, j \leq n\}$.

   i) Berechnen Sie $||A^m||$ für $m \in \mathbb{N}$ und
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   ii) Man zeige oder widerlege:

   a) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$
   b) $||A \cdot B|| \leq ||A|| \cdot ||B||$

LÖSUNG

i) Da

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 2^2 \\ 2^2 & 2^2 \end{bmatrix}$$

gilt, kann man vermuten, dass

$$A^m = \begin{bmatrix} 2^{m-1} & 2^{m-1} \\ 2^{m-1} & 2^{m-1} \end{bmatrix}$$

gilt. Wir beweisen dies per Induktion über $m$. Für $m = 1$ und $m = 2$ ist es klar. Angenommen, dass

$$A^m = \begin{bmatrix} 2^{m-1} & 2^{m-1} \\ 2^{m-1} & 2^{m-1} \end{bmatrix}$$

ist. Wegen $A^{m+1} = A^m A$, erhalten wir

$$A^{m+1} = \begin{bmatrix} 2^{m-1} & 2^{m-1} \\ 2^{m-1} & 2^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^m & 2^m \\ 2^m & 2^m \end{bmatrix}.$$

Die Norm von $A^m$ ist dann $||A^m|| = 2^{m-1}$.

ii) a) Für alle $1 \le i, j \le n$ ist der $i, j$-Eintrag von $A + B$ gleich $a_{ij} + b_{ij}$. Wegen $|a_{ij} + b_{ij}| \le |a_{ij}| + |b_{ij}|$ folgt

$$||A + B|| = \max_{i,j} |a_{ij} + b_{ij}| \le \max_{i,j} (|a_{ij}| + |b_{ij}|) \le ||A|| + ||B||.$$

b) Von $i)$ wissen wir, dass

$$2^{m-1} = ||A^m|| = ||AA^{m-1}|| > ||A||\,||A^{m-1}|| = 2^{m-2}$$

gilt. Somit ist es widerlegt, dass $||A \cdot B|| \le ||A|| \cdot ||B||$.

**5. Differentialgleichungen I**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

$$y''' - 3y'' + 7y' - 5y = 10e^{2x}.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

i) Lösen Sie die zugehörige homogene Differentialgleichung.

ii) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Lösung

i) Zum Bestimmen der homogenen Lösungen, betrachten wir das zugehörige charakteristische Polynom (vgl. Definition 22.25)

$$\tau(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 5 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 5).$$

Die Nullstellen von $\tau(\lambda)$ sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 - 2i$ und $\lambda_3 = 1 + 2i$. Die drei Nullstellen korrespondieren zu drei linear unabhängigen Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und somit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^x \cos 2x + c_3 e^x \sin 2x, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

ii) Eine partikuläre Lösung wird mittels Satz 22.27 bestimmt. Die rechte Seite hat die Form $p(x)e^{\alpha x}$, wobei $p(x) = 10$ ein Polynom vom Grad 0 ist und $\alpha = 2$ ist. Da $\tau(\alpha) = \tau(2) \neq 0$, setzen wir als partikuläre Lösung $y_p(x) = ae^{2x}$ an, wobei $a \in \mathbb{R}$. Die Ableitungen von $y_p(x)$ sind $y_p'(x) = 2ae^{2x}$, $y_p''(x) = 4ae^{2x}$ und $y_p'''(x) = 8ae^{2x}$. Das Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung liefert $a = 2$ und damit ist $y_p(x) = 2e^{2x}$.
Also ist die Lösung der inhomogen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= c_1 e^x + c_2 e^x \cos 2x + c_3 e^x \sin 2x + 2e^{2x}. \end{aligned}$$

**6. Differentialgleichungen II**

Zeigen Sie, dass $y_1(x) = x^{1/2}$, $y_2(x) = \frac{1}{x}$ zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung

$$2x^2 y'' + 3xy' - y = 0, \quad x > 0$$

sind.

Lösung Um die Lösungseigenschaft zu zeigen, berechnen wir zunächst die zwei ersten Ableitungen. Es gilt

$$y_1'(x) = (1/2)x^{-1/2}, \quad y_1''(x) = (-1/4)(x^{-3/2}),$$

und

$$y_2'(x) = -x^{-2}, \quad y_2''(x) = 2x^{-3}$$

Einsetzen in die gegebene Gleichung liefert

- für $y_1$:

$$\begin{aligned} 2x^2\left((-1/4)(x^{-3/2})\right) + 3x\left((1/2)x^{-1/2}\right) - x^{1/2} &= \\ = -1/2x^{1/2} + 3/2x^{1/2} - x^{1/2} &= 0. \end{aligned}$$

- für $y_2$:

$$x^2 \left(2x^{-3}\right) + 3x \left(-x^{-2}\right) - \frac{1}{x} = 4x^{-1} - 3x^{-1} - x^{-1} = 0.$$

Also sind $y_1, y_2$ Lösungen der Differentialgleichung.

Es bleibt zu zeigen dass die beiden Lösungen linear unabhängig sind. Für ihre Wronski-Determinante gilt:

$$\begin{aligned} W(x) = det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} &= det \begin{pmatrix} x^{1/2} & \frac{1}{x} \\ (1/2)x^{-1/2} & -x^{-2} \end{pmatrix} = \\ &= -x^{-3/2} - (1/2)x^{-3/2} = (-3/2)x^{-3/2} \neq 0 \end{aligned}$$

für $x > 0$.