Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Modulprüfung Mathematik III

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik

WS 2012/13

28.03.2013

Name	Vorname	Fachrichtg.	Matrikelnr.

Punkte Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
max. Punkte	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**30**	
Punkte								

Bitte beachten!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Bearbeitungszeit **120** Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: **Keine.**

Viel Erfolg!

1. Die zufällige Anzahl X von Ausfällen eines Servers pro Monat genügt folgender Verteilung:

Ausfälle x_i	0	1	2	3	4	> 4
$P(X = x_i)$	$0,5$	$0,2$	$0,1$	$0,1$	$0,1$	0

Der Ausfall des Servers verursacht verschiedene Kosten.

Der einmalige Ausfall des Servers kostet 1000 Euro.
Fällt der Server zweimal aus, so betragen die Kosten 1500 Euro.
Bei drei- und viermaligem Ausfall müssen jeweils 2000 Euro bezahlt werden.

i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 1000 Euro Kosten im Monat wegen Ausfällen des Servers entstehen?

ii) Wie groß sind die im Monat zu erwartenden Kosten?

[Lösung]

i) Y - zufällige Kosten pro Monat wegen Ausfällen des Servers.
Verteilung von Y:

Ausfälle x_i	0	1	2	3	4	> 4
Kosten	0	1000	1500	2000	2000	≥ 2000
$P(X = x_i)$	$0,5$	$0,2$	$0,1$	$0,1$	$0,1$	0

$P(Y > 1000) = P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0,3$

ii) $E(X) = (0 \cdot 0,5 + 1000 \cdot 0,2 + 1500 \cdot 0,1 + 2000 \cdot 0,1 + 2000 \cdot 0,1)$ Euro
$= 750$ Euro

2. Die Breite des Controllers auf einem USB-Stick X in mm lässt sich als Zufallsvariable auffassen. X sei normalverteilt und habe den Mittelwert $\mu = 10$ mm und die Standardabweichung $\sigma = 0,02$ mm.

i) Wieviel Prozent Ausschuß sind zu erwarten, wenn die Breite um maximal $\pm 0,03$ mm vom Sollwert 10 mm abweichen soll?

ii) Wie müssen die Toleranzgrenzen $10 - c$ und $10 + c$ gewählt werden, damit nicht mehr als 5% Ausschuss entstehen?
(Die Verteilungstabelle der Normalentwicklung finden Sie am Ende der Aufgaben.)

[Lösung]

i) $P(10 - 0,03 \leq X \leq 10 + 0,03) = \Phi\left(\frac{10,03-10}{0,02}\right) - \Phi\left(\frac{9,97-10}{0,02}\right)$
$= \Phi(1,5) - \Phi(-1,5) = \Phi(1,5) - (1 - \Phi(1,5))$

$= 2\Phi(1,5) - 1 \approx 0,8664$ (Wahrscheinlichkeit, dass X im Toleranzbereich)

Gesuchte Wahrscheinlichkeit: $1 - 0,8664 = 0,1336 \approx 13\%$

ii) $1 - P(10 - c \leq X \leq 10 + c) = 0,05$
$\Rightarrow \Phi\left(\frac{10+c-10}{0,02}\right) - \Phi\left(\frac{10-c-10}{0,02}\right) = 1 - 0,05$
$\Rightarrow \Phi\left(\frac{c}{0,02}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{c}{0,02}\right)\right) = 0,95$
$\Rightarrow 2\Phi\left(\frac{c}{0,02}\right) - 1 = 0,95 \Rightarrow \Phi\left(\frac{c}{0,02}\right) = \frac{1,95}{2} = 0,975$
$\Rightarrow \frac{c}{0,02} = 1,96 \Rightarrow c \approx 0,039 \Rightarrow 9,961 \leq X \leq 10,039$

3. Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\varphi & 6\cos\varphi \\ \frac{1}{2}\sin\varphi & 6\sin\varphi \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\varphi & \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi \\ \frac{1}{2}\sin\varphi & \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ mit } \varphi \in \mathbb{R}.$$

i) Zeigen Sie, dass Q zu einer QR-Faktorisierung $QR = A$ der Matrix A gehört. Hinweis: $r\sin^2\varphi + r\cos^2\varphi = r$.

ii) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = QRx = b$ mithilfe der QR-Faktorisierung.

[Lösung]

i) $q_1^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\varphi \\ \frac{1}{2}\sin\varphi \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ und $\|q_1^*\| = \sqrt{\frac{1}{4}\cos^2\varphi + \frac{1}{4}\sin^2\varphi + \frac{3}{4}} = 1$

also $q_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\varphi \\ \frac{1}{2}\sin\varphi \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

$$q_2^* = \begin{pmatrix} 6\cos\varphi \\ 6\sin\varphi \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\varphi \\ \frac{1}{2}\sin\varphi \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6\cos\varphi \\ 6\sin\varphi \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\varphi \\ \frac{1}{2}\sin\varphi \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\varphi \\ \frac{1}{2}\sin\varphi \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\varphi \\ \frac{1}{2}\sin\varphi \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$q_2^* = \begin{pmatrix} 6\cos\varphi \\ 6\sin\varphi \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} - \frac{3\cos^2\varphi + 3\sin^2\varphi + 3}{1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\varphi \\ \frac{1}{2}\sin\varphi \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$q_2^* = \begin{pmatrix} 3\cos\varphi \\ 3\sin\varphi \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

und $\|q_2^*\| = \sqrt{9\cos^2\varphi + 9\sin^2\varphi + 3} = 2\sqrt{3}$ also $q_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

und $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\varphi & \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi \\ \frac{1}{2}\sin\varphi & \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

oder alternativ zeigen, dass Q eine orthogonale Matrix ist und R berechnen, so dass $A = QR$ (Siehe *ii*)!).

ii) Aus $A = QR$ folgt $R = Q^T A$.

$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\varphi & \frac{1}{2}\sin\varphi & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi & \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\varphi & 6\cos\varphi \\ \frac{1}{2}\sin\varphi & 6\sin\varphi \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$QRx = b \Rightarrow Rx = Q^T b$

$Q^T b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\varphi & \frac{1}{2}\sin\varphi & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi & \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$Rx = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 6 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_2 = -1$ und $x_1 = 12$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. Gegeben sei die Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 4\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2$.

i) Bestimmen Sie eine Näherung N des Integrals $\int\limits_0^2 f(x)\,dx$ mithilfe der Simpson'schen Regel, also der Newton-Cotes-Formel für $n = 2$ mit den Stützstellen $x_i = i$ mit $i = 0, 1, 2$.

ii) Zeigen Sie, dass $p(x) = 5x^2 - 8x + 2$ das quadratische Interpolationspolynom von f an den Stützstellen $x_i = i$ mit $i = 0, 1, 2$ ist.

iii) Zeigen Sie, dass die Näherung N aus *i*) dem Integral $\int\limits_0^2 p(x)\,dx$ entspricht.

[Lösung]

i) $I = \int\limits_0^2 f(x)dx \approx \frac{2-0}{6}(f(0) + 4f(1) + f(2)) = \frac{1}{3}(2 + 4 \cdot (-1) + 6) = \frac{4}{3}$

ii)

i	0	1	2
x_i	0	1	2
$f(x_i)$	2	-1	6

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ 2 &= a_0 \\ -1 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ 6 &= a_0 + 2a_1 + 4a_2 \\ &\Rightarrow a_0 = 2, a_2 = 5, a_1 = -8 \\ p(x) &= 2 - 8x + 5x^2 \end{aligned}$$

iii) $\int\limits_0^2 p(x)\,dx = \int\limits_0^2 (5x^2 - 8x + 2)\,dx = \left[\frac{5}{3}x^3 - 4x^2 + 2x\right]_0^2 = \frac{40}{3} - 16 + 4 = \frac{40-36}{3} = \frac{4}{3}$ also $N = \frac{4}{3} = \int\limits_0^2 p(x)\,dx$

5. Bestimmen Sie alle Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y' - y = \mathrm{e}^{2x},$$

mit $y(0) = 0$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

i) Lösen Sie die zugehörige homogene Differentialgleichung.

ii) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

iii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der obigen inhomogenen Differentialgleichung und alle Lösung y mit $y(0) = 0$.

[Lösung]

i) Die zugehörige homogene Differentialgleichung ist

$$y' - y = 0.$$

Die Lösung y_h davon kann man mittels Separation der Variablen (Satz 22.24) wie folgt finden:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 1 dx.$$

Somit ist $\ln(y_h(x)) = x + c_1$ für eine Konstante $c_1 \in \mathbb{R}$. Dann ist $y_h(x) = c\mathrm{e}^x$ für $c \in \mathbb{R}$.

ii) Eine partikuläre Lösung findet man mit Hilfe der Variation der Konstanten (Bemerkung 22.19) oder durch "draufschauen". Diese ist dann der Form

$$y_p(x) = c(x)\mathrm{e}^x$$

wobei $c(x)$ bestimmt werden soll (oder mit Bemerkung 22.19 direkt berechnet werden kann). Die Ableitung von y_p ist nun $y_p(x)' = \mathrm{e}^x c(x) + c'(x)\mathrm{e}^x$. Einsetzen in der inhomogenen Differentialgleichung liefert

$$\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^x c(x) + c'(x)\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x c(x) = c'(x)\mathrm{e}^x.$$

Also $c'(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^x$. Mittels Integration bzgl. x erhalten wir $c(x)$:

$$c(x) = \int c'(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c_2,$$

mit $c_2 \in \mathbb{R}$.

Somit ist eine partikuäre Lösung ($c_2 = 0$) $y_p = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x}$.

iii) Die allgemeine Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung ist gegeben durch (siehe Satz 22.16) $y = y_p + y_h$. Also ist

$$y = c\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x},$$

$c \in \mathbb{R}$.

Um die Lösung des Anfangswertproblems zu finden, setzen wir den Wert in der inhomogenen Differentialgleichung ein:

$$0 = y(0) = c + 1.$$

Somit ist $c = -1$, und $y = -\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}$ ist die Lösung des Anfangswertproblems.

6. a) Bestimmen Sie alle $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass die Funktionen e^x und $\mathrm{e}^{\gamma\,x}$ linear unabhängig sind.

   b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + 4\,y = \mathrm{e}^{3\,x}.$$

[Lösung]
zu a) Mit $y_1 = \mathrm{e}^x$ und $y_2 = \mathrm{e}^{\gamma\,x}$ ergibt sich für die Wronski-Determinante (siehe Def. 22.14 und Satz 22.15)

$$\begin{aligned} W(x) &= \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{\gamma\,x} \\ \mathrm{e}^x & \gamma\,\mathrm{e}^{\gamma\,x} \end{pmatrix} \\ &= \gamma\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\gamma x} - \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\gamma x} = (\gamma - 1)\mathrm{e}^{\gamma x + 1}. \end{aligned}$$

Somit ist $W(x) = 0$ genau dann, wenn $\gamma = 1$ ist, d.h., für $\gamma \neq 1$ sind die Funktionen linear unabhängig.

zu b) Es handelt sich hierbei um eine inhomogene lineare DG 2.ter Ordnung mt konstanten Koeffizienten. Gemäß Satz 22.26 betrachten wir das zugehörige charakteristische Polynom

$$\tau(\lambda) = \lambda^2 + 4$$

mit den komplexen Nullstellen $\pm 2\,\mathrm{i}$. Nach 22.26 führt dies zu den beiden Lösungen $\cos(2\,x)$ uns $\sin(2\,x)$, so dass die allgemeine Lösung der homogenen DG $y'' + 4\,y = 0$ gegeben ist durch

$$c_1\,\cos(2\,x) + c_2\,\sin(2\,x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{*}$$

Zum Ermitteln einer partikulären Lösung y_p von $y'' + 4\,y = \mathrm{e}^{3\,x}$ verwenden wir den Ansatz aus Satz 22.27, das bedeute hier wegen $\tau(3) \neq 0$: $y_p(x) = b_0 \mathrm{e}^{3\,x}$. Es ist $y_p'(x) = 3\,b_0 \mathrm{e}^{3\,x}$ und $y_p''(x) = 9\,b_0 \mathrm{e}^{3\,x}$. Einsetzen in die DG liefert

$$\mathrm{e}^{3\,x} = y_p'' + 4\,y_p = 9\,b_0 \mathrm{e}^{3\,x} + 4\,b_0 \mathrm{e}^{3\,x} = 13\,b_0 \mathrm{e}^{3\,x}.$$

Also $b_0 = \frac{1}{13}$ und somit ist $y_p(x) = \frac{1}{13}\mathrm{e}^{3\,x}$ eine partikuläre Lösung. Zusammen mit (*) und Satz 22.16 sind daher

$$\frac{1}{13}\mathrm{e}^{3\,x} + c_1\,\cos(2\,x) + c_2\,\sin(2\,x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

alle Lösungen der DG $y'' + 4\,y = \mathrm{e}^{3\,x}$.