Mathematik I WS 2013/2014 **Übung 13**
OvG-U Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 13.1 *Gegeben seien*

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass

i) $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *und* $\mathbf{y}$ *linear abhängig sind,*

ii) $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$ *orthogonal sind.*

Aufgabe 13.2 *Seien*

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

i) *Zeigen Sie, dass die Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.*

ii) *Bestimmen Sie ein zugehöriges Orthonormalsystem mit dem Gram-Schmidt-Verfahren.*

Aufgabe 13.3 *Sei $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, und sei f die orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^n$ auf den Teilraum $U = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0\}$. Man zeige: $||f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.*

Aufgabe 13.4 *Gegeben seien die Quaternionen $r_1 = (3 + 4i - 2j + k)$ und $r_2 = (2 - 3i + 5j - k)$. Berechnen Sie $r_1 \cdot r_2, \|r_1 \cdot r_2\|$ und $(r_1 \cdot r_2)^{-1}$.*

Aufgabe 13.5 *Gegeben seien die Rotationen*
R_r um $\{\lambda(\sqrt{3}, 1, 2)^T : \lambda \in \mathbb{R}\}$ mit dem Winkel $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ und
R_s um $\{\mu(1, 1, 1)^T : \mu \in \mathbb{R}\}$ mit dem Winkel $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$.
Bestimmen Sie unter Verwendung der Quaternionen den Drehwinkel der Rotation $R_r \circ R_s$.

Votierungswoche: 27.01. - 31.01.2014

Mathematik I WS 2013/2014 **Übung 12**

OvG-U Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 12.1 *Sei V der Vektorraum aller Polynome mit reellen Koeffizienten, d.h.,*

$$V = \left\{ p = \sum_{i=0}^{m} a_i\, x^i : a_i \in \mathbb{R},\, m \in \mathbb{N}_{\geq 0} \right\}.$$

Sei $D : V \to V$ die Ableitungs-Abbildung, d.h., $D(p) = p'$, wobei p' die Ableitung des Polynoms p ist.

i) *Zeigen Sie, dass D eine lineare Abbildung ist.*

ii) *Bestimmen Sie* $\mathrm{Kern}(D)$.

Aufgabe 12.2 *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die lineare Abbildung*

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

für Parameter $a, b \in \mathbb{R}$.

i) *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ bestimmen Sie die Dimension von* $\mathrm{Bild}(f)$.

ii) *Für $a = b = -1$ bestimmen Sie* $\mathrm{Kern}(f)$ *und* $\dim \mathrm{Kern}(f)$.

iii) *Für $a = b = -1$ bestimmem Sie eine Basis von* $\mathrm{Bild}(f)$.
Ist $(5, 2, -2, 0)^\intercal \in \mathrm{Bild}(f)$*?*

Aufgabe 12.3 *Sei V der Vektorraum aller Polynome mit reellen Koeffizienten und Höchstgrad 3, d.h.,*

$$V = \left\{ p = a_3\, x^3 + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0 : a_i \in \mathbb{R},\, 0 \leq i \leq 3 \right\}.$$

i) *Zeigen Sie, dass $1, x, x^2, x^3$ eine Basis von V bilden.*

ii) *Zeigen Sie, dass V isomorph zu $\mathbb{R}^4$ ist.*

Aufgabe 12.4 *Sei* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *das Skalarprodukt und* $|| \cdot ||$ *die zugehörige Norm im* $\mathbb{R}^n$. *Beweisen Sie:*

i) $||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 + ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 = 2(||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2)$,

ii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ *für alle* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 12.5 *Man bestimme vier Vektoren* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{R}^4$, *deren Koordinaten entweder* -1 *oder* 1 *sind, so dass* $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ *für* $i \neq j$. *Gibt es auch fünf solcher Vektoren im* $\mathbb{R}^5$ *?*

Votierungswoche: 20.01. - 24.01.2014

Mathematik I WS 2013/2014 **Übung 11**

OvG-U Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 11.1 *Welche der folgenden Vektoren sind in den zugehörigen $\mathbb{R}$-Vektorräumen V linear abhängig bzw. unabhängig? Überprüfen Sie bei linearer Unabhängigkeit, ob die Menge der Vektoren eine Basis des jeweiligen Vektorraumes bilden:*

i) $V = \mathbb{R}^3 : \mathbf{v}_1 = (1,1,1)^\intercal, \mathbf{v}_2 = (0,2,1)^\intercal$ *und* $\mathbf{v}_3 = (0,2,0)^\intercal$;

ii) $V = \{$ *"stetige" Funktionen auf* $[-\pi,\pi]\}$: $f_1 = \sin^2 x$, $f_2 = \cos^2 x$ *und* $f_3 = \cos 2x$.

Aufgabe 11.2 *Sei* $V = \mathbb{C}^3$ *als* $\mathbb{C}$-*Vekrtorraum, und seien*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 7i \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 3 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

i) *Bilden die Vektoren* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ *und* $\mathbf{v}_3$ *eine Basis von* V?

ii) *Schreiben Sie den Vektor* $\mathbf{w}$ *als Linearkombination der Vektoren* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ *und* $\mathbf{v}_3$.

Aufgabe 11.3 *Sei* V *ein* $\mathbb{K}$-*Vektorraum mit Basis* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. *Man zeige: jedes* $\mathbf{v} \in V$ *lässt sich als* eindeutige *Linearkombination der Basisvektoren darstellen, d.h., es gibt eindeutige Skalare* $\lambda_i \in \mathbb{K}$ *mit* $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i$.

Aufgabe 11.4 *Für* $\alpha \in \mathbb{K}$ *sei*

$$f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3 \ \textit{mit} \ f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2\alpha \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & \alpha+2 & 9 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

und sei $\mathbf{b} = (6,-4,6)^\intercal$.

i) *Sei* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. *Für welche Werte* $\alpha \in \mathbb{K}$ *gilt:*
   a) $\mathrm{Kern} f = \{\mathbf{0}\}$
   b) *Es existieren unendlich viele Urbilder für* $\mathbf{b}$.
   c) $\mathbf{b} \notin \mathrm{Bild} f$.

ii) *Sei* $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$. *Bestimmen Sie die Urbilder von* $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}_3$ *für* $\alpha = [0]_3$.

Aufgabe 11.5 *Für* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{K}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ *sei* H *die Hyperebene gegeben durch*

$$H = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{K}^n : \sum_{i=1}^{n} a_i \, x_i = 0 \right\}.$$

Weiterhin sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ *die lineare Abbildung mit* $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

i) *Bestimmen Sie den* $\mathrm{Kern} f$ *und* $\mathrm{Bild} f$.

ii) *Bestimmen Sie* $\dim H$, $\dim(\mathrm{Kern} f)$ *und* $\dim(\mathrm{Bild} f)$.

iii) *Bestätigen Sie die Dimensionsformel* $\dim \mathbb{K}^n = \dim(\mathrm{Bild} f) + \dim(\mathrm{Kern} f)$.

Votierungswoche: 13.01. - 17.01.2014

Mathematik I WS 2013/2014 **Übung 10**
OvG-U Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 10.1 *Berechnen Sie die inversen Matrizen von*

$$\text{i)} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{ii)} \quad B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10.2 *Sei*

$$F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \textit{ mit } x \mapsto mx + n : m, n \in \mathbb{R}\}$$

Zeigen Sie, dass F zusammen mit der Addition

$$+ : F \times F \to F : (f_1, f_2) \mapsto f_1 + f_2 \textit{ mit } (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

und der Skalarmultiplikation

$$\cdot : \mathbb{R} \times F \to F : (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f \textit{ mit } (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bilden.

Aufgabe 10.3 *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeigen Sie, dass die Menge $M \subset \mathbb{K}^{n\times n}$ aller symmetrischen Matrizen des $\mathbb{K}^{n\times n}$ einen Unterraum bilden.*

Aufgabe 10.4 *Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$, und sei*

$$M = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

i) *Ist* $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M$*?*

ii) *Bestimmen Sie die Dimension von M. Geben Sie Unterräume von M mit allen möglichen Dimensionen an.*

Aufgabe 10.5 *Zeigen Sie, dass die Menge $E = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ mit $\mathbf{v}_1 = (1,2,3,4)^\mathsf{T}$, $\mathbf{v}_2 = (2,0,1,-1)^\mathsf{T}$, $\mathbf{v}_3 = (-1,0,0,1)^\mathsf{T}$ und $\mathbf{v}_4 = (0,2,3,0)^\mathsf{T}$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$ ist. Ergänzen Sie die Mengen $\{(0,4,5,9)^\mathsf{T}, (3,3,3,1)^\mathsf{T}\}$ durch Vektoren aus E zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.*

Votierungswoche: 07.01. - 10.01.2014

Aufgabe 9.1 *Geben Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems über* $\mathbb{R}$ *an:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & & & = & 1 \\ 3x_1 & + & 9x_2 & + & 10x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & 7x_3 & + & 3x_4 & - & x_5 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 8x_2 & + & 12x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 9.2 *Für welche* $\alpha \in \mathbb{R}$ *haben folgende Gleichungssysteme über* $\mathbb{R}$ *Lösungen? Für welche* α *gibt es eine eindeutige Lösung?*

i) $$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & \alpha z & = & 1 \end{array}$$

ii) $$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 3z & = & 2 \\ 3x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & & & \alpha^2 z & = & \alpha \end{array}$$

Aufgabe 9.3 *Sei*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Lösungen von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *an, wobei*

i) *die Koeffizienten von* $A, \mathbf{x}, \mathbf{b}$ *in* $\mathbb{R}$ *liegen,*

ii) *die Koeffizienten von* $A, \mathbf{x}, \mathbf{b}$ *in* $\mathbb{Z}_3$ *liegen.*

Aufgabe 9.4 *Bestimmen Sie die Lösung über* $\mathbb{C}$ *von:*

$$\begin{array}{rcrcrcl} (3+i)\,x_1 & - & 4ix_2 & + & ix_3 & = & 2+i \\ 2x_1 & - & 2ix_2 & - & 2x_3 & = & 2-i \\ ix_1 & + & x_2 & + & (1+i)x_3 & = & i \end{array}.$$

Aufgabe 9.5 *Für die Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

berechne man:

i) $B + A^{\mathsf{T}}$, $A + B^{\mathsf{T}}$.

ii) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{v}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{v}$, $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot C$, $C \cdot B$.

Votierungswoche: 16.12. - 20.12.2013

Mathematik I WS 2013/2014 **Übung 8**

OvG-U Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 8.1 *Ermitteln Sie Real- und Imaginärteil von:*

$$\text{i)}\quad -3(1+\mathrm{i})+4(1-\mathrm{i})+2(1+2\mathrm{i})^2, \qquad \text{ii)}\quad \frac{1-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}+\frac{1+3\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}},$$

$$\text{iii)}\quad \frac{1}{\mathrm{i}}, \qquad \text{iv)}\quad \mathrm{i}^{13}, \qquad \text{v)}\quad \frac{3\,\mathrm{i}^{30}-\mathrm{i}^{19}}{2\,\mathrm{i}^{9}+\mathrm{i}^{16}}.$$

Aufgabe 8.2 *Beschreiben Sie die folgenden Mengen in Polardarstellung:*

$$\text{i)}\quad \{z\in\mathbb{C}: |z-3\mathrm{i}|<1\}, \qquad \text{ii)}\quad \{z\in\mathbb{C}: 2\le |z-\mathrm{i}|\le 4\},$$

$$\text{iii)}\quad \{z\in\mathbb{C}: |\frac{3-4\mathrm{i}}{z-1+2\mathrm{i}}|<5\}.$$

Aufgabe 8.3 *Stellen Sie die folgenden Zahlen in der Form $a+bi$ dar:*

$$\text{i)}\ (\cos(\frac{2}{9}\pi)+\mathrm{i}\sin(\frac{2}{9}\pi))^3, \qquad \text{ii)}\ (1-\mathrm{i}\sqrt{3})^5, \qquad \text{iii)}\ \sqrt[3]{8(\cos 150^\circ+\mathrm{i}\sin 150^\circ)}.$$

Aufgabe 8.4 *Berechnen Sie z:*

$$\text{i)}\ z^2=-50, \qquad \text{ii)}\ z^2+4z+5=0, \qquad \text{iii)}\ z^2=3-4\mathrm{i}.$$

Aufgabe 8.5 *Lösen Sie das folgende Gleichungssystem über $\mathbb{C}$:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & \mathrm{i}\,y & - & z & = & 1 \\ \mathrm{i}\,x & - & y & + & 3\mathrm{i}\,z & = & 5\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i}\,x & + & 2y & - & \mathrm{i}\,z & = & 4+3\mathrm{i} \end{array}$$

Votierungswoche: 09.12. - 13.12.2013

Mathematik I WS 2013/2014 **Übung 7**

OvG-U Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 7.1

i) *Bestimmen Sie zwei (oder auch mehr) ganzzahlige Lösungen* $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *der Gleichung*

$$234 \cdot x + 179 \cdot y = 1$$

ii) *Hat die Gleichung* $210 \cdot x + 245 \cdot y = 45$ *ganzzahlige Lösungen?*

Aufgabe 7.2 *In der (Restklassen) Gruppe* $(\mathbb{Z}_{11} \setminus \{[0]_{11}\}, \odot)$ *bestimme man für alle Elemente die inversen Elemente.*

Aufgabe 7.3 *Untersuchen Sie folgende Mengen bezüglich der angegebenen Verknüpfungen auf Gruppeneigenschaften:*

i) *die Menge* F *der Abbildungen* $f_i : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}, i = 1, \dots, 4$ *mit* $F = \{f_1(x) = x, f_2(x) = -x, f_3(x) = \frac{1}{x}, f_4(x) = -\frac{1}{x}\}$ *bezüglich der Verknüpfung* $\circ$ *definiert durch* $f_1(x) \circ f_2(x) = f_1(f_2(x))$,

ii) *die Menge* H *mit* $H = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ *bezüglich der üblichen Multiplikation* $\cdot$ *als Verknüpfung.*

Aufgabe 7.4 *Gegeben sind die Zahlen* $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 3-i$ *und* $z_3 = 4+3i$. *Berechnen Sie*

i) $\overline{z_1 + z_2}$, ii) $z_1 \cdot z_2$, iii) $\frac{z_2}{z_3}$, iv) $\left|\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2\right|$, v) $|z_1^8|$.

Aufgabe 7.5 *Ermitteln Sie die Polardarstellung und die Eulersche Exponentialdarstellung folgender komplexer Zahlen:*

i) $z = 2 - 3i$, ii) $z = -8 + 8\sqrt{3}i$, iii) $z = -2 + 3i$,

iv) $z = \cos 150° + i \sin 150°$, v) $z = 6\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$.

Votierungswoche: 02.12. - 06.12.2013

Mathematik I WS 2013/2014 **Übung 6**

OvG-U Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 6.1

i) *Sei $F(n)$ die n-te Fibonacci-Zahl, und seien*

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Zeigen Sie: $F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$.

ii) *Berechnen Sie für die "Türme von Hanoi" die Anzahl der "Moves", die notwendig sind um einen Turm mit n Scheiben auf einen anderen Stab umzuschichten.*

Aufgabe 6.2 *Gegeben seien die Permutationen*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) *Bestimmen Sie* σ_1^{-1} *und* σ_2^{-1}.

ii) *Bestimmen Sie die Kompositionen* $\sigma_1 \circ \sigma_2$, $\sigma_2 \circ \sigma_1$.

Aufgabe 6.3 *Berechnen Sie mithilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler* $\mathrm{ggT}(x, y)$ *mit:*

i) $x = 173166$ *und* $y = 60822$,

ii) $x = 5603373$ *und* $y = 92911743$.

Aufgabe 6.4 *In der Menge aller Polynome* $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *ist eine Division (Polynomdivision) mit Rest erklärt und der Euklidische Algorithmus ist anwendbar. Bestimmen Sie* $\mathrm{ggT}(p_1, p_2)$ *mit* $p_1 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ *und* $p_2 = x^3 + x^2 + x + 1$.

Aufgabe 6.5 *Es sei* $\mathbb{Z}_m$ *die Menge aller Restklassen modulo m. Bestimmen Sie die Verknüpfungstabellen für* $m = 6$ *und* $m = 7$ *bezüglich der Verknüpfungen* $\oplus$ *auf* $\mathbb{Z}_m$ *und* $\odot$ *auf* $\mathbb{Z}_m \setminus \{[0]_m\}$.

Votierungswoche: 25.11. - 28.11.2013

Mathematik I WS 2013/2014 **Übung 5**

OvG-U Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 5.1 *Welche der folgenden Relationen $F \subseteq M_1 \times M_2$ lassen sich als Graph von Funktionen beschreiben; bestimmen Sie gegebenenfalls Definitions- und Wertebereich:*

i) $M_1 = \{1,2,3,4\}, M_2 = \{a,b,c\} : F = \{(1,a),(2,c),(3,b)\}$.

ii) $M_1 = M_2 = \mathbb{R} : F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y-1)^2 = 10 - x^2\}$.

iii) $M_1 = M_2 = \mathbb{R} : F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^y = x^2 - x - 2\}$.

Aufgabe 5.2 *Skizziere die Graphen folgender Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit $y = f(x)$:*
i) $D = \mathbb{R}_{>1},\ y = \ln(x-1)$, ii) $D = \mathbb{R}_{>0},\ y = \ln x - 1$,
iii) $D = \mathbb{R},\ y = 2\sin 3x$, iv) $D = \mathbb{R},\ y = 2 + \cos x$,
v) $D = \mathbb{R}_{>1},\ y = |x| - x$.

Aufgabe 5.3 *Sei $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = 4x^2 + 3$ und sei $f_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = \sqrt{x}$.*

i) *Untersuchen Sie f_1 und f_2 auf die Eigenschaften Surjektivität, Injektivität und Bijektivität.*

ii) *Bestimmen Sie von den Kompositionen $f_1 \circ f_2$ und $f_2 \circ f_1$ Definitions- und Wertebereich, ihre Eigenschaften (Surjektivität, Injektivität, Bijektivität) und, wenn möglich, die inversen Abbildungen.*

Aufgabe 5.4 *Gegeben sind $A = \{1,2,3,4,5\}$ und*

$$\begin{array}{ll} f_1 : A \to \mathbb{N}, & f_1(x) = 3x - 1; \\ f_2 : A \to \mathbb{N}, & f_2(x) = x^2 - 6x + 10; \\ f_3 : A \to \{1,2,5\}, & f_3(x) = x^2 - 6x + 10; \\ f_4 : A \to \{2,5,8,11,14\}, & f_4(x) = 3x - 1. \end{array}$$

i) *Welche der Abbildungen sind surjektiv, injektiv oder bijektiv?*

ii) *Geben Sie, wenn möglich, die Umkehrabbildungen für alle Abbildungen und Kompositionen, die Abbildungen sind, an.*

Aufgabe 5.5 *Zeigen Sie, $|\mathbb{Z}| = |\{2m+1 : m \in \mathbb{N}\}|$.*

Votierungswoche: 18.11. - 22.11.2013

Mathematik I WS 2013/2014 **Übung 4**
OvG-U Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 4.1 *Beweisen Sie mithilfe vollständiger Induktion:*

i) *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt:* *47 ist ein Teiler von* $7^{2n} - 2^n$.

ii) *Für die Anzahl* $D(n)$ *der Diagonalen in einem ebenen, konvexen n-Eck gilt:* $D(n) = \frac{n}{2} \cdot (n-3)$.

Aufgabe 4.2 *Untersuchen Sie, ob die folgenden Induktionsbeweise fehlerhaft sind und zeigen Sie gegebenenfalls mögliche Fehler auf:*

i) *Wenn sich unter n Computern ein Notebook befindet, dann sind alle diese Computer Notebooks.*
Induktionsanfang: *Wenn von nur einem Computer einer ein Notebook ist, dann sind offensichtlich alle diese Computer Notebooks.*
Induktionsschritt: *Befinde sich unter* $n+1$ *Computern ein Notebook. Stellen wir die Computer so auf, dass sich unter den ersten n Computern ein Notebook befindet, dann sind dies nach Induktionsvoraussetzung alles Notebooks. Damit befindet sich aber auch unter den letzten n Computern ein Notebook, so dass diese auch alle Notebooks sein müssen. Folglich sind alle* $n+1$*Computer Notebooks.*

ii) *Auf einem Computerchip lassen sich unendlich viele mikroelektronische Bauteile unterbringen.*
Induktionsanfang: *Auf einem Chip lässt sich ein Bauteil unstrittig unterbringen.*
Induktionsschritt: *Wenn sich n Bauteile auf einem Chip unterbringen lassen, dann lassen sich auch* $n+1$ *Bauteile unterbringen, indem ich z. B. Bauteile verkleinere oder übereinander anordne.*
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist damit gezeigt, dass sich unendlich viele mikroelektronische Bauteile auf einem Computerchip unterbringen lassen.

Aufgabe 4.3 *Sei M eine Menge und seien $A, B, C, D \subseteq M$. Beweisen oder widerlegen Sie:*

i) $(A \setminus B) \cup (C \setminus D) = (A \cup C) \setminus (B \setminus D)$,

ii) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

Aufgabe 4.4 *Untersuchen Sie, ob folgende binäre Relationen $R \subset A \times A$ auf der Menge A reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch oder transitiv sind. Welche Relationen sind Äquivalenzrelationen bzw. Ordnungsrelationen. Bestimmen bzw. veranschaulichen Sie gegebenenfalls die Äquivalenzklassen.*

i) $A = \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2)\, R\, (y_1, y_2) \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$

ii) $A = \mathbb{R} \times \{1\}, \quad (x_1, x_2)\, R\, (y_1, y_2) \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$

iii) *A sei die Potenzmenge einer Menge M,* $\quad M_1\, R\, M_2 \Leftrightarrow M_1 \cap M_2 = M_1$

iv) *A sei die Menge aller Geraden g in der Ebene,* $\quad g_1\, R\, g_2 \Leftrightarrow g_1 \cap g_2 = \emptyset \vee g_1 = g_2$.

Aufgabe 4.5 *Gegeben sei die Menge $M = \{a, b, c, d, e, f\}$. Untersuchen Sie, ob die folgenden Zerlegungen Z der Menge M Klasseneinteilungen in M sind und geben Sie gegebenenfalls die Z erzeugende Äquivalenzrelationen an:*

i) $Z = \{\{a, b\}, \{b, d, e\}, \{f\}\}$,

ii) $Z = \{\{a\}, \{a, c, d\}, \{e, f\}\}$,

iii) $Z = \{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f\}\}$.

Votierungswoche: 11.11. - 15.11.2013

Mathematik I WS 2013/2014 **Übung 3**

OvG-U Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 3.1 *Veranschaulichen Sie die folgenden Mengen in geeigneter Weise (z.B. auf einem Zahlenstrahl, in einem x-y-Koordinatensystem bzw. x-y-z-Koordinatensystem):*

i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2x = 3 - y^2\}$

ii) $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n+1}{n^2} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 6\}$

iii) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1+2\lambda \wedge y = 1-\lambda \wedge z = 3\lambda \wedge 0 \leq \lambda \leq 3 \wedge \lambda \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 3.2 *Gegeben sei die Menge* $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *und die Menge* $N = \{1, 3, 5, 7, 13\}$.

i) *Bestimmen Sie alle Mengen A, für die gilt:* $\{1, 2\} \subseteq A \subseteq M$.

ii) *Bestimmen Sie die Mengen B, für die gilt:* $B \cap M = \emptyset \wedge B \cup M = N$.

Aufgabe 3.3 *Gegeben seien die Mengen*
$A = \{a \in \mathbb{N} : a = (2k-1) \cdot 2^l \wedge k, l \in \mathbb{N}\}$ *und* $B = \{b \in \mathbb{N} : b = 2 \cdot n \wedge n \in \mathbb{N}\}$.
Zeigen Sie $A = B$.

Aufgabe 3.4 *Gegeben seien die Menge* $M = \{1, 2, 3, 4\}$ *und die binäre Relation* $R \subset M \times M$ *auf der Menge M mit* $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (x, y), (4, 4)\}$.

i) *Bestimmen Sie x, y so, dass die Relation R nur reflexiv und nicht symmetrisch und transitiv wird.*

ii) *Bestimmen Sie x, y so, dass die Relation R nur symmetrisch und nicht reflexiv und transitiv wird.*

iii) *Bestimmen Sie x, y so, dass die Relation R nur transitiv und nicht reflexiv und symmetrisch wird.*

Aufgabe 3.5 *Untersuchen Sie, ob folgende binäre Relationen* $R \subset M \times M$ *auf der Menge M Äquivalenzrelationen sind.*
Bestimmen bzw. veranschaulichen Sie gegebenenfalls die Äquivalenzklassen.

i) $M = \mathbb{R}$, $\quad x_1 \, R \, x_2 \Leftrightarrow \lceil x_1 \rceil = \lceil x_2 \rceil$, *wobei $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl k mit $k \geq x$ bedeutet.*

ii) $M = \mathbb{R}$, $\quad (a, b) \, R \, (c, d) \Leftrightarrow a - d = c - b$

iii) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, x \geq 0\}$, $\quad (x_1, y_1) \, R \, (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$

Votierungswoche: 04.11. - 08.11.2013

Mathematik I WS 2013/2014 **Übung 2**

OvG-U Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 2.1 *Beweisen Sie folgende Aussagen:*

i) *Mithilfe eines indirekten Beweises zeige:* $\sqrt{5}$ *ist irrational.*

ii) *Sei* n *eine natürliche Zahl. Mithilfe eines direkten Beweises und mithilfe der vollständigen Induktion zeige:* $n + n^2$ *ist eine gerade Zahl.*

Aufgabe 2.2 *Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion:*

i) *Für alle natürlichen Zahlen* n *gilt:* $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

ii) *Für alle natürlichen Zahlen* $n \geq 10$ *gilt:* $\quad n! > 2^n > n^3$.

Aufgabe 2.3 *Mit* A, B, C *werden die folgenden Punktmengen der* x, y*-Ebene bezeichnet:*

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\right\},\ B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\ \vee\ x = -y\right\},$$

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\right\}.$$

Stellen Sie folgende Mengen in der x, y*-Ebene dar:*

i) A, B, C *und* $A \cap B \cap C$

ii) $(B \cup C) \setminus A,\ B \cup (A \setminus C)$ *und* $A \setminus (B \cup C)$.

Aufgabe 2.4 *Sei*

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\ \vee\ x = 3\}, \\ B &= \{y \in \mathbb{R} : 1 < y \leq 3\ \vee\ y = 4\ \vee\ 5 \leq y < 6\}. \end{aligned}$$

Skizzieren Sie $A \times B$ *in der* x, y*-Ebene.*

Aufgabe 2.5 *Gegeben seien die Menge* $A = \{(a, b), (b, a), (c, c)\}$ *und die Menge* $B = \{\emptyset, \{1\}\}$.

i) *Bestimmen Sie die Potenzmenge* $P(A)$ *der Menge* A .

ii) *Bestimmen Sie die Potenzmenge der Potenzmenge von* B.

Votierungswoche: 28.10. - 01.11.2013

Mathematik I WS 2013/2014 **Übung 1**

OvG-U Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 1.1 *Gegeben seien die folgenden Aussagen:*

A: Der Studierende hat am Vorkurs zur Mathematik teilgenommen.

B: Der Studierende kommt ausgeschlafen zur Lehrveranstaltung.

C: Der Studierende besucht die Vorlesung zur Mathematik.

E: Der Studierende kann die Übungsaufgaben in der Übung vorrechnen.

F: Der Studierende beschäftigt sich rechtzeitig vor der Übung mit den Übungsaufgaben.

i) *Beschreiben Sie unter Verwendung dieser Aussagen symbolisch :*

   a) *Wenn der Studierende am Vorkurs teilgenommen hat und ausgeschlafen zur Lehrveranstaltung kommt, kann er die Übungsaufgaben vorrechnen.*

   b) *Wenn der Studierende nicht am Vorkurs teilgenommen hat und nicht die Vorlesung besucht, aber sich mit den Übungsaufgaben rechtzeitig beschäftigt, kann er die Übungsaufgaben vorrechnen.*

   c) *Der Studierende kann genau dann die Übungsaufgaben nicht vorrechnen, wenn er den Vorkurs nicht besucht hat oder nicht ausgeschlafen die Vorlesung besucht oder sich nicht mit den Übungsaufgaben beschäftigt.*

ii) *Bilden Sie die Negation der Aussageverbindung unter (i)(a) und formulieren Sie diese in Worten.*

Aufgabe 1.2 *Eine Aussageverbindung wird Tautologie genannt, wenn sie unabhängig vom Wahrheitswert der zugrundeliegenden Bestandteile immer wahr ist. Zeigen Sie mit Hilfe von Wahreheitstafeln, dass die folgenden Aussagen Tautologien sind:*

i) $(\overline{\overline{A} \vee B}) \Longleftrightarrow (A \wedge \overline{B})$

ii) $(\overline{A} \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (A \vee B)$

iii) $(A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)) \Longleftrightarrow ((A \wedge B) \Longrightarrow C))$

Aufgabe 1.3 *Zum Beweis eines mathematischen Satzes in Form einer Implikation $A \Longrightarrow B$ kann die Gültigkeit hierzu äquivalenter Aussageverbindungen nachgewiesen werden. Begründen Sie dieses Vorgehen, indem Sie zeigen, dass die folgenden Aussageverbindungen Tautologien sind:*

i) $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\overline{B} \Longrightarrow \overline{A})$ *(Beweis der Kontraposition)*

ii) $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow ((A \wedge \overline{B}) \Longrightarrow (C \wedge \overline{C}))$ *(Indirekter Beweis/Wiederspruchsbeweis)*

Aufgabe 1.4 *Seien x und c reelle Zahlen ($x, c \in \mathbb{R}$). Bestimmen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen:*

i) $\exists c\ \forall x\ [(x^2 + x + c = 0) \Longrightarrow (x \leq 0)]$

ii) $\forall x\ \exists c\ [(x^2 + x + c = 0) \Longrightarrow (x \leq 0)]$

iii) $\forall c\ \forall x\ [(x^2 + x + c = 0) \Longrightarrow (x \leq 0)]$

Votierungswoche: 21.10. - 25.10.2013

Mathematik I WS 2013/2014 **Übung 0**
OvG-U Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 0.1 *Vereinfachen Sie folgende Terme:*

i) $\left(\frac{2a^2x^2}{3b^2y^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{4b^3x^2}{3a^3y^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{9a^3y^6}{8b^3x^3}\right)^2, \quad a,b,x,y>0$

ii) $\frac{(2ax+2ay)^m(bx-by)^n}{(cx^2-cy^2)^{m+2}}, \quad |x| \neq |y| \dots$

iii) $\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}, \quad a>b>0$

iv) $\frac{\sqrt{a+b}\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^4-b^4}}, \quad a>b>0$

v) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, \quad a,b>0$

Aufgabe 0.2 *Sei x eine reelle Zahl ($x \in \mathbb{R}$). Ermitteln Sie x aus den folgenden Gleichungen:*

i) $\frac{3x-10}{5x-10} + \frac{x-8}{x-2} = 2 - \frac{5x-2}{7x-14}$

ii) $\frac{bx-a}{a+bx} - \frac{3b+bx}{bx-a} = \frac{3ab-b^2}{a^2-b^2x^2}$

iii) $||x+1|-2| = 1$

iv) $\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} = 2\sqrt{x-1}$

v) $\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-7} = \left(\frac{4}{3}\right)^{7x-3}$

Aufgabe 0.3 *Bestimmen Sie x aus den Gleichungen:*

i) $\log_3(x-4) + \log_3(x+4) = 3$

ii) $2\log_2(4-x) + 4 = \log_2(x+5) - 1$

iii) $\log_5 x = \log_5 6 - 2\log_5 3$

Aufgabe 0.4 *Vereinfachen Sie:*

$$\text{i)}\,\sin^4 x - \cos^4 x, \qquad \text{ii)}\,\sin^4 x + \frac{1}{2}\sin^2(2\,x) + \cos^4 x.$$

Aufgabe 0.5 *Berechnen Sie für die Polynome $P_1(x) = 2x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 22x^2 - 12x$ und $P_2(x) = (x-1)^2$ den Quotienten $P_1(x)/P_2(x)$.*

Besprechung in der ersten Vorlesungswoche