Mathematik I für Informatiker, Computervisualisten, Wirtschaftsinformatiker und Ingenieurinformatiker WS 2011/12 **Übung 13**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 13.1 *Gegeben seien die Quaternionen* $q_1 = -2 + i + j - k$ *und* $q_2 = -i - j + 2k$.

(a) Bestimmen Sie $q_1 \cdot q_2, \overline{q_1 \cdot q_2}$ *und* $\overline{q_1} \cdot \overline{q_2}$.

(b) Berechnen Sie $\|q_1\|, \|q_2\|$ *und* $\|q_1 \cdot q_2\|$.

(c) Bestimmen Sie die multiplikativen Inversen von q_1 *und* q_2.

Aufgabe 13.2 *Gegeben sei der Punkt* $P(0, 2, 6) \in \mathbb{R}^3$ *und der Drehwinkel* $\phi = 60°$.

(a) Bestimmen Sie das Bild von P *unter der Drehung um die* z*-Achse mit dem Drehwinkel* ϕ.

(b) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis durch Vergleich der Länge des Ortsvektors des Ausgangspunktes mit der des Drehpunktes.

Aufgabe 13.3 *Man berechne die Determinanten der folgenden Matrizen:*

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{pmatrix}, \qquad \text{(b) } \begin{pmatrix} 1+\cos x & 1+\sin x & 1 \\ 1-\sin x & 1+\cos x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{(c) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13.4 *Gegeben sei die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & a & a \\ a & a & -a & -a \\ a & -a & -a & -a \\ a & a & -a & a \end{pmatrix} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Man zeige, dass $\det(A) = -8a^4$ *gilt und nutze das Ergebnis zur Berechnung von* $\det(2A), \det(A^2), \det(A^{-1})$.

Aufgabe 13.5 *Für welche* $x \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$\text{(a) } \det \begin{pmatrix} x & -1 & x \\ -1 & x & x \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix} = 0, \qquad \text{(b) } \det \begin{pmatrix} x+1 & 1 & 2 \\ 2 & x & -1 \\ 3 & 1 & x \end{pmatrix} = 2?$$

Votierungswoche: 23.01. - 27.01.2012

Mathematik I für Informatiker, Computervisualisten, Wirtschaftsinformatiker und Ingenieurinformatiker WS 2011/12 **Übung 12**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 12.1 *Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt und $|| \cdot ||$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie:*

(a) $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$,

(b) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 12.2 *Gegeben sind die Vektoren* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *und* $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *aus dem* $\mathbb{R}^3$. *Man zeige, dass*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \mathbf{e}_1 - \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} \mathbf{e}_2 + \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \mathbf{e}_3$$

einen Vektor $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ *liefert, der orthogonal zu* $\mathbf{a}$ *und* $\mathbf{b}$ *ist. Weiter beschreibe man den Orthogonalraum der linearen Hülle von* $\{(2,-1,4),(0,1,3)\}$ *und gebe die zugehörende Dimension an.*

Aufgabe 12.3 *Im euklidischen Vektorraum* $\mathbb{R}^3$ *seien die linear unabhängigen Vektoren*

$$b_1 = (0,1,1), b_2 = (1,0,1), b_3 = (1,1,0)$$

gegeben. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ *nach dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren.*

Aufgabe 12.4 *Man untersuche folgende Matrizen auf Orthogonalität:*

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *(b)* $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 12.5 *Gegeben ist die lineare Abbildung* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = Ax$, *durch die Abbildungsmatrix* A *sowie die beiden Vektoren* a *und* b *des Urbildraumes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A *orthogonal ist.*

(b) Verifizieren Sie mit Hilfe der Vektoren a *und* b, *dass* f *eine längen- und winkeltreue Abbildung ist.*

Votierungswoche: 16.01. - 20.01.2012

Aufgabe 11.1 *Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine bijektive lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass das Bild einer Geraden wieder eine Gerade ist.*

Aufgabe 11.2 *Sei $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ eine durch $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^5$ definierte Abbildung mit*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Man gebe eine Basis von Bild f und eine Basis von Kern f an.

Aufgabe 11.3 *Betrachtet werden die linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:*

$$f(x) = y = Ax \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}.$$

(a) *Man bestimme die Dimension von Bild(f) für alle $a, b \in \mathbb{R}$.*

(b) *Man setze $a = b = -1$, bestimme den Kern der Abbildung und dim Kern(f).*

(c) *Man gebe im Falle $a = b = -1$ eine Basis von Bild(f) an. Liegt der Vektor $(5, 2, -2, 0)$ in Bild(f)?*

Aufgabe 11.4 *Gegeben seien die folgende lineare Abbildung f mit:*

$$f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3, f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2\alpha \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & \alpha + 2 & 9 \end{pmatrix} x$$

$$\textit{und } b = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Für welche Werte $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

i. Kern$(f) = \{0\}$

ii. Es existieren unendlich viele Urbilder $x \in \mathbb{K}^3$ für b.

iii. $b \notin$ Bild (f)

(b) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$. Man bestimme die Urbilder von $b \in \mathbb{Z}_3$ für $\alpha = [0]_3$.

Aufgabe 11.5 *Sei H die Hyperebene im $\mathbb{K}^n$ gegeben durch*

$$H = \left\{ (k_1, \ldots, k_n)^T \in \mathbb{K}^n : \sum_{i=1}^{n} k_i = 0 \right\}.$$

Weiterhin sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ die lineare Abbildung mit
$f((k_1, \ldots, k_n)^T) = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i$.

(a) Bestimme Kern (f) und Bild (f).

(b) Bestimme $\dim H$, $\dim$ *Kern (f) und* $\dim$ *Bild (f).*

(c) Bestätige $\dim \mathbb{K}^n = \dim$ *Bild* $(f) + \dim$ *Kern* (f).

Votierungswoche: 09.01. - 13.01.2012

Frohe Weihnachten
&
Alles Gute

(Gesundheit, Glück, Freude, Bestandene Klausuren, etc.)

für 2012!

Aufgabe 10.1 *Gegeben sind folgende Mengen mit Elementen aus $\mathbb{Z}_7$:*

$$M_1 = \{(3,0,0);(2,0,2)\} \text{ und } M_2 = \{(2,0,1);(1,5,0)\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Mengen M_1 und M_2 Erzeugendensysteme von Unterräumen des $\mathbb{Z}_7^3$ sind.

(b) Bestimmen Sie die Dimension dieser Unterräume.

Aufgabe 10.2

(a) Wir betrachten $\mathbb{R}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ linear unabhängig sind.
Hinweis: Ist $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$, so $(a + b\sqrt{2})^2 = 3c^2$.

(b) Sind die Polynome $x^2+2, 2x^2-x+1, x+2, x^2+x+4$ des $\mathbb{R}$-Vektorraumes aller Polynome vom Grad ≤ 2 linear unabhängig?

Aufgabe 10.3 *Gegeben seien $\vartheta_1 = (1,i,1), \vartheta_2 = (i,2,7i), \vartheta_3 = (1,i,3)$ und $\omega = (1,0,9) \in \mathbb{C}^3$.*

(a) Bilden $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ eine Basis von $\mathbb{C}^3$?

(b) Stellen Sie ω als Linearkombination der ϑ_i dar.

Aufgabe 10.4 *Gegeben sind folgende Abbildungen:*

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x_1,x_2,x_3) \to (x_1+x_2+x_3, x_2+x_3)$

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (a,b) \to (ab, a+b)$

(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (a,b) \to (3a+1, 4b+a+1)$

(5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, (x) \to (x, 2x)$

(6) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(a) *Welche der Abbildungen sind linear?*

(b) *Welche der linearen Abbildungen sind surjektiv, injektiv, bijektiv?*

Aufgabe 10.5 *Gegeben ist die folgende lineare Abbildung*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) *Liegt der Vektor* $(2, 5, 7)$ *in der Bildmenge der linearen Abbildung* (f)*?*

(b) *Geben Sie einen Vektor des* $\mathbb{R}^3$ *an, der nicht zur Bildmenge von* (f) *gehört.*

Votierungswoche: 19.12. - 22.12.2011

Mathematik I für Informatiker, Computervisualisten, Wirtschaftsinformatiker und Ingenieurinformatiker WS 2011/12 **Übung 9**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 9.1 *Sei* $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$*. Zeigen Sie, dass* $\mathbb{R}_{>0}$*, versehen mit der Addition* $a \oplus b := ab$ *für alle* $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ *und der Skalarmultiplikation* $\lambda \odot a := a^\lambda$ *für alle* $a \in \mathbb{R}_{>0}$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$*, ein* $\mathbb{R}$*-Vektorraum ist.*

Aufgabe 9.2 *Sei* V *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum mit der Vektoraddition* $+$ *und der Skalarmultiplikation* $\cdot$ *und* $(\mathbb{K}, \oplus, \odot)$ *ein Körper. Zeigen Sie:*

(a) $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ *für alle* $\mathbf{v} \in V$ *und* 0 *ist das neutrale Element von* $(\mathbb{K}, \oplus)$*,*

(b) $(-1) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v}$ *für alle* $\mathbf{v} \in V$ *und* -1 *ist das inverse Element bezüglich* $\oplus$ *vom Einselement* 1 *von* $(\mathbb{K}, \odot)$*.*

Aufgabe 9.3 *Man prüfe, ob die folgenden Mengen Unterräume des* $\mathbb{R}^2$ *sind.*

(a) $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y - 1 = 0\}$,

(b) $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 - y^3 = 0\}$,

(c) $M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}$,

(d) $M_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x(14y - 4x) = 49y^2\}$.

Aufgabe 9.4 *Für welche Werte von* a *und* b *sind die folgenden drei Vektoren des* $\mathbb{R}^4$ *linear unabhängig?*

$$x_1 = (1, 0, a, b), \quad x_2 = (1, a, 1 + a, 3), \quad x_3 = (0, -a, 2, 1).$$

Aufgabe 9.5 *Betrachtet wird der Vektorraum* $\mathbb{R}^{2\times 2}$*.*

(a) Liegt die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *in der linearen Hülle* $\mathrm{lin}M$ *mit*

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}?$$

Man bestimme die Dimension von $\mathrm{lin}M$*. Man erzeuge Unterräume von* $[M]$ *mit allen möglichen Dimensionen.*

(b) Sowohl alle symmetrischen Matrizen als auch alle Diagonalmatrizen aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ *spannen einen Unterraum des* $\mathbb{R}^{2\times 2}$ *auf. Man bestimme jeweils eine Basis und die Dimension dieser beiden Unterräume.*

Votierungswoche: 12.12. - 16.12.2011

Mathematik I für Informatiker, Computervisualisten, Wirtschaftsinformatiker und Ingenieurinformatiker WS 2011/12 **Übung 8**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 8.1 *Gegeben seien die Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 11 & -25 & 12 \\ 10 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Man berechne: $A + B,\ A - B,\ A + B + C,\ 3A - 4B.$

(b) Falls möglich, ermittle man reelle Zahlen μ, λ *für welche die Gleichung* $\lambda A + \mu B = C$ *gilt.*

Aufgabe 8.2 *Für die Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

berechne man:

(a) $A \cdot B,\ B \cdot A,\ A \cdot C,\ C \cdot B,\ A^T \cdot C,\ C^T \cdot A.$

(b) $A \cdot B \cdot C,\ C \cdot B \cdot A.$

Aufgabe 8.3 *Man bestimme* A^n *und* B^n*,* $n \geq 2$*, von*

(a) $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, *(b)* $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 8.4 *Man bestimme* X *aus der Matrizengleichung*
$A + 3(X - A - I_2) = 2B + X - I_2$

(a) allgemein für $A, B, X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

(b) für $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8.5 *Man berechne die inverse Matrix von*

(a) $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, *(b)* $D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$

Aufgabe 8.6 *Man bestimme die inverse Matrix, falls sie existiert, zu folgenden Matrizen, deren Elemente aus einem Restklassenkörper sind:*

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ *mit Elementen aus* $\mathbb{Z}_5$ *bzw. aus* $\mathbb{Z}_7$.

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *mit Elementen aus* $\mathbb{Z}_3$ *bzw. aus* $\mathbb{Z}_5$.

Votierungswoche: 05.12. - 09.12.2011

Mathematik I für Informatiker, Computervisualisten, Wirtschaftsinformatiker und Ingenieurinformatiker WS 2011/12 **Übung 7**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 7.1 *Lösen Sie mithilfe des Gauß'schen Algorithmus folgende Gleichungssysteme über dem Körper der reellen Zahlen.*

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -4 \\ 5x & - & y & + & z & = & 0 \\ 7x & + & 3y & + & 7z & = & -8 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 11 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & - & 7x_5 & = & 9 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = & 2 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 7.2 *Gegeben sei das Gleichungssystem über dem Körper der reellen Zahlen*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2 & = & 0 \\ x_1 & + & \alpha x_2 & + & 2x_3 & + & \beta & = & 0 \end{array} .$$

Für welche Werte α und β besitzt das System genau eine Lösung, keine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen? Man löse das System für $\alpha = 1$ und $\beta = 4$.

Aufgabe 7.3 *Lösen Sie mithilfe des Gauß'schen Algorithmus das Gleichungssystem über dem Körper der komplexen Zahlen*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & i\,x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & i\,x_2 & + & 3i\,x_3 & = & 3 \\ i\,x_1 & + & (2i-2)x_2 & & & = & i+2 \end{array} .$$

Aufgabe 7.4 *Gegeben sei das Gleichungssystem über dem Körper der komplexen Zahlen*

$$\begin{array}{rcrcrcr} i\,x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2i \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3i\,x_3 & = & 1 \\ -x_1 & - & -i\,x_2 & + & \alpha x_3 & = & \beta \end{array} .$$

Für welche Werte α und β besitzt das System genau eine Lösung, keine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 7.5 *Gegeben sei das Gleichungssystem $Ax = b$ über dem Körper $\mathbb{K}$ mit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & \alpha \\ 1 & \alpha & 3 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen bzw. keine Lösung?*

(b) *Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$. Für welche $\alpha \in \mathbb{Z}_5$ gibt es genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen bzw. keine Lösung?*

Aufgabe 7.6 *Bestimmen Sie für das folgende lineare Gleichungssystem über der Menge M, mit $M \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5\}$ jeweils die Lösungsmenge. Für $M \in \{\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5\}$ sind dabei die Zahlen mit den entsprechenden Restklassen zu identifizieren.*

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & +6x_4 & = & 3 \\ & 2x_2 & & +4x_4 & = & 2 \\ & x_2 & +x_3 & -2x_4 & = & -1 \\ x_1 & & & -9x_4 & = & -3 \end{array}.$$

Votierungswoche: 28.11. - 02.12.2011

Mathematik I für Informatiker, Computervisualisten, Wirtschaftsinformatiker und Ingenieurinformatiker WS 2011/12 **Übung 6**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 6.1 *Sei M die Menge aller quadratischen Tabellen der Form*

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R},$$

in der folgende Verknüpfung $\otimes$ erklärt ist:

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & +a_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & +a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -a_1b_2 - a_2b_1 \\ a_2b_1 + a_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie $(M, \otimes)$ auf Assoziativität, Kommutativität, Existenz des neutralen und inversen Elementes und Abgeschlossenheit, d. h. die Verknüpfung $\otimes$ führt nicht aus der Menge M hinaus.

Aufgabe 6.2 *Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit der Verknüpfung $\circ$ in G und dem neutralen Element e.*

(a) *Zeigen Sie, dass das inverse Element $g^{-1} \in G$ zum Element $g \in G$ eindeutig bestimmt ist.*

(b) *Zeigen Sie, dass die Gleichungen $x \circ a = b$ und $a \circ y = b$ mit den Unbekannten x und y für alle $a, b \in G$ eindeutig lösbar sind, d. h. dass es für alle $a, b \in G$ genau ein $x \in G$ und genau ein $y \in G$ mit $x \circ a = b$ und $a \circ y = b$ gibt.*

Aufgabe 6.3 *Sei in der Menge M aus Aufgabe 6.1 eine weitere Operation $\oplus$ erklärt mit:*

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $(M; \oplus, \otimes)$ ein Körper ist.

Aufgabe 6.4 *Gegeben seien $z_1 = 2 + 3\mathrm{i}$ und $z_2 = 3 - 5\mathrm{i}$. Berechnen Sie:*

$$z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, \bar{z}_2 \cdot z_1, z_2 \cdot \bar{z}_2, |z_2|.$$

Aufgabe 6.5 *Gegeben sind die folgenden komplexen Zahlen*

$$z_1 = i, \quad z_2 = -\sqrt{3}+\mathrm{i}, \quad z_3 = 2(\cos\frac{7}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{7}{4}\pi), \quad z_4 = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}, \quad z_5 = 81\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}.$$

Man berechne:

(a) z_1^k *mit* $k \in \{15, 28, 201, 4278\}$,

(b) die Potenzen z_2^4, z_3^6 *und* z_4^3,

(c) die Wurzeln $\sqrt[3]{z_1}$ *und* $\sqrt[4]{z_5}$.

Man veranschauliche die Ergebnisse der Teilaufgabe (c) in der Gaußschen Zahlenebene.

Aufgabe 6.6 *Man bestimme alle komplexen Lösungen der Gleichung* $z^3 - 7 = \left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^4$.

Votierungswoche: 21.11. - 25.11.2011

Mathematatik I für Informatiker, Computervisualisten, Wirtschaftsinformatiker und Ingenieurinformatiker WS 2011/12 **Übung 5**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 5.1 *Beweisen Sie den Binomoschen Satz (Satz 3.13 aus der Vorlesung) mithilfe vollständiger Induktion: Für $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Aufgabe 5.2 *Jeder Nutzer eines Netzwerkes hat ein Passwort, das aus 6 bis 8 Zeichen besteht, wobei jedes Zeichen ein Kleinbuchstabe oder eine Ziffer ist. Jedes Passwort muss mindestens eine Ziffer enthalten. Wie viele verschiedene Passwörter sind möglich?*

Aufgabe 5.3 *Ein BIT ist ein Element der Menge $M = \{0, 1\}$. Ein BIT-STRING der Länge n ist ein Element aus M^n.*
Wie viele Bit-Strings der Länge n gibt es? Wie viele Bit-Strings der Länge 10 beginnen und enden mit 1? Wie viele Bit-Strings der Länge n enthalten genau 5 Einsen? Wie viele Bit-Strings der Länge 8 enthalten mehr als 6 Einsen? Wie viele Bit-Strings der Länge 8 haben dieselbe Anzahl von Nullen und Einsen?

Aufgabe 5.4 *Seien*

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 & 10 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \\
\sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 5 & 1 & 10 & 8 & 3 & 4 & 9 & 7 & 6 \end{pmatrix} \text{ und} \\
\sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 10 & 9 & 7 & 5 & 6 & 8 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Permutationen aus S_{10}.

(a) *Man bestimme die Kompositionen $\sigma_2 \circ \sigma_3, \sigma_3 \circ \sigma_2, (\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3$ und $\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3)$.*

(b) *Man bestimme $\sigma_2^{-1} \circ \sigma_3^{-1}, (\sigma_2 \circ \sigma_3)^{-1}$ und $(\sigma_3 \circ \sigma_2)^{-1}$.*

Aufgabe 5.5 *Man berechne mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von*

(a) *91 und 133,* (b) *250179 und 449094.*

Aufgabe 5.6 *Sei* $\mathbb{Z}_6$ *die Menge der Restklassen modulo* 6.

(a) *Stellen Sie die Verknüpfungstabellen der Mengen* $\mathbb{Z}_6$ *bezüglich der Addition* $\oplus$ *und* $\mathbb{Z}_6 \backslash \{[0]_6\}$ *bezüglich der Multiplikation* $\odot$ *auf.*

(b) *Lösen Sie folgende Gleichung:* $([4]_6 \odot [x]_6) \oplus ([x]_6 \odot [3]_6) = [2]_6$.

(c) *Finden Sie alle Paare* $[x]_6, [y]_6$ *mit* $[x]_6 \odot [y]_6 = [0]_6$.

Votierungswoche: 14.11. - 18.11.2011

Mathematik I für Informatiker, Computervisualisten, Wirtschaftsinformatiker und Ingenieurinformatiker WS 2011/12 **Übung 4**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 4.1 *Untersuchen Sie, welche der folgenden Relationen $F \subseteq M_1 \times M_2$ Abbildungen sind und bestimmen Sie gegebenenfalls Definitions- und Wertebereich:*

(a) $M_1 = \{1,2,3,4\}, M_2 = \{a,b,c,d\} : F = \{(1,a),(1,c),(4,e)\}$.

(b) $M_1 = M_2 = \mathbb{R} : F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x+1}{x-1}\}$.

(c) $M_1 = M_2 = P(A)$ *(Potenzmenge einer beliebigen Menge A):*
$F = \{(B,\bar{B}) \in P(A) \times P(A) | \bar{B} = A \backslash B\}$.

Aufgabe 4.2 *Man untersuche, ob die folgenden Abbildungen $f : A \to B$ injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.*

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}, B = \{y \in \mathbb{R} : -\frac{1}{8} \leq y \leq 1\}, f(x) = 2x^2 - x$

(b) $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}, B = \{y \in \mathbb{R} : 1 \leq y \leq 3\}, f(x) = |x|$

(c) $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}, B = \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 1\}, f(x) = |x|$

(d) $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 6\}, B = \{y \in \mathbb{R} : -1 \leq y \leq 12/5\}, f(x) = \sqrt{|x-5|}$

(e) *Sei M eine beliebige Menge, $A = B = P(M)$ ihre Potenzmenge. Für $Q \in P(M)$ sei $f(Q) = \bar{Q}$.*

Aufgabe 4.3 *Bestimmen Sie*

(a) *eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{Z}$, so dass die Abbildung $f : \{1,\ldots,15\} \to T$ mit $k \mapsto k^2 - k$ bijektiv ist.*

(b) *sowohl eine injektive Abbildung $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ als auch eine surjektive Abbildung $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.*

Aufgabe 4.4 *Sei $f_1(x) = 4x^2 + 3$ und sei $f_2(x) = \sqrt{x}$.*

(a) *Man bestimme für f_1 und f_2 den größten Definitionsbereich X und zugehörigen kleinsten Wertebereich Y, so dass f_1 und f_2 Abbildungen sind, sowie, falls vorhanden, die inversen Abbildungen.*

(b) *Man untersuche f_1 und f_2 auf die Eigenschaften Surjektivität, Injektivität und Bijektivität.*

(c) *Man bestimme von den Kompositionen* $f_1 \circ f_2$ *und* $f_1 \circ f_2$ *Definitions- und Wertebereich, ihre Eigenschaften (Surjektivität, Injektivität, Bijektivität) und, wenn möglich, die inversen Abbildungen.*

Aufgabe 4.5 *Gegeben sind* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *und*

$$\begin{array}{ll} f_1 : A \to \mathbb{N}, & f_1(x) = 3x - 1; \\ f_2 : A \to \mathbb{N}, & f_2(x) = x^2 - 6x + 10; \\ f_3 : A \to \{1, 2, 5\}, & f_3(x) = x^2 - 6x + 10; \\ f_4 : A \to \{2, 5, 8, 11, 14\}, & f_4(x) = 3x - 1. \end{array}$$

(a) *Welche der Abbildungen sind surjektiv, injektiv oder bijektiv?*

(b) *Welche der folgenden Kompositionen sind wohldefiniert und untersuchen Sie ggf. auf Surjektivität, Injektivität und Bijektivität:* $f_4 \circ f_3$, $f_3 \circ f_1$ *und* $f_4 \circ f_4$.

(c) *Geben Sie, wenn möglich, die Umkehrabbildungen für alle Abbildungen und Kompositionen, die Abbildungen sind, an.*

Aufgabe 4.6 *Sei* $f : X \to Y$ *eine Abbildung. Zeigen Sie:*

(a) $\forall B \subseteq Y (f(f^{-1}(B)) \subseteq B)$. *Zeigen Sie, dass die Gleichheit genau dann gilt, wenn* f *surjektiv ist.*

(b) $\forall A \subseteq X (A \subseteq f^{-1}(f(A)))$. *Zeigen Sie, dass die Gleichheit genau dann gilt, wenn* f *injektiv ist.*

Votierungswoche: 07.11. - 11.11.2011

Mathematik I für Informatiker, Computervisualisten, Wirtschaftsinformatiker und Ingenieurinformatiker WS 2011/12 **Übung 3**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 3.1 *Beweisen Sie für eine endliche Menge* M*:* $P(M) = 2^{|M|}$.

Aufgabe 3.2 *Untersuchen Sie die folgenden Relationen* R *auf der jeweiligen Menge* M *auf ihre Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.*

(a) $M = \mathbb{R}, (x, y) \in R$

(b) $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, ((a, b), (c, d)) \in R \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

(c) $M = \{1, 2, 3\}, R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$

(d) $M = \mathbb{N}, (m, n) \in R \Leftrightarrow (2 \, teilt m \cdot n \, oder m = n)$

(e) $M = \mathbb{Z}, (u, v) \in R \Leftrightarrow n - v \in n \cdot \mathbb{Z} = \{n \cdot z : z \in \mathbb{Z}\}$

Welche der Relationen bilden eine Halbordnung, eine totale Ordnung, eine Äquivalenzrelation?

Aufgabe 3.3 *Sei* E *die Menge der Eigenschaften Reflexivität (Re), Symmetrie (Sy) und Transitivität (Tr), d. h.* $E = \{Re, Sy, Tr\}$*. Man gebe zu jedem Element* X *der Potenzmenge von* E *ein Beispiel einer binären Relation* R *über der Menge* $M = \{1, 2, 3, 4\}$ *an, die die Eigenschaften aus* X *besitzt, jedoch nicht die Eigenschaften aus* $E \backslash X$ *hat.*
Erläuterung: Gilt z. B. $X = \{Re\}$*, so ist eine binäre Relation* R *über* M *gesucht, die reflexiv, aber nicht symmetrisch und nicht transitiv ist.*

Aufgabe 3.4 *Man untersuche, ob folgende Relationen Äquivalenzrelationen auf der Menge* X *sind und veranschauliche gegebenenfalls die Äquivalenzklassen:*

(a) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq 0\}, (x_1, y_2)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$.

(b) $X = \mathbb{R}, xRy \Leftrightarrow [x] = [y]$*, wobei* $[z]$ *die größte ganze Zahl* k *mit* $k \leq z$ *bedeutet.*

(c) $X = \mathbb{N}, xRy \Leftrightarrow x$ *ist das Quadrat von* y.

(d) X *sei die Menge aller Geraden* g *in der Ebene,* $g_1 R g_2 \Leftrightarrow g_1 \cap g_2 = \emptyset$ *oder* $g_1 = g_2$.

Aufgabe 3.5 *Man bestimme von den folgenden Relationen* $F \subseteq M_1 \times M_2$ *Definitions- und Wertebereich. Welche der Relationen sind Abbildungen?*

(a) $M_1 = \{1, 2, 3, 4\}, M_2 = \{a, b, c, d\} : F = \{(1, a), (1, c), (4, e)\}$.

(b) $M_1 = M_2 = \mathbb{R} : F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x+1}{x-1}\}$.

(c) $M_1 = M_2 = P(A)$ *(Potenzmenge einer beliebigen Menge* A*):*
$F = \{(B, \bar{B}) \in P(A) \times P(A) | \bar{B} = A \backslash B\}$.

Aufgabe 3.6 *Sei* $f_1(x) = 4x^2 + 3$*, und sei* $f_2(x) = \sqrt{x}$.

(a) *Man bestimme für* f_1 *und* f_2 *den größten Definitionsbereich* X *und zugehörigen kleinsten Wertebereich* Y*, so dass* f_1 *und* f_2 *Abbildungen sind, sowie, falls vorhanden, die inversen Abbildungen.*

(b) *Man untersuche* f_1 *und* f_2 *auf die Eigenschaften Surjektivität, Injektivität und Bijektivität.*

(c) *Man bestimme von den Kompositionen* $f_1 \circ f_2$ *und* $f_1 \circ f_2$ *Definitions- und Wertebereich, ihre Eigenschaften (Surjektivität, Injektivität, Bijektivität) und, wenn mögleich, die inversen Abbildungen.*

Votierungswoche: 01.11. - 04.11.2011

Mathematik I für Informatiker, Computervisualisten, Wirtschaftsinformatiker und Ingenieurinformatiker WS 2011/12 **Übung 2**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 2.1 *Man beweise die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:*

(a) $\sum_{i=1}^{k} i \cdot i! = (k+1)! - 1$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$,

(b) *Für jede natürliche Zahl* n *ist der Ausdruck* $2n^3 + 4n$ *durch* 6 *teilbar.*

Aufgabe 2.2

(a) *Man beweise mit Hilfe vollständiger Induktion folgende Ungleichung: Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $x \in \mathbb{R}_{\geq -1}$ *gilt:* $(1+x)^n \geq 1 + nx$ *(Bernoulli'sche Ungleichung).*

(b) $\prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Aufgabe 2.3 *Gegeben seien folgende Mengen* $A, B, C \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ *mit*

$A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}, B = \{(x,y) : 2y = x + 1\}, C = \{(x,y) : y < x^2\}.$

Bestimmen Sie $A \cap B, A \cup C, B \backslash A, A \cap B \cap C$ *und* $(A \backslash C) \cap B$*, indem Sie diese in einem* x, y*-Koordinatensystem veranschaulichen.*

Aufgabe 2.4

(a) *Bestimmen Sie die Potenzmenge* $P(A)$ *der Menge* $A = \{a, b, c\}$.

(b) *Gibt es Mengen, deren Potenzmenge nur* 1 *oder* 2 *Elemente enthält?*

(c) *Man bestimme die Potenzmenge der Potenzmenge von* $A = \{-1, 1\}$.

Aufgabe 2.5 *Sei* M *eine Menge. Zeigen Sie, dass für alle* $A, B, C \subseteq M$ *gilt:* $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Aufgabe 2.6 *Gegeben seien die Mengen*

$$X_{(i,j)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-i)^2 + (y-j)^2 \leq 1\}.$$

Bestimmen Sie $\bigcup_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} X_i$ *und* $\bigcap_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} X_i$.

Votierungswoche: 24.10. - 28.10.2011

Mathematik I für Informatiker, Computervisualisten, Wirtschaftsinformatiker und Ingenieurinformatiker WS 2011/12 **Übung 1**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 1.1 *Man beschreibe symbolisch unter Verwendung der Aussagen:*
A: Der Student hat die Modulprüfung bestanden.
B: Der Student hat mindestens 50% *der Übungsaufgaben gelöst.*
C: Der Student hat fleißig studiert.
D: Der Student hat die Lehrveranstaltungen besucht.

(a) *Wenn der Student die Lehrveranstaltungen besucht und mindestens* 50% *der Übungsaufgaben gelöst hat, hat er fleißig studiert und besteht die Modulprüfung.*

(b) *Der Student besteht die Modulprüfung genau dann, wenn er fleißig studiert, die Lehrveranstaltungen besucht und mindestens* 50% *der Übungsaufgaben gelöst hat.*

(c) *Wenn der Student die Lehrveranstaltungen besucht hat, jedoch nicht fleißig studiert und nicht mindestens* 50% *der Übungsaufgaben gelöst hat, besteht er die Modulprüfung nicht.*

Aufgabe 1.2 *Man schreibe die folgenden Aussagen mit den logischen Operationszeichen:*
(a) *nicht nur* A, *sondern auch* B, (b) *wenn* A, *so nicht* B,
(c) *es ist nicht wahr, dass* A, *oder* B (d) *weder* A *noch* B,
(e) *dann, aber nur dann* A, *wenn nicht* B, (f) A, *vorausgesetzt, dass* B.

Aufgabe 1.3 *Man entscheide anhand einer Wahrheitswerttabelle, ob die folgenden Aussageverbindungen Tautologien, erfüllbar oder nicht erfüllbar (d. h. für keine Wahrheitswertbelegung der Aussagen* A, B, C *wird die Aussageverbindung wahr) sind!*
(a) $(\overline{A} \wedge \overline{B}) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$, (b) $((\overline{A \wedge B}) \Leftrightarrow (A \vee B))$, (c) $\overline{((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}$.

Aufgabe 1.4 *Man zeige mithilfe einer Wahrheitstabelle, dass die folgenden Aussageverbindungen Tautologien sind:*
(a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \vee B)$, (b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A \wedge \overline{B}})$,
(c) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

Aufgabe 1.5 *Gegeben sind die Implikationen:*
(1) $A \Rightarrow B$, (2) $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ *(Kontraposition von (1)),* (3) $(A \wedge \overline{B}) \Rightarrow B$.
Zum Nachweis der Implikation (1) gibt es u. a. folgende Beweistechniken:

(a) Direkter Beweis: Man beweist aus der Richtigkeit der Voraussetzung A die Implikation (1) direkt.

(b) Beweis der Kontraposition von (1): Man beweist die Implikation (2).

(c) Indirekter Beweis: Man beweist die Implikation (3).

Man zeige, dass die Implikationen (1), (2) und (3) paarweise logisch äquivalent zueinander sind.

Votierungswoche: 17.10. - 21.10.2011

Mathematik I für Informatiker, Computervisualisten, Wirtschaftsinformatiker und Ingenieurinformatiker WS 2011/12 **Übung 0**
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 0.1 *Man ermittle $x \in \mathbb{R}$ aus folgenden Ungleichungen:*
(a) $\frac{x}{2-x} < 2$, *(b)* $\frac{1}{x} \geq |2x-10|$, *(c)* $\left|\frac{1}{2-x}\right| < \frac{1}{3-2x}$.

Aufgabe 0.2 *Man ermittle $x \in \mathbb{R}$ aus folgenden Gleichungen:*

(a) $\log_4\{2\log_3[1+\log_2(1+3\log_2 x)]\} = \frac{1}{2}$,

(b) $\log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x - \log_{\frac{1}{3}} x = 6$,

(c) $4^{x-2} - 17 \cdot 2^{x-4} + 1 = 0$,

(d) $3\sqrt[x]{81} - 10\sqrt[x]{9} + 3 = 0$,

(e) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$,

(f) $x + 2\sqrt{x} - 3 = 0$.

Aufgabe 0.3 *Man skizziere die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y = f(x)$:*
(a) $y = \ln(x-1)$, *(b)* $y = \ln x - 1$, *(c)* $y = 2\sin 3x$, *(d)* $y = 2 + \cos x$,
(e) $y = |x| - x$.

Aufgabe 0.4 *Es seien $f(x) = x\sqrt{x+1}, h(x) = x^3 - x$ und $g(x) = \sin 2x$. Bestimmen Sie:*

(a) $f(x-1), f(x)-1, -f(x), f(-x), 2f(x), f(2x)$,

(b) $h[h(x)], g[h(2)], h[g(x)], g[h(2)]!$

Aufgabe 0.5 *Man zerlege in Linearfaktoren, d. h. in ein Produkt von Polynomen vom Grad 1, und skizziere folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit*

(a) $f(x) = x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4$,

(b) $f(x) = x^6 + x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 6x$.

Aufgabe 0.6 *Man bestimme die Hauptwerte $0° \leq x < 360°$ folgender Gleichungen:*
(a) $2\sin^2 x = 3\cos x$, *(b)* $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.