Mathematik II für Informatiker SS 2014 **Übung 13**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 13.1 *Sei* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$.

i) *Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von* f.

ii) *Zeigen Sie, dass* $\mathbf{x}^* = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ *lokales Maximum von* f *ist.*

Aufgabe 13.2 *Bestimmen Sie Lage und Art der Extremwerte sowie Sattelpunkte der Funktionen* $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit*

i) $f(x,y) = xy - y\sqrt{x}$.

ii) $f(x,y) = x^2y^3 + 4xy^2 - 8xy$.

Aufgabe 13.3 *Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x,y,z) = x + 2y - z$ *unter den Bedingungen* $x^2 + y^2 = 8$ *und* $x + z = 4$.

Aufgabe 13.4 *Berechnen Sie für folgende Funktionen* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *bzw.* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *die Integrale* $\int_Q f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ *:*

i) $f(x,y) = (x+y)^2$ *mit* $Q = [1,3] \times [-2,3]$,

ii) $f(x,y) = 3 + \cos x \cos y$ *mit* $Q = [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$,

iii) $f(x,y,z) = z - xy^2$ *mit* $Q = [0,1] \times [-1,2] \times [0,1]$.

Aufgabe 13.5 *Berechnen Sie das Integral* $\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ *über dem Normalbereich* D *der folgenden Funktionen* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *bzw.* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$*:*

i) $f(x,y) = x + y$ *mit* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le y \le x^2\}$,

ii) $f(x,y) = (x+y)^2$ *mit* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2, x \le y \le \frac{x}{2} + 1\}$,

iii) $f(x,y,z) = xyz$ *mit* $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x \le 4, x \le y \le 2x, 0 \le z \le xy\}$.

Votierungswoche: 30.07. - 04.07.2014

Mathematik II für Informatiker SS 2014 **Übung 12**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 12.1 *Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen dritter Ordnung für* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2 : x = y\} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x, y) = \frac{xy}{x-y}$.

Aufgabe 12.2 *Sei* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *mit* $f(x, y) = \begin{pmatrix} xy\cos(y) \\ x\sin(y) \\ x^2 + y \end{pmatrix}$.

i) *Bestimmen Sie die ersten partiellen Ableitungen der Koordinatenfunktionen.*

ii) *Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von* f *an der Stelle* $\mathbf{x}^* = (1, \frac{\pi}{4})$.

Aufgabe 12.3 *Sei* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x, y) = x^2y^3 + 4xy^2 - 8xy$.

i) *Berechnen Sie den Gradienten von* f.

ii) *Bestimmen Sie die Punkte* (x, y)*, in denen der Gradient verschwindet.*

iii) *Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix des Gradienten.*

Aufgabe 12.4 *Sei* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x, y) = x^2yz^2 + y^2\sqrt{xz}$.

i) *Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von* f.

ii) *Bestimmen Sie die Hesse-Matrix im Punkt* $(1, 1, 1)$.

Aufgabe 12.5 *Sei* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x, y) = 3x^2 - 2x\sqrt{y} - 8x + y + 8$.

i) *Berechnen Sie den Gradienten von* f.

ii) *Zeigen Sie, dass grad* $f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ *nur in* $\mathbf{x}^* = (2, 4)$ *gilt.*

iii) *Untersuchen Sie die Hesse-Matrix* $H_f(2, 4)$ *auf Definitheit.*

Votierungswoche: 23.06. - 27.06.2014

Mathematik II für Informatiker SS 2014 **Übung 11**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 11.1 *Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und bestimmen Sie im Falle der Existenz ihren Wert.*

i) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x \ln x} dx$

ii) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+x^2} dx$

iii) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x e^{(-x^2)} dx$

Aufgabe 11.2 *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = x(2\pi - x)$ *für* $0 \leq x < 2\pi$, *und* $f(x + 2\pi) = f(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$. *Bestimmen Sie die Fourierreihe von* f.

Aufgabe 11.3 *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & \textit{für} \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & \textit{für} \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases},$$

und $f(x + 2\pi) = f(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$. *Entwickeln Sie* f *in eine Fourierreihe und skizzieren Sie* $f(x)$.

Aufgabe 11.4 *Bestimmen Sie die Fourierreihe von* $f(x) = \sin x \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

Aufgabe 11.5 *Ermitteln Sie den Definitionsbereich* D *folgender Funktionen* $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *und ihre partiellen Ableitungen:*

i) $f(x, y) = \frac{4}{x^2+y^2}$

ii) $f(x, y) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$

iii) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

Votierungswoche: 16.06. - 20.06. 2014

Mathematatik II für Informatiker SS 2014 **Übung 10**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

PROF. DR. MARTIN HENK, DR. MICHAEL HÖDING

Aufgabe 10.1 *Bestimmen Sie folgende unbestimmte Integrale mithilfe der angegebenen Substitutionen:*

i) $\int x^2\, e^{x^3+4}\, dx$ *mit* $g(x) = x^3 + 4$

ii) $\int \tan^3 x\, dx$ *mit* $g(x) = \tan x$

iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$ *mit* $g(x) = x + \sqrt{x^2 + 3}$

Aufgabe 10.2 *Bestimmen Sie folgende unbestimmte Integrale mittels partieller Integration:*

i) $\int x^2 \cos x\, dx$

ii) $\int x^3\, e^{2x+1}\, dx$

iii) $\int x \ln x\, dx$

Aufgabe 10.3 *Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale mithilfe der angegebenen Substitutionen:*

i) $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x+1}\, dx$ *mit* $g(x) = e^x$

ii) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x} = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)} = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$ *mit* $g(x) = \tan\frac{x}{2}$

iii) $\int\limits_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$ *mit* $x(t) = t^2$

Aufgabe 10.4 *Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale mittels partieller Integration:*

i) $\int\limits_0^1 x^2\, e^x\, dx,$

ii) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x \cos x\, dx.$

Aufgabe 10.5 *Der Flächeninhalt F eines Kreises mit dem Radius 1 kann über das folgende Integral berechnet werden:*

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt F.

Votierungswoche: 10.06. - 13.06. 2014

Mathematik II für Informatiker SS 2014 **Übung 9**
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 9.1 *Ermitteln Sie den Grenzwert*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x(1-\sqrt{1-x^2})},$$

indem Sie $\sin(x)$ *und* $\sqrt{1-x^2}$ *durch ihre Taylorreihen ersetzen.*

Aufgabe 9.2 *Ermitteln Sie jeweils eine Stammfunktion der Funktionen:*

i) $f(x) = \frac{2}{5}x^6 + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{5x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$

ii) $f(x) = \frac{x^3-2x^2+5x-2}{x+3}\,x$

iii) $f(x) = \sin\frac{1}{2}x + \frac{3}{\cos^2 x}$

Aufgabe 9.3 *Bestimmen Sie eine Stammfunktion von:*

i) $f : \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \frac{3}{6-2x}$

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = e^{2x-5} + e^{-x}$

iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = |2x-3|$

Aufgabe 9.4 *Berechnen Sie folgende Integrale mithilfe der Substitutionsregel (Satz 15.21):*

i) $\int x^3\, e^{x^4}\, dx$

ii) $\int \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\, dx$

iii) $\int \frac{1}{x}\sin(\ln x)\, dx$

Aufgabe 9.5 *Gegeben seien die Funktionen* $f_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ *mit* $f_1(x) = -\sqrt{x}$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f_2(x) = \frac{1}{8}x^2$ *und* $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f_3(x) = x-2$. *Bestimmen Sie den Flächeninhalt „zwischen“ den drei Funktionen.*

Votierungswoche: 02.06. - 07.06. 2014

Mathematik II für Informatiker SS 2014 **Übung 8**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 8.1 *Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3(x)$ von f mit dem Entwicklungspunkt x^* einschließlich Restglied für:*

i) $f(x) = \cos \frac{x-\pi}{2}$ *mit* $x^* = \pi$,

ii) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ *mit* $x^* = 0$.

Aufgabe 8.2 *Ermitteln Sie eine Näherung für die Eulersche Zahl* e *mithilfe des Taylorpolynoms 6. Grades.*

Aufgabe 8.3 *Berechnen Sie eine Näherung für* $\frac{1}{\sqrt{1{,}2}}$, *indem Sie* $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ *durch ein Taylorpolynom 4-ten Grades mit einem geeigneten Entwicklungspunkt* x^* *approximieren und schätzen Sie den Fehler mithilfe des Restgliedes ab.*

Aufgabe 8.4 *Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion* $f(x) = \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ *im Punkt* $x^* = 0$ *und ermitteln Sie deren Konvergenzradius.*

Aufgabe 8.5 *Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Potenzreihen*

$$\text{i)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k, \qquad \text{ii)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+2}}{2^k}(x-2)^k.$$

Votierungswoche: 26.05. - 30.05. 2014

Mathematik II für Informatiker SS 2014 **Übung 7**
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
PROF. DR. MARTIN HENK, DR. MICHAEL HÖDING

Aufgabe 7.1 *Gegeben seien die Parabel* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \frac{1}{2e}x^2$ *und die Funktion* $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ *mit* $g(x) = \ln x$.

i) *Zeigen Sie, dass die Parabel* f *die Funktion* g *berührt.*

ii) *Bestimmen Sie den Berührungspunkt.*

Aufgabe 7.2 *Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:*

i) $\lim\limits_{x\to a} \frac{x-a}{x^n-a^n}$; *für* $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0+} x^2 \ln x$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$

iv) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{\ln(x-1)}\right)$

v) $\lim\limits_{x\to 1}(e^{2x-2} + x - 1)^{\frac{1}{x}}$

Aufgabe 7.3 *Bestimmen Sie Monotonie-, Konkavitäts-, Konvexitätsintervalle, Wendepunkte und Extrema von* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Aufgabe 7.4 *Seien* $a, b > 0$, *und sei* E *die Ellipse* $E = \{(x, y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$. *Man bestimme in* E *ein Rechteck mit maximalen Flächeninhalt (wobei die Seiten des Rechtecks parallel zu den Koordinatenachsen sind).*

Aufgabe 7.5 *Beweisen Sie mithilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung die Ungleichung* $\ln(x^2 + 1) \leq 2 - \frac{2}{x^2+1}$ *für* $x \in [-1, 1]$.

Votierungswoche: 19.05. - 23.05. 2014

Mathematik II für Informatiker SS 2014 **Übung 6**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

PROF. DR. MARTIN HENK, DR. MICHAEL HÖDING

Aufgabe 6.1 *Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen in x^* differenzierbar sind:*

i) $f(x) = |x| + |x-2| \quad in \quad x^* = 2$

ii) $f(x) = \sqrt{1-\sin x} \quad in \quad x^* = \frac{\pi}{2}$

iii) $f(x) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} - x) & \text{für } x < 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \quad in \quad x^* = 0$

Aufgabe 6.2 *Bilden Sie die 1. Ableitung der Funktionen:*

i) $f(x) = x^2 \sqrt[5]{x} + \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$

ii) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

iii) $f(x) = (x^4 + \frac{1}{\sqrt{x}} + e^x)\sin x$

iv) $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}$

v) $f(x) = \ln \sqrt[3]{\frac{x-2}{3-x}}$

Aufgabe 6.3 *Zeigen Sie, dass die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{2} - 4\cos(\ln x) + 3\sin(\ln x)$ der Gleichung*

$$x^2 f''(x) + xf'(x) + f(x) = x$$

genügt.

Aufgabe 6.4 *Bestimmen Sie die n-te Ableitung von $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ (mit Beweis).*

Aufgabe 6.5 *Leiten Sie die Ableitungen der Funktionen arcsin(x) und arctan(x) (Siehe Satz 13.10.) mithilfe der Ableitung der Umkehrfunktion (Satz 13.9) her.*

Votierungswoche: 12.05. - 16.05.2014

Mathematik II für Informatiker SS 2014 **Übung 5**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 5.1 *Gegeben sei die Funktion* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *mit*
$f(x) = 2\log_x 2 - 4\log_4 x - 3$.

i) *Zeigen Sie, dass für alle* $a, b \in \mathbb{R}$ *und* $a, b > 0$ *gilt:* $\log_a b = (\log_b a)^{-1}$.

ii) *Bestimmen Sie mithilfe der Gleichung aus* i) *die Nullstellen von* f.

Aufgabe 5.2 *Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte von Funktionen:*

$$\text{i) } \lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{3+x}}, \qquad \text{ii) } \lim_{x\to 3+} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\sqrt{x-3}},$$

$$\text{iii) } \lim_{x\to 0+} \frac{x^3+3x^2-4\sqrt{x}}{x^3+4x^2+2\sqrt[3]{x}}, \qquad \text{iv) } \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{7-x}}{x^2-9}.$$

Aufgabe 5.3 *Untersuchen Sie folgende Funktionen* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *an den gegebenen Stellen* x^* *auf Stetigkeit.*

i) $f(x) = \frac{1-x}{1-|x|}$ *in* $x^* \in \{-1, 1\}$,

ii) $f(x) = 1 - 2^{\frac{|x|}{x}}$ *in* $x^* = 0$,

iii) $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0, \end{cases}$ *in* $x^* = 0$,

iv) $f(x) = \frac{4-x^2}{|4x-x^3|}$ *in* $x^* \in \{-2, 0, 2\}$.

Aufgabe 5.4 *Gegeben sei die Gleichung* $x^2 - y^2 = 0$.

i) *Bestimmen Sie eine gerade Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $y = f(x)$, *die diese Gleichung erfüllt und an den Stellen* $x_1^* = \pm 2$ *und* $x_2^* = \pm 4$ *unstetig ist.*

ii) *Bestimmen Sie eine ungerade Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $y = f(x)$, *die diese Gleichung erfüllt und an den Stellen* $x_1^* = \pm 1$ *und* $x_2^* = \pm 3$ *unstetig ist.*

Aufgabe 5.5 *Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:*

i) $\lim\limits_{a\to 0} \frac{\sin(x+a)-\sin x}{a}$, ii) $\lim\limits_{a\to 0} \frac{\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}}{a}$, iii) $\lim\limits_{a\to 0} \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}{a}$.

Votierungswoche: 05.05. - 09.05. 2014

Mathematatik II für Informatiker SS 2014 **Übung 4**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 4.1 *Ermittlen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen:*

i) $f(x) = \log_2(x + 14) + \log_2(x + 2) - 6$,

ii) $f(x) = (\lg x)^2 - \frac{9}{4} \lg x - 7$,

iii) $f(x) = 4^{x-2} - 17 \cdot 2^{x-4} + 1$,

iv) $f(x) = 5^{2x} - 3 \cdot 5^x + 2$.

Aufgabe 4.2 *Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktionen* $f : D_f \to \mathbb{R}$, *wobei* $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x < 2\pi\}$*:*

i) $y = |\sin 2x| - \frac{1}{2}$,

ii) $y = \sin x + \cos x - \sqrt{2}$.

Aufgabe 4.3 *Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen gerade oder ungerade sind:*

i) $f(x) = x^5 - 2x^3 + \frac{x}{2}$,

ii) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^4 + 2|x|}$,

iii) $f(x) = \sqrt[3]{x^5 - 2x^3} + x^3 \sin x$.

Aufgabe 4.4 *Seien* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Funktionen. Zeigen Sie:*

i) *Ist* f *eine gerade Funktion und* g *eine ungerade Funktion, so ist* $f \cdot g$ *eine ungerade Funktion.*

ii) *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine beliebige Funktion, dann kann* f *als Summe einer geraden Funktion* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und einer ungeraden Funktion* $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dargestellt werden.*

Aufgabe 4.5 *Untersuchen Sie das Grenzverhalten (links- und rechtsseitige Betrachtung) folgender Funktionen für* $x \to x^*$ *mit*

i) $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$ *und* $x^* = 0$,

ii) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ *und* $x^* = 1$,

iii) $f(x) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)}{\sqrt{x-3}}$ *und* $x^* = 3$.

Votierungswoche: 28.04. - 02.05. 2014

Aufgabe 3.1 *Berechnen Sie die Grenzwerte für folgende Zahlenfolgen:*

$$\text{i) } a_n = \frac{n + \sin(n^2)}{n + \cos(n)}, \quad \text{ii) } a_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n^2\right)}{n},$$
$$\text{iii) } a_n = \frac{3}{4 - a_{n-1}} \ \textit{mit } a_0 = 2 \textit{ für } n \geq 1.$$

Aufgabe 3.2 *Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert:*

$$\text{i) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{k-3}} \qquad \text{ii) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{5^{k-1}}.$$

Aufgabe 3.3 *Untersuchen Sie mithilfe des Majorantenkriteriums bzw. des Leibnizkriteriums folgende Reihen auf Konvergenz:*

$$\text{i) } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k-1}}, \qquad \text{ii) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}, \qquad \text{iii) } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin\left(\sqrt{k}\right)}{\sqrt{k^5}}.$$

Aufgabe 3.4 *Untersuchen Sie mithilfe des Quotientenkriteriums folgende Reihen auf Konvergenz:*

$$\text{i) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}, \qquad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}, \qquad \text{iii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!(n+3)!3^n}{(2n)!}.$$

Aufgabe 3.5 *Bei einem Bausparvertrag beträgt der Zinssatz* 2,5%. *Am Anfang des Jahres werden 2000 EUR eingezahlt.*

i) *Bestimmen Sie das Guthaben nach 10 Jahren.*

ii) *Wann ist ein Guthaben von 30000 EUR erreicht?*

Votierungswoche: 22.04. - 25.04. 2014

Mathematik II für Informatiker SS 2014 **Übung 2**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 2.1

i) *Berechnen Sie* $\operatorname{ggT}(p_1, p_2)$*:*

a) $p_1 = x^5 + x^4 + 1$, $p_2 = x^4 + x^3 + x^2 + 1$,

b) $p_1 = x^7 + x^5 + x^3 + 1$, $p_2 = x^5 + x^4 + x + 1$.

ii) *Beweisen Sie Satz 10.31.*

Aufgabe 2.2 *Untersuchen Sie die folgenden Zahlenfolgen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *auf Monotonie und Beschränktheit:*

i) $a_n = \frac{n-7}{(n+2)^2}$

ii) $a_n = (\frac{n-7}{n+2})^2$

iii) $a_{n+1} = \cos(\frac{1}{2}a_n)$ *mit* $a_0 = 0$

Aufgabe 2.3 *Zeigen Sie, dass für* $0 < \alpha < 1$ *die Zahlenfolge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *mit* $a_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$ *eine Nullfolge ist.*

Aufgabe 2.4 *Beweisen Sie, dass* $a = \frac{1}{3}$ *der Grenzwert der Zahlenfolge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *mit* $a_n = \frac{n^2+1}{3n^2-1}$ *ist.*

Aufgabe 2.5 *Untersuchen Sie die folgenden Zahlenfolgen* (a_n) *auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:*

i) $a_n = \frac{n(n+2)}{n+1} - \frac{n^3}{n^2-1}$ *für* $n \geq 2$

ii) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ *für* $n \geq 1$

iii) $a_n = (1 + \frac{3}{n})^{2n}$ *für* $n \geq 1$ [1]

iv) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ *für* $n \geq 1$

Votierungswoche: 14.04. - 16.04. 2014

[1] Hinweis: $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n = e$.

Mathematik II für Informatiker SS 2014 **Übung 1**
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 1.1 *Sei* $\mathbb{Z}_7$ *die Menge aller Restklassen modulo* 7. $\mathbb{Z}_7 \setminus \{[0]_7\}$ *bildet mit der Verknüpfung* $\odot$ *(Restklassenmultiplikation) eine Gruppe.*

i) *Seien* $U_1 = \{[1]_7,\ [6]_7\}$ *und* $U_2 = \{[1]_7,\ [2]_7,\ [4]_7\}$. *Zeigen Sie* $U_1, U_2 \leq \mathbb{Z}_7 \setminus \{[0]_7\}$ *und bestimmen Sie die Ordnungen von* U_1, U_2 *und* $[3]_7$. *Ist* $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{[0]_7\}, \odot)$ *zyklisch?*

ii) *Bestimmen Sie die Linksnebenklassen von* $(U_1,\ \odot)$ *und* $(U_2,\ \odot)$ *und den Index von* $(U_1, \odot)$ *und* $(U_2, \odot)$.

Aufgabe 1.2 *Zeigen Sie, dass die Menge*

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a+b \end{bmatrix} : \ a, b \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

mit der gewöhnlichen Matrizenaddition $+$ *und der gewöhnlichen Matrizenmultiplikation* $\cdot$ *einen Körper mit* 4 *Elementen bildet.*

Aufgabe 1.3 *Zeigen Sie, dass die Menge* $U = \{a + b\sqrt{7} \ : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ *ein Körper ist.*

Aufgabe 1.4 *Nach einer Geschichte aus 1001 Nacht vererbt ein reicher Kaufmann seinem ältesten Sohn die Hälfte, dem mittleren Sohn ein Drittel und dem jüngsten Sohn ein Siebentel seiner Kamele. Dummerweise stirbt ein Kamel, so dass keine der Rechnungen aufgeht. Daraufhin befragen sie einen Weisen, der ihnen sein eigenes Kamel leiht. Jetzt gehen alle Rechnungen auf und auch das Kamel des Weisen bleibt übrig.*
Bestimmen Sie die Anzahl der vererbten Kamele.

Aufgabe 1.5 *An einer Geburtstagsfeier eines Informatikstudenten nehmen 13 Studentinnen und Studenten teil. Beim Versuch die belegten Häppchen gerecht zu verteilen, wird festgestellt, dass 2 Häppchen übrig bleiben würden. Deshalb nimmt sich zuerst jeder 3 Häppchen. Nach einer Stunde verabschieden sich 2 Studentinnen und die restlichen Teilnehmer der Feier versuchen die verbliebenen Häppchen erneut aufzuteilen. Wieder würden 9 Häppchen übrig bleiben. Also nimmt sich jeder erst einmal noch 5 Häppchen. Nach einer weiteren Stunde verlassen 4 Studenten erneut die Party. Den übriggebliebenen Teilnehmern der Feier gelingt es nun die restlichen Häppchen unter sich aufzuteilen. Wieviele Häppchen bekam ein Teilnehmer, der bis zum Schluss geblieben ist, mindestens?*

Votierungswoche: 07.04. - 11.04. 2014

Mathematik II für Informatiker SS 2014 **Übung 0**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 0.1 *Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von*

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, ii) $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 0.2 *Bestimmen Sie Basis und Dimension der Eigenräume von*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 0.3 *Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf Definitheit.*

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, ii) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 0.4 *Gegeben seien die nicht-symmetrischen Matrizen A:*

i) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, ii) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

Untersuchen Sie die Matrizen $\frac{1}{2}(A + A^T)$ auf Definitheit

Aufgabe 0.5 *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. Zeigen Sie, dass es eine symmetrische, positiv definite Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt mit $B^2 = A$.*

Hinweis: Sei $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Diagonalmatrix, in deren Hauptdiagonale die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von A stehen und U die Matrix, deren Spalten die zugehörigen normierten Eigenvektoren von A sind. Dann gilt: $A = UDU^T$. Siehe auch Satz 9.34 der Vorlesung!

Votierungswoche: Keine Votierung in der 1. Woche – nur Besprechung!