Mathematik II für Informatiker SS 2012 **Übung 13**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 13.1 *Bestimmen Sie Lage und Art der Extremwerte sowie Sattelpunkte der Funktion* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit*

(a) $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

(b) $f(x, y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

Aufgabe 13.2

Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x, y) = x^2 + xy - 2y^2$ *unter der Bedingung* $2x + y = 8$. *Verwenden Sie sowohl das Einsetzungsverfahren als auch das Verfahren nach Lagrange.*

Aufgabe 13.3 *Berechnen Sie das Integral* $\int\limits_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ *und skizzieren Sie den Normalbereich* D *für folgende Funktionen* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *bzw.* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

(a) $f(x, y, z) = z^2 - xy$ *mit* $D = [0, 2] \times [0, 3] \times [-1, 1]$,

(b) $f(x, y) = x + y$ *mit* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le y \le x^2\}$,

(c) $f(x, y) = (x + y)^2$ *mit* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2, x \le y \le \frac{x}{2} + 1\}$.

Aufgabe 13.4 *Berechnen Sie das Integral* $\int\limits_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ *für die Funktion* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x, y, z) = xyz$ *mit dem Normalbereich* $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x \le 4, x \le y \le 2x, 0 \le z \le xy\}$.

Aufgabe 13.5 *Berechnen Sie das Integral* $\int\int\int_D (z^2x^2 + z^2y^2)dx\,dy\,dz$ *über dem durch* $x^2 + y^2 \le 1$ *und* $-1 \le z \le 1$ *bestimmten Normalbereich* $D \subseteq \mathbb{R}^3$ *unter Nutzung der Transformation in Zylinderkoordinaten mithilfe von* $dV = |\det J_T(r, \varphi, z)|\,dr\,d\varphi\,dz$. *Siehe auch Aufgabe 12.5!*

Votierungswoche: 09.07. - 13.07.2012

Mathematik II für Informatiker SS 2012 **Übung 12**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 12.1 *Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung für*

(a) $f(x, y) = \sin(x \cdot \sin y)$,

(b) $f(x, y, z) = x^{y+z}$.

Aufgabe 12.2 *Sei die Funktion* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$ *gegeben. Berechnen Sie den Gradienten von* f *und zeigen Sie, dass dieser nur im Punkt* $(0, 0)$ *verschwindet.*

Aufgabe 12.3 *Gegeben seien die Funktionen* $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *mit* $f_1(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ *und* $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit* $f_2(x, y) = \ln(e^x + e^y)$.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f_1 *an der Stelle* $(1, 1, 1)$.

(b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f_2 *in Richtung der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten.*

Aufgabe 12.4 *Gegeben seien die (total) differenzierbaren Funktionen* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ *und* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *mit* $g(t) = (t^2, t)$. *Sei* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $h(t) = f(g(t))$. *Berechnen Sie die Ableitung von* h *mittels Satz 17.27.*

Aufgabe 12.5 *Gegeben sei die Funktion* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *mit*
$f(r, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos\phi \\ r \sin\phi \\ r \end{pmatrix}$. *Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von* f.

Votierungswoche: 03.07. - 06.07.2012

Mathematik II für Informatiker SS 2012 **Übung 11**
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
PROF. DR. MARTIN HENK, DR. MICHAEL HÖDING

Aufgabe 11.1 *Gegeben sei die Funktion* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4} - 2xy \text{ und } a \in \mathbb{R}$$

.

(a) *Berechnen Sie* $f(3a, 4a)$, $f(-3a, 4a)$, $f(3a, -4a)$ *und* $f(-3a, -4a)$.

(b) *Zeigen Sie, dass* $f(ax, ay) = a^2 f(x,y)$ *gilt.*

Aufgabe 11.2 *Ermitteln Sie den maximalen Definitionsbereich* D *folgender Funktionen* $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

(a) $f(x,y) = \frac{xy}{y-x}$

(b) $f(x,y) = x + \sqrt{x^2 - y^2}$

(c) $f(x,y) = \frac{x}{y}$

Aufgabe 11.3 *Zeigen Sie die Konvergenz der Folge* $\{a_k\}$ *im* $\mathbb{R}^3$, *wobei*

$$a_k = \begin{pmatrix} a_{k,1} \\ a_{k,2} \\ a_{k,3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

mit $a_{k,1} = (\frac{k}{k+2})^k$, $a_{k,2} = (k - \sqrt{k^2 - 1})^k$ *und* $a_{k,3} = k \sin \frac{1}{k}$ *gelte. Konvergiert diese Folge auch im* $\mathbb{Q}^3$*?*

Aufgabe 11.4 *Bestimmen Sie die ersten partiellen Ableitungen von*

(a) $f(x,y) = x^y + y^x$

(b) $f(x,y) = \ln(\sqrt{x}\sqrt{y})$

(c) $u(x,t) = \frac{2x-t}{x+2t}$

(d) $c(a,b,\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$.

Aufgabe 11.5 *Gegeben sei die Funktion* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Gleichung:

$$\left(\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3}\right)^2 = 1.$$

Votierungswoche: 25.06. - 29.06.2012

Mathematik II für Informatiker SS 2012 **Übung 10**
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
PROF. DR. MARTIN HENK, DR. MICHAEL HÖDING

Aufgabe 10.1 *Für $m, n \in \mathbb{N}$ zeige man, dass für*

$$I_{m,n} := \int_0^1 x^m (1-x)^n dx \ \text{ gilt } \ I_{m,n} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

Tipp: *Man leite durch partielle Integration eine Rekursionsformel her.*

Aufgabe 10.2 *Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und bestimmen Sie im Falle der Existenz ihren Wert.*

(a) $\int_1^2 \frac{1}{x \ln x} dx$

(b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$

(c) $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

(d) $\int_{-\infty}^\infty x e^{(-x^2)} dx$

(e) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx$

Aufgabe 10.3 *Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x - 2 & \text{für } \ 2\pi \le x < 3\pi \\ 4 - \frac{1}{\pi}x & \text{für } \ 3\pi \le x < 4\pi \end{cases}$$

und $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) *Skizzieren Sie f.*

(b) *Entwickeln Sie f in eine Fourierreihe.*

Aufgabe 10.4 *Bestimmen Sie die Fourierreihe der ,,Sägezahnfunktion"*
$f(x) = \frac{\pi - x}{\pi}$ für $0 \le x < 2\pi$ und $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$
und skizzieren Sie $f(x)$.

Aufgabe 10.5 *Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{für } \ -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{für } \ 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

und $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Entwickeln Sie f in eine Fourierreihe und skizzieren Sie $f(x)$.

Votierungswoche: 18.06. - 22.06.2012

Mathematik II für Informatiker SS 2012 **Übung 9**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 9.1 *Ermitteln Sie jeweils eine Stammfunktion von $f(x)$:*

(a) $f(x) = 3x^5 + \sqrt{x} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$

(b) $f(x) = \frac{(2+\sqrt{x})^2}{8x}$

(c) $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+4e^{2x}}$.

(d) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$

(e) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

(f) $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Aufgabe 9.2 *Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion von $f(x)$ mittels partieller Integration:*

(a) $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$

(b) $f(x) = x \sin 2x$

(c) $f(x) = e^{3x} \cos x$.

Aufgabe 9.3 *Es sind die Werte folgender Integrale zu berechnen, wobei die angegebenen Substitutionen anzuwenden sind!*

(a) $\int\limits_1^3 |x-2|\, dx$ *mit der Substitution* $x - 2 = t$

(b) $\int\limits_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\, dx$ *mit der Substitution* $x - 1 = t^2$

(c) $\int\limits_{3/4}^{4/3} \frac{1}{z\sqrt{z^2+1}}\, dz$ *mit der Substitution* $z = \frac{1}{t}$

Aufgabe 9.4 *Berechnen Sie folgende Integrale:*

(a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$

(b) $\int\limits_0^2 x^2 e^{-\frac{x}{2}}\, dx$.

Aufgabe 9.5 *Berechnen Sie die Flächeninhalte der folgenden ebenen Menge:*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \sqrt{y},\ 0 \le y \le \sqrt{x},\ x + y \le 3/4\}.$$

Votierungswoche: 11.06. - 15.06.2012

Mathematik II für Informatiker SS 2012 **Übung 8**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 8.1 *Entwickeln Sie die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = 2x^3 - 1$ *mithilfe des Taylorpolynoms nach Potenzen von* $x - 2$. *Was können Sie daraus über weitere Nullstellen der Funktion* f *oberhalb von* 2 *schließen?*

Aufgabe 8.2 *Geben Sie die Taylorentwicklung einschließlich Restglied für die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \frac{1}{1-ax}$ *an der Stelle* $x^* = 0$ *an.*

Aufgabe 8.3 *Bestimmen Sie einen Näherungswert für* $\ln 3$, *indem Sie die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ *an der Stelle* $x^* = 0$ *in ein Taylorpolynom 4. Grades entwickeln und schätzen Sie den Fehler mithilfe des Restgliedes ab.*

Aufgabe 8.4 *Entwickeln Sie folgende Funktionen* $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ *in eine Taylorreihe an der Stelle* x^* *und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.*

(a) $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$ *an der Stelle* $x^* = 0$

(b) $f(x) = x^3 \ln \sqrt{x}$ *an der Stelle* $x^* = 1$

Aufgabe 8.5 *Bestimmen Sie die Konvergenzradien* ρ *der folgenden Potenzreihen:*

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^{(n^2)} x^{(n^2)}$.

Votierungswoche: 04.06. - 08.06.2012

Mathematik II für Informatiker SS 2012 **Übung 7**
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 7.1 *Zeigen Sie, dass die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = y = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ *die Gleichung*

$$x^3 y'' - xy' + y = 0$$

erfüllt, wobei $y' = f'(x)$ *die 1. Ableitung und* $y'' = f''(x)$ *die 2. Ableitung von* $f(x)$ *bedeuten.*

Aufgabe 7.2 *Gegeben sei die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.
Diskutieren Sie $f(x)$ *auf Nullstellen, Unstetigkeitsstellen, Verhalten im Unendlichen, Extremwerte und Wendepunkte.*
Bestimmen Sie Monotonie-, Konkavitäts- und Konvexitätsintervalle und skizzieren Sie den Kurvenverlauf.

Aufgabe 7.3 *Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve mit der Gleichung*

$$f(x) = (1 + \sin 2x)^{2x+1}$$

an der Stelle $x_0 = 0$.

Aufgabe 7.4 *Ein Bild wird an die Wand gehängt. Sein unterer Rand ist um die Länge* a*, sein oberer um* b *höher als das Auge eines Betrachters über dem Boden* $(a, b > 0)$. *In welcher Entfernung von der Wand muss der Betrachter stehen, um das Bild unter einem möglichst großem Winkel sehen zu können?*

Aufgabe 7.5 *Gegeben sei die Funktion* $f : [-a, a] \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_{>0}$ *mit* $f(x) = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$.
Bestimmen Sie alle lokalen Extremwerte von $f(x)$ *(Beachten Sie den Rand des Definitionsbereiches.).*

Votierungswoche: 29.05. - 01.06.2012

Mathematik II für Informatiker SS 2012 **Übung 6**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

PROF. DR. MARTIN HENK, DR. MICHAEL HÖDING

Aufgabe 6.1 *Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Differenzierbarkeit*

(a) $f(x) = |x-5| + 6x$ *(b)* $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{4-2x}$

(c) $f(x) = |\sin 3x|$ *(d)* $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2} + x) & \textit{für}\, x < 0 \\ 1 + x^2 & \textit{sonst} \end{cases}$

Aufgabe 6.2 *Bilden Sie die 1. Ableitung folgender Funktionen:*

(a) $y = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ *(b)* $y = e^{-x(x^2+2x)}$

(c) $y = \ln(\frac{x^2}{1+\sin^2 x})$ *(d)* $y = e^{\sqrt{x}} \sin 3x$

(e) $y = \ln \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$ *(f)* $y = \ln \tan \frac{x}{2} + \frac{\cos x}{\sin^2 x}$

Aufgabe 6.3 *Man bilde die erste Ableitung der Funktionen :*

(a) $y = (\frac{x}{1+x})^x$ *(b)* $y = (\sin x) x^{\cos x}$

(c) $y = \frac{\sqrt{x+3} \cdot 3^x \cdot \cos^3 x}{(2+3x)^2}$

Aufgabe 6.4 *Bestimmen Sie die n-te Ableitung folgender Funktionen:*

(a) $f(x) = e^{-\frac{x}{a}}$ *(b)* $f(x) = \ln(a+x)$

(c) $f(x) = \ln \frac{a+x}{a-x},\ a \in \mathbb{R}$

Aufgabe 6.5 *Bestimmen Sie folgende Grenzwerte mit der Regel von L'Hospital:*

(a) $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}},\ a > 0$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{x}{\sin x})^{\frac{1}{x^2}}$

(c) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1})$ *(d)* $\lim\limits_{x \to 1} (x-1)^{\ln x}$

Votierungswoche: 21.05. - 25.05.2012

Mathematik II für Informatiker SS 2012 **Übung 5**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 5.1 *Untersuchen Sie die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$*, ob sie gerade oder ungerade ist sowie in den Intervallen* $I_1 = (-\sqrt{3}, -1)$ *und* $I_2 = (1, \sqrt{3})$ *auf Monotonie.*

Aufgabe 5.2 *Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Funktionen* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ *, falls sie existieren. Auf Unterschiede zwischen dem rechtsseitigen und dem linksseitigen Grenzwert ist zu achten!*

(a) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ *für* $x \to 0$ *(b)* $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ *für* $x \to 0$
(c) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ *für* $x \to 0$

Aufgabe 5.3 *Folgende Grenzwerte sind zu bestimmen:*

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x+(-2)^x}{4^x}$ *(b)* $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+a} \cdot \sqrt{x+b} - x$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(\alpha+x)-\cos\alpha}{x}$ *unter Benutzung von* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Aufgabe 5.4 *Gegeben sei die Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \textit{für} \quad x \leq 1 \\ 3-ax^2 & \textit{für} \quad x \geq 1 \end{cases} .$$

Bestimmen Sie den Parameter $a \in \mathbb{R}$ *so, dass die Funktion* f *an der Stelle* $x^\star = 1$ *stetig ist.*

Aufgabe 5.5 *Prüfen sie die folgenden Funktionen* f *an der Stelle* $x^\star$ *auf Stetigkeit und beweisen Sie Ihre Behauptung. Skizzieren Sie die Funktionen.*

(a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}, x^\star = -1$ *(b)* $f(x) = |x-1|, x^\star = 1$

(c) $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \textit{für} \quad x < 1 \\ 2x & \textit{für} \quad x \geq 1 \end{cases}, x^\star = 1$

(d) $f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) & \textit{für} \quad x > 1 \\ x^2 & \textit{für} \quad x \leq 1 \end{cases}, x^\star = 1$

Votierungswoche: 14.05. - 18.05.2012

Mathematik II für Informatiker SS 2012 **Übung 4**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 4.1 *Lösen Sie unter Verwendung der geometrischen Reihe folgende Aufgaben:*

(i) In einem Testament wurde einem 18-jährigen Erben 100.000 EUR zugesprochen, auszuzahlen an seinem 30. Geburtstag. Wie viel Geld erhält der Erbe von einer Bank, wenn das Geld mit einem Zinssatz von 6% jährlich verzinst wird?

(ii) Beim Kauf eines PKW im Wert von 24.000 EUR müssen 25% angezahlt werden. Der Rest soll in 36 Monatsraten getilgt werden. Auf die Restkaufsumme werden monatliche Zinsen von $0,4\%$ vereinbart, die zusammen mit der Tilgungsrate zu zahlen sind. Wie hoch ist der effektive Jahreszins?

Aufgabe 4.2 *Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender konvergenter Reihen:*

(i) $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{1}{3^{k-2}}$,

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}$, *mithilfe von* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$ *und* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-1}$.

Aufgabe 4.3 *Untersuchen Sie mithilfe des Majorantenkriteriums bzw. des Leibnizkriteriums folgende Reihen auf Konvergenz:*

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k+1}$ *(b)* $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ *(c)* $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\ln(k)}$ *(d)* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$

Aufgabe 4.4 *Verwenden Sie das Quotientenkriterium, um folgende Reihen auf ihr Konvergenzverhalten zu untersuchen.*

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3n}{(3n-2)2^n}$ *(b)* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\frac{k}{k+1})^{k^2}$ *(c)* $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}$ *(d)* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k^{2k}}$

Votierungswoche: 07.05. - 11.05.2012

Mathematik II für Informatiker SS 2012 **Übung 3**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 3.1 *Untersuchen Sie die folgenden Zahlenfolgen* (a_n) *mit* $n \in \mathbb{N}$ *auf Monotonie und Beschränktheit:*

(a) $a_n = \frac{n^2}{n!}$

(b) $a_n = \frac{(-2)^{n+1}+3^n}{3^{n+1}+(-2)^n}$

Aufgabe 3.2 *Gegeben sei die Zahlenfolge* $(\sqrt{n})^{\frac{1}{n}}$ *für* $n \in \mathbb{N}$.

(a) *Zeigen Sie, dass es ein* n_0 *gibt, so dass die Folge für* $n \geq n_0$ *streng monoton fallend ist, d.h.* $a_n > a_{n+1}$ *für alle* $n \geq n_0$ *gilt.*

(b) *Geben Sie das kleinste derartige* n_0 *an.*

(c) *Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz und geben Sie ggf. den Grenzwert an.*

Aufgabe 3.3 *Beweisen Sie für die Zahlenfolge* $a_n = \frac{n^2-1}{4n^2+1}$ *mithilfe der* ε-n_0-*Definition, dass* $a = \frac{1}{4}$ *der Grenzwert ist.*

Aufgabe 3.4 *Man untersuche die Zahlenfolgen* (a_n) *auf Konvergenz, bestimmte und unbestimmte Divergenz und gebe gegebenenfalls den Grenzwert an:*

(a) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$ *(b)* $a_n = \frac{5n-7n^2}{(n+1)^2-8n}$ *(c)* $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

(d) $a_n = \frac{4^n-1}{2^n+1}$ *(e)* $a_n = \sqrt{4n^2+5n+2} - 2n$

Aufgabe 3.5 *Berechnen Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen:*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{2n}$ *(b)* $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n-8})^{\frac{1}{n-4}}$ *(c)* $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{2}{n})^{3n}$

Votierungswoche: 30.04. - 04.05.2012

Mathematik II für Informatiker SS 2012 **Übung 2**
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 2.1 *Bestimme mithilfe des chinesischen Restsatzes alle* $x \in \mathbb{Z}$ *mit:*

a) $x \equiv 10 \mod 15$, **und** $x \equiv 12 \mod 19$ **und** $x \equiv 20 \mod 28$,

b) $x \equiv 20 \mod 23$, **und** $x \equiv 20 \mod 31$ **und** $x \equiv 20 \mod 37$.

Aufgabe 2.2 *Als 15 Piraten ein Schiff kaperten, erbeuteten sie eine Anzahl Goldmünzen. Nach gleichmäßigem Aufteilen blieben 7 Goldmünzen übrig. Bei einem Streit ging ein Pirat über Bord. Nun blieben nach dem Aufteilen noch 8 Münzen übrig. Wieder flog ein Pirat bei einem Streit über Bord und die Goldmünzen ließen sich nun gleichmäßig aufteilen. Bestimmen Sie mithilfe des chinesischen Restsatzes, wie viele Goldmünzen die Piraten erbeutet hatten.*

Aufgabe 2.3 *Sei* $\mathbb{K}$ *ein Körper und* $\mathbb{K}[x]$ *der Polynomring über* $\mathbb{K}$. *Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome* p *höchstens 3.ten Grades, wenn* $\mathbb{K} = (\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ *ist.*

Aufgabe 2.4

(a) Berechnen Sie den ggT *für* $p = x^5 - x^3 + 2 \in \mathbb{R}[x]$ *und* $q = x^2 + 2 \in \mathbb{R}[x]$.

(b) Sei $p = x^2 + ax + b \in \mathbb{R}[x]$. *Zeigen Sie:* p *ist irreduzibel, genau wenn* $a^2 < 4b$.

Aufgabe 2.5

a) Zeigen Sie: Ist $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$, *so ist* $q = x^3 + x + 1 \in \mathbb{K}[x]$ *irreduzibel.*

b) Beweisen Sie: Ist $p \in \mathbb{R}[x]$ *und grad* $p = 3$, *so ist* p *reduzibel.*
(Hilfe: Kurvendiskussion; Aussage gilt auch, falls p *ungeraden Grad hat.)*

Votierungswoche: 23.04. - 27.04.2012

Mathematik II für Informatiker SS 2012 **Übung 1**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 1.1 *Sei die Gruppe* $G = (M, \star)$ *mit* $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ *durch folgende Gruppentafel gegeben:*

$\star$	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	b	c	d	e	f	g	h
b	b	c	d	a	h	e	f	g
c	c	d	a	b	g	h	e	f
d	d	a	b	c	f	g	h	e
e	e	f	g	h	a	b	c	d
f	f	g	h	e	d	a	b	c
g	g	h	e	f	c	d	a	b
h	h	e	f	g	b	c	d	a

(a) *Man bestimme für die Elemente c und d die Ordnung und das inverse Element.*

(b) *Man gebe alle Untergruppen von* G *mit zwei Elementen an. Gibt es eine Untergruppe mit drei Elementen?*

(c) *Ist die Untergruppe* $G^\star = (M^\star, \star)$ *mit* $M^\star = \{a, b, c, d\}$ *isomorph zur Gruppe* $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$*?*

(d) *Wie kann man an der Gruppentafel erkennen, dass die Untergruppe* $G^\star$ *Normalteiler in* G *ist? Man beschreibe die Faktorgruppe* $G/G^\star$*. Man gebe den natürlichen Homorphismus* φ *von* G *auf* $G/G^\star$ *an.*

Aufgabe 1.2 *Man untersuche, ob die folgenden Strukturen Ringe oder Körper sind:*

(a) $(M;\ +,\ \cdot)$ *mit* $M = \{m+n\sqrt{5} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ *und* $+$ *und* $\cdot$ *als gewöhnliche Addition und Multiplikation reeller Zahlen. Siehe Aufgabe 2.2 aus Übung 2!*

(b) $(OD, \oplus, \odot)$ *mit* $OD = \{O \in \mathbb{R}^{n\times n} : O \text{ ist obere Dreiecksmatrix}\}$ *und* $\oplus, \odot$ *als Addition und Multiplikation von Matrizen.*

Aufgabe 1.3 *Sei* M *die Menge aller quadratischen Matrizen*

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ mit } a, b \in R.$$

(a) *Man zeige, dass* $(M;\ \oplus, \odot)$ *ein Körper ist, wobei* $\oplus$ *und* $\odot$ *die Addition und Multiplikation von Matrizen sind.*

(b) *Man zeige, dass der Körper* $(M;\ \oplus, \odot)$ *zum Körper* $(\mathbb{C};\ +, \cdot)$ *isomorph ist.*

Aufgabe 1.4 *Im Körper* $\mathbb{K}$ *wird die Gleichung* $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$ *betrachtet. Man löse die Gleichung, wenn* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *bzw.* $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ *ist.*

Votierungswoche: 16.04. - 20.04.2012

Mathematik II für Informatiker SS 2012 **Übung 0**

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Aufgabe 0.1 *Man löse die Eigenwertaufgabe $Ax = \lambda x$. Man gebe jeweils alle Eigenvektoren an:*

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 0.2 *Man bestimme die Eigenwerte und die dazu gehörenden Eigenräume der Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Welche Dimension haben die Eigenräume? Verifiziere für dieses Beispiel, dass je zwei Eigenvektoren aus verschiedenen Eigenräumen orthogonal sind. Ist das immer so? Gebe eine Matrix P zur Diagonalisierung von A an und zeige für dieses Beispiel, dass $D = P^{-1}AP$ gilt.

Aufgabe 0.3 *Gegeben sind die Matrizen A und B :*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ und } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Man bestimme die Eigenwerte der beiden Matrizen und untersuche sie auf Diagonalisierbarkeit.

Aufgabe 0.4 *Gegeben seien die Matrizen*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix} \text{ und } C = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}.$$

a) *Finden Sie zu den Matrizen A, B und C eine Matrix P, so dass $P^T AP$ eine Diagonalmatrix ist. Entscheiden Sie, ob die Matrizen A, B und C positiv (negativ) (semi)definit sind.*

b) *Geben Sie eine untere Dreiecksmatrix Q mit $B = QQ^T$ an. Begründen Sie, warum sich A nicht so schreiben lässt.*

Aufgabe 0.5 *Für die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & 2 & 2 \\ 2 & c_2 & 1 \\ 2 & 1 & c_3 \end{pmatrix}$$

sei $\quad \mathbf{x}= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ *ein Eigenvektor zum Eigenwert* $\lambda_1 = 1$.

(a) Was folgt hieraus für die Konstanten c_1, c_2, c_3*?*
(b) Bestimmen Sie einen weiteren Eigenvektor zu λ_1.
(c) Lassen sich zusätzlich zum Ergebnis aus (a) Bedingungen für die Konstanten c_1, c_2, c_3 *angeben, so dass A positiv definit ist?*

Keine Votierung in der Woche: 10.04. - 13.04.2012