**Mathematik III für Informatiker WS 2012/13** **Übung 13**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

**Aufgabe 13.1** *Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:*

*(a)* $4y^{(4)} - 3y'' - y = 0$,

*(b)* $y''' + 3ay'' + 3a^2y' + a^3y = 0$ *mit* $a \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 13.2** *Bestimmen Sie alle Funktionen* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *die folgendes Anfangswertproblem lösen:*

$$y'' = x,$$

*mit* $y(0) = 1$ *und* $y'(0) = 2$, *indem Sie*

*(i) die zugehörige homogene Differentialgleichung lösen und eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung bestimmen,*

*(ii)* $y'(x) = u(x)$ *substituieren und die jeweils nach Substitution und Rücksubstitution entstandenen Differentialgleichungen mit Separation der Variablen lösen.*

**Aufgabe 13.3** *Gegeben sei die Differentialgleichung* $xy'' + 2y' - 10x = 0$.

*(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.*

*(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und damit die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung.*

**Aufgabe 13.4** *Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:*

*(a)* $y'' - 4y = 8x^3$,

*(b)* $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

**Aufgabe 13.5** *Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung*

$$y''' - 3y'' + 7y' - 5y = 10e^{2x}.$$

**Votierungswoche: 21.01. - 25.01.2013**

**Mathematik III für Informatiker WS 2012/13** **Übung 12**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

**Aufgabe 12.1** *Man bestimme die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen mithilfe der Variation der Konstanten:*

(a) $y' - \frac{3y}{x} = x$,

(b) $xy' + y = \ln x + 1$.

**Aufgabe 12.2** *Gegeben sei die Differentialgleichung* $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$ *mit der allgemeinen Lösung* $y = C_1 \cdot \frac{1}{x^2} + C_2 \cdot \frac{\ln x}{x^2}$.

(a) *Zeigen Sie die lineare Unabhängigkeit der Lösungen* $y_1 = \frac{1}{x^2}$ *und* $y_2 = \frac{\ln x}{x^2}$.

(b) *Bestätigen Sie die allgemeine Lösung.*

**Aufgabe 12.3** *Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:*

$$y'' + 4y = e^{-x},$$

*wobei* $y = 2\cos 2x$ *eine spezielle Lösung der homogenen Differentialgleichung ist.*

**Aufgabe 12.4** *Lösen Sie folgende Randwertprobleme:*

(a) $s'' + 2s' + 2s = 0$ *mit* $s(0) = s'(0) = 1$,

(b) $y''' + y'' + 8y' = 10y$ *mit* $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$ *und* $y''(0) = -67$.

**Aufgabe 12.5** *Ermitteln Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichung mit Hilfe der Variation der Konstanten:*

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

**Votierungswoche: 14.01. - 18.01.2013**

**Mathematik III für Informatiker WS 2012/13** **Übung 11**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

**Aufgabe 11.1** *Sei $x(t)$ die Größe einer Population zur Zeitpunkt $t$ modelliert durch*

$$x'(t) = ax(t)$$

*mit $a > 0$.*

- *Wie wächst die Population $x(t)$ (d.h. bestimmen Sie die Population $x(t)$)?*
- *Bestimmen Sie*
$$\lim_{x \to \infty} |x(t)|$$
*unter der Annahme, dass $x(0) = 100$.*

**Aufgabe 11.2** *Bestimmen Sie eine Funktion $y : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, die*

$$xy' - y = x - 1$$

*erfüllt.*

**Aufgabe 11.3** *In einem Stromkreis mit dem Widerstand $R$, der Selbstinduktion $L$ und der elektromagnetischen Kraft $E$ genügt die Stromstärke $I$ der Differentialgleichung*

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E.$$

*Man löse das Anfangswertproblem für $I = 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ unter der Bedingung, dass $R$ und $L$ konstant sind und $E$ als zeitlich linear anwachsende Größe $E = k \cdot t$ betrachtet wird.*

**Aufgabe 11.4** *Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:*

(a) $y'' + 2ay' + a^2y = 0$ *mit* $a \in R$,

(b) $4\frac{d^2\varphi}{d\varphi^2} + \varphi = 0$.

**Aufgabe 11.5** *Lösen Sie folgende Randwertprobleme:*

(a) $y'' + 4y' = 0$ *mit* $y(\ln 2) = 0$ *und* $y'(\ln 2) = -1$,

(b) $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 2s = 0$ *mit* $s(0) = 1$ *und* $s'(0) = 1$.

**Votierungswoche: 07.01. - 11.01.2013**

**Mathematik III für Informatiker WS 2012/13** **Übung 10**
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

**Aufgabe 10.1** *Prüfen Sie, ob die Differentialgleichungen*

(a) $y''x\ln x = y'$,

(b) $y'''y = y''y'$,

(c) $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2\cos 2x$.

*von folgenden Funktionen erfüllt werden* ($C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R}$):

(a) $y = C_1 x(\ln x - 1) + C_2$,

(b) $y = C_1 e^{\sqrt{C_3 x}} + C_2 e^{\sqrt{C_3 x}}$ *und* $y = C_4 x + C_5$,

(c) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{\sqrt{2}}{4}\cos(\frac{\pi}{4} - 2x)$.

**Aufgabe 10.2** *Lösen Sie folgende Differentialgleichungen durch Separation der Variablen:*

(a) $x + xy + y'(y + xy) = 0$

(b) $\dot{r}\varphi^2 + r - 4 = 0$ *mit* $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}$

**Aufgabe 10.3** *Ermitteln Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen durch Separation der Variablen:*

(a) $y'\sqrt{a^2 + x^2} - y = 0$ *mit* $a \in \mathbb{R}$

(b) $2sts' = 1 + t^2$

**Aufgabe 10.4** *Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme:*

(a) $y' - 2\sqrt{y}\ln x = 0$ *mit* $y(e) = 1$

(b) $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy$ *mit* $y(0) = 1$

**Aufgabe 10.5** *Bestimmen Sie alle Funktionen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, die folgendes erfüllen:*

- *Der Berührungspunkt jeder Tangente von* $f$ *halbiert die Strecke zwischen den Schnittpunkten dieser Tangente mit den Koordinatenachsen.*
- $f$ *geht durch den Punkt* $P(-1, 1)$.

**Votierungswoche: 17.12. - 21.12.2012**

**Mathematik III für Informatiker WS 2012/13** **Übung 9**
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

**Aufgabe 9.1** *Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit*

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ 16 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(a) *Prüfen Sie die Diagonaldominanz der Matrix $A$.*

(b) *Führen Sie zwei Iterationsschritte des Jacobi-Verfahrens mit dem Startvektor $x = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ durch.*

**Aufgabe 9.2** *Gegeben sei das Gleichungssystem aus Aufgabe 9.1.*

(a) *Führen Sie zwei Iterationsschritte des Gauß-Seidel-Verfahrens mit dem Startvektor $x = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ durch.*

(b) *Vergleichen Sie das Ergebnis aus Aufgabe 9.1(b) mit dem Ergebnis aus (a).*

**Aufgabe 9.3** *Gegeben sei das Lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ -4 & 10 & -1 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \\ 22 \end{bmatrix}.$$

(a) *Untersuchen Sie die Matrix $A$ auf Diagonaldominanz.*

(b) *Führen Sie einen Iterationsschritt des Jacobi-Verfahrens mit dem Startvektor $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^T$ durch.*

(c) *Überprüfen Sie die Güte der unter (b) erhaltenen Näherungslösung.*

**Aufgabe 9.4** *Gegeben sei die Funktion* $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = x - \cos x$.

(a) *Bestimmen Sie ein Intervall* $[a, b]$ *in dem die Nullstelle der Funktion* $f(x)$ *liegt.*

(b) *Bestimmen Sie einen Näherungswert für die Nullstelle mithilfe des Newtonverfahrens auf 4 Stellen genau.*

(c) *Bestimmen Sie einen Näherungswert für die Nullstelle mithilfe des Sekantenverfahrens auf 4 Stellen genau und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus (b).*

**Aufgabe 9.5**

*Gegeben sei die Gleichung* $3x^2 - e^x = 0$.

(a) *Geben Sie je ein Intervall an, in dem eine der drei Lösungen dieser Gleichung liegen.*

(b) *Bestimmen Sie einen Näherungswert für die kleinste Lösung mit dem Newtonverfahren. Führen Sie drei Iterationsschritte durch.*

**Votierungswoche: 10.12. - 14.12.2012**

**Aufgabe 8.1** *Berechnen Sie eine LU-Faktorisierung der Matrix B mit*

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 & -10 \\ 3 & 7 & -3 & 5 \\ 12 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 12 & 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

**Aufgabe 8.2** *Gegeben sei das Gleichungssystem $Ax = b$ mit*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ und } b = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

(a) *Bestimmen Sie mithilfe einer LU-Faktorisierung der Matrix A die Lösung des Gleichungssystems.*

(b) *Lösen Sie das Gleichungssystem, indem Sie die Brüche als Dezimalzahlen, gekürzt auf eine Stelle nach dem Komma, behandeln und vergleichen Sie mit der exakten Lösung.*

**Aufgabe 8.3** *Gegeben sei das folgende Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

(a) *Zeigen Sie, dass auf die Matrix A eine Cholesky-Zerlegung anwendbar ist.*

(b) *Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems mithilfe der Cholesky-Zerlegung.*

**Aufgabe 8.4** *Lösen Sie folgendes Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mithilfe einer QR-Faktorisierung:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 4 \\ -4 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 60 \end{bmatrix}.$$

**Aufgabe 8.5** *Gegeben seien*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

i) *Bestimmen Sie eine QR-Faktorisierung der Matrix $A$.*

ii) *Finden Sie die Lösung des Ausgleichsproblems $\min\limits_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \|A\mathbf{x} - b\|$ mit Hilfe der QR-Faktorisierung.*

**Votierungswoche: 03.12. - 07.12.2012**

**Mathematik III für Informatiker WS 2012/13** **Übung 7**
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

**Aufgabe 7.1** *Berechnen Sie die Werte der Newton-Cotes-Formeln für* $n = 2$ *und* $n = 3$ *bei der Berechnung von* $\int\limits_0^1 \sin \pi x \, dx$.

**Aufgabe 7.2** *Bestimmen Sie je eine Näherung für* $\ln 3 = \int\limits_1^3 \frac{dx}{x}$ *nach*

*(a) der Rechteckregel,*

*(b) der Trapezregel,*

*(c) der Simsonregel*

*und vergleichen Sie diese mit dem Rechnerwert für* $\ln 3$.

**Aufgabe 7.3** *Weisen Sie die Zeilensummennorm* $\|A\|_\infty$ *von Matrizen* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *die Normeigenschaften nach. Zeigen Sie, dass* $\|A\|_\infty$ *mit der Maximumnorm* $\|x\|_\infty$ *von Vektoren* $x \in \mathbb{R}^n$ *verträglich ist.*

**Aufgabe 7.4** *Berechnen Sie die Normen* $|A|_1$ *und* $\|A\|$ *sowie die Kondition der Matrix* $A$ *mit*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0,99 \end{bmatrix}.$$

**Aufgabe 7.5** *Gegeben sei die Matrix* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

*(i) Berechnen Sie die Matrixnormen* $\|A\|$ *und* $\|A^{-1}\|$.

*(ii) Bestimmen Sie die Kondition der Matrix* $A$.

**Votierungswoche: 26.11. - 30.11.2012**

**Mathematik III für Informatiker WS 2012/13** **Übung 6**
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

**Aufgabe 6.1** *Um den absoluten Nullpunkt der Temperatur zu bestimmen, kann man in einem eingeschlossenen Gas bei konstantem Volumen die Temperatur $T$ in Grad und den Druck $p$ in mbar messen. Die folgende Tabelle gibt die Messwerte an.*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | 25 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 93 |
| $p$ | 990.9 | 1008.5 | 1035.6 | 1064.0 | 1095.2 | 1126.3 | 1226.6 |

*Bestimmen Sie die Regressionsgerade und berechnen Sie daraus den absoluten Nullpunkt.*
Hinweis: Wenn der Druck auf Null gesenkt wird, ist der absolute Nullpunkt der Temperatur erreicht.

**Aufgabe 6.2**
*Die Funktion*

$$f(x) = \frac{6}{x-2}$$

*ist für $2 < x < \infty$ durch ein Interpolationspolynom 2. Grades bei Verwendung der Stützstellen $(3, f(3)), (4, f(4))$ und $(5, f(5))$ zu approximieren.*

(a) *Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $P_2(x)$ nach der Methode von Lagrange.*

(b) *Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $P_2(x)$ nach der Methode von Newton.*

(c) *Benutzen Sie $P_2(x)$, um $f(x)$ an der Stelle $x = 3,5$ näherungsweise zu berechnen und geben Sie den absoluten und relativen Fehler an.*

**Aufgabe 6.3** *Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}_{>10} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(x+10)$.*

(a) *Ermitteln Sie einen Näherungswert für $\ln 11,1$ an den Stützstellen $x_0 = 0, x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ mithilfe der Polynominterpolation nach der Methode von Newton.*

(b) *Bestimmen Sie einen Näherungswert für $\ln 11,1$ mit dem Neville-Algorithmus.*

(c) *Schätzen Sie den Interpolationsfehler für $\ln 11,1$ ab.*

(d) *Wie hängt das Vorzeichen des Interpolationsfehlers von $x$ ab?*

**Aufgabe 6.4** *Zeigen Sie, dass sich, numerisch günstig auswertbar, das Interpolationspolynom $p(x)$ in Lagranscher Form auch darstellen lässt durch*

$$p(x) = \begin{cases} y_i & \textit{für} \quad x = x_i; i = 0, \ldots, n \\ \frac{\sum_{i=0}^{n} \frac{c_i}{x - x_i} y_i}{\sum_{i=0}^{n} \frac{c_i}{x - x_i}} & \textit{für} \quad x \neq x_i; i = 0, \ldots n \end{cases},$$

*wobei* $\frac{1}{c_i} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (x_i - x_k)$ *gilt.*

**Aufgabe 6.5** *Gegeben sei die Funktion $f : [0, 4] \to [0, 2]$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ an den Stützstellen $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 4$.*

(a) *Bestimmen Sie das Interpolationspolynom.*

(b) *Berechnen Sie die kubischen Splines auf dem Intervall $[x_0, x_1]$ und $[x_1, x_2]$ unter der Bedingung $S_0''(x_0) = S_1''(x_2) = 0$.*

(c) *Berechnen Sie mithilfe der Ergebnisse (a) und (b) jeweils Näherungswerte für $\sqrt{\frac{1}{3}}$ und $\sqrt{3}$ und vergleichen Sie diese mit den Werten eines Rechners.*

**Votierungswoche: 19.11. - 23.11.2012**

**Mathematik III für Informatiker WS 2012/13** **Übung 5**
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

**Aufgabe 5.1** *Die Lebensdauer $X$ (in Zeiteinheiten) einer Sorte von Bauteilen eines Computers kann durch die Dichtefunktion*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ 0,06 \cdot x^2 \cdot e^{-0,02 \cdot x^3} & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

*beschrieben werden.*

(a) *Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $X$.*

(b) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein solches Bauelement mindestens 2 Zeiteinheiten ausfallfrei arbeitet?*

(c) *Welche Zeit überleben 90% der Bauelemente?*

**Aufgabe 5.2** *In einer Werkstatt einer Computerfirma unterliege die zufällige Reparaturzeit eines Computers einer Exponentialverteilung mit dem Parameter $\lambda = 0,5$.*

(a) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zur Reparatur eines beliebigen Computers mindestens 3 Stunden aufgewendet werden müssen.*

(b) *Wie viele Stunden werden im Durchschnitt zur Reparatur eines Computers benötigt?*

**Aufgabe 5.3** *Bei einer Wiederholungsklausur zu einer Mathematikwiederholungsprüfung erreichten 16 Studierende die folgenden Noten (ganzzahlig):*

$$3, 4, 2, 1, 2, 4, 5, 5, 2, 1, 4, 5, 3, 3, 2, 4.$$

(a) *Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_W(X)$ der Zufallsgrösse $W$ Wiederholungsklausurnoten.*

(b) *Berechnen Sie den Median von $W$.*

(c) *Berechnen Sie die $p-$Quantile zu $p = \frac{1}{4}k$ mit $k = 1, 3$.*

(d) *Berechnen Sie die $p-$Quantile zu $p = \frac{1}{5}k$ mit $k = 1, 2, 3$.*

**Aufgabe 5.4** *Für den Gesamtwiderstand $R$ von elektronischen Computerbauteilen einer Lieferung gleicher Bauart wird der Erwartungswert mit $\mu = 200\,\Omega$ und die Varianz mit $\sigma^2 = 5\,\Omega^2$ angegeben.*

(a) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil fehlerhaft ist, wenn der Gesamtwiderstand $R$ der Computerbauteile maximal um $5\,\Omega$ vom Sollwert abweichen darf?*

(b) *Wie müssen die Toleranzgrenzen $(200 \pm \alpha)\,\Omega$ gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines fehlerhaften Bauteils, d. h. $P(|R - 200| > \alpha)$, kleiner als $0,01$ ist?*

**Aufgabe 5.5** *Aus der Produktion von Zylinderschrauben wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 25$ entnommen und an jeder Schraube die Schaftlänge gemessen. Die Stichprobe ergibt $\bar{x} = 16\,mm$ und $s^2 = 484\,\mu m^2$. Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall für $\sigma^2$ unter der Voraussetzung, dass das Konfidenzniveau $0.99$ beträgt.*

**Aufgabe 5.6** *In der Vergangenheit betrug die Varianz der normalverteilten Lebensdauer einer bestimmten Batteriesorte $\sigma^2 = 1.1\,Jahre^2$. Es soll nun auf Stichprobenbasis geprüft werden, ob sich durch Einführung eines kostengünstigeren Produktionsverfahrens die Varianz der Lebensdauer erhöht. Eine Stichprobe von $n = 25$ nach dem neuen Verfahren gefertigter Batterien liefert eine Varianz von $s^2 = 1.6\,Jahre^2$ (Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$).*

**Votierungswoche: 12.11. - 16.11.2012**

**Mathematik III für Informatiker WS 2012/13** **Übung 4**
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

**Aufgabe 4.1** *Durch jahrelange Beobachtungen stellte man fest, dass von 1000 Neugeborenen im Mittel 515 Knaben und 485 Mädchen sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind in einer Familie mit 6 Kindern*

(a) $0, 1, 2, ..., 6$ *Mädchen?*

(b) *nicht mehr als* $2$ *Mädchen?*

(c) *Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion.*

**Aufgabe 4.2** *Eine Lieferung von 100 Disketten wird einer Qualitätskontrolle unterzogen. Hierzu werden 5 der 100 Disketten herausgegriffen und überprüft. Der Hersteller gibt an, dass die Lieferung 10 fehlerhafte Disketten enthält. Die Lieferung wird zurückgeschickt, wenn unter den 5 geprüften Disketten mehr als eine fehlerhaft ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Lieferung zurückgeschickt?*

**Aufgabe 4.3** *Eine biologische Kreuzung gelingt nur in 5 % aller angesetzten Versuche. Wieviel Versuche sind anzusetzen, damit mit 99 % Wahrscheinlichkeit wenigstens einmal die Kreuzung gelingt?*

**Aufgabe 4.4** *Ein Betrieb erhält regelmäßig Lieferungen, die aus jeweils* $N = 100$ *Erzeugnissen bestehen. Aus statistischen Unterlagen geht hervor, dass die Zahl der in einer Lieferung enthaltenen Ausschussstücke eine Zufallsgröße ist, die angenähert einer Binomialverteilung mit den Parametern* $n = 2$ *und* $p = 0,1$ *entspricht. Einer Lieferung mit unbekanntem Ausschussanteil werden willkürlich* $m = 10$ *Qualitätskontrollproben ohne Zurücklegen entnommen. Die gesamte Lieferung wird nur dann angenommen, wenn alle* $m = 10$ *Erzeugnisse qualitätsgerecht sind.*

(a) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Lieferung* $k = 0, 1, 2$ *Ausschussstücke enthält?*

(b) *Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Lieferung angenommen wird.*

(c) *Wieviel Sendungen muss der Betrieb durchschnittlich erhalten, damit insgesamt ein Ausschussstück erwartet werden muss?*

**Aufgabe 4.5** *Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Erzeugnis einem Qualitätstest nicht genügt, betrage* $0,001$. *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 6000 Erzeugnissen höchstens 2 den Test nicht bestehen. Benutzen Sie die Poisson-Verteilung.*

**Votierungswoche: 05.11. - 09.11.2011**

**Mathematik III für Informatiker WS 2012/13** **Übung 3**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

**Aufgabe 3.1** 40% *aller E-mails sind Spam. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Spam-mail das Wort „Gewinn“ enthält beträgt* 33% *und die Wahrscheinlihckeit, dass eine Ham-mail (nicht Spam-mail) das Wort „Gewinn“ enthält, ist* 1%. *Wie groß ist die Wahrscheinlihckiet, dass eine E-mail mit dem Wort „Gewinn“ Spam ist?*

**Aufgabe 3.2** *Gegeben ist die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen*

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 0,1 & \text{für } 0 \leq t < 2 \\ 0,4 & \text{für } 2 \leq t < 4 \\ 0,8 & \text{für } 4 \leq t < 6 \\ 1 & \text{für } t \geq 6 \end{cases}$$

*Berechnen Sie:*

$P(1 < X \leq 4)$; $P(1 \leq X \leq 4)$; $P(X \geq 3)$; $E(X)$ *und* $V(X)$.

**Aufgabe 3.3** *Die Auswahlwahrscheinlichkeiten bezogen auf ein bestimmtes Zeitintervall betragen für drei voneinander unabhängig arbeitende Computer* $0,1; 0,2$ *bzw.* $0,3$. *Sei* $X$ *die Zufallsvariable für die Anzahl der in diesem Zeitraum ausfallenden Computer. Bestimmen Sie*

(a) *die Verteilung von* $X$,

(b) $E(X)$ *und* $V(X)$,

(c) *die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens ein Computer ausfällt.*

**Aufgabe 3.4** *Vier gleiche Bauteile für Computer haben die gleiche Zuverlässigkeit von* $0,9$. *Mit* $X$ *wird die Anzahl der funktionstüchtigen Bauteile bezeichnet.*

(a) *Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von* $X$.

(b) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wenigstens zwei Bauteile funktionstüchtig sind?*

**Aufgabe 3.5** *Ein Computernetz besteht aus 10 unabhängig voneinander arbeitenden Computern. Jeder dieser 10 Computer fällt in der Zeit* $T$ *mit der Wahrscheinlichkeit* $0,05$ *aus. Mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschew soll die Wahrscheinlichkeit dafür abgeschätzt werden, dass der absolute Betrag der Differenz zwischen der Zahl der ausgefallenen Computer und dem Erwartungswert dieser Zufallsvariablen größer als* $2$ *ist.*

**Votierungswoche: 29.10. - 02.11.2012**

**Mathematik III für Informatiker WS 2012/13** **Übung 2**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

**Aufgabe 2.1** *In einer Modulprüfungsklausur zur Mathematik für Informatiker besteht zu* 55% *die Chance, dass eine Aufgabe (V-Aufgabe) gestellt wird, die in ähnlicher Form bereits in der Vorlesung besprochen wurde.*
*Berechnen Sie für eine Modulprüfungsklausur mit 4 Aufgaben die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:*

a) *Mindestens eine V-Aufgabe kommt vor.*

b) *Genau eine V-Aufgabe ist dabei.*

c) *Mindestens zwei Aufgaben sind keine V-Aufgaben.*

d) *Höchstens eine Aufgabe ist eine V-Aufgabe.*

e) *Die erste Aufgabe ist eine V-Aufgabe.*

**Aufgabe 2.2** *Ein Computerfachgeschäfft erhält eine Warenlieferung von 50 gleichartigen Computern, von denen* 10% *nicht den höchsten Qualitätsansprüchen genügen. Es werden 10 Computer in eine andere Filiale gebracht.*
*Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Filiale*

a) *keinen Computer mit Qualitätsmängeln erhält.*

b) *höchstens einen Computer mit Qualitätsmängeln erhält.*

c) *mehr als einen Computer mit Qualitätsmängeln erhält.*

**Aufgabe 2.3** *Ein Netzwerkadministrator überwacht drei Computernetze, die unabhängig voneinander arbeiten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Netz während eines Tages einer Überprüfung bedarf, sei für die drei Netze* $0,9$ *bzw.* $0,8$ *bzw.* $0,85$*. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Laufe eines Tages*

a) *keine einzige Überprüfung erforderlich ist,*

b) *wenigstens eines der drei Computernetze keiner Überprüfung bedarf?*

**Aufgabe 2.4** *Zwei Personen werfen je $n$-mal ein Münze. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass beide gleich oft Kopf werfen* $\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$ *ist.*

**Aufgabe 2.5** *Zeigen Sie, dass für die Anzahl* $C^w(n,k)$ *des Ziehens mit Zurücklegens von $k$ Kugeln aus einer Urne mit $n$ Kugeln, wobei die Reihenfolge nicht mit berücksichtigt wird, gilt (siehe auch 19.8 ii)):*
$C^w(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$.

**Votierungswoche: 22.10. - 26.10.2012**

**Mathematik III für Informatiker WS 2012/13** **Übung 1**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

**Aufgabe 1.1** *Ein Computernetz besteht aus* 4 *Computerarbeitsplätzen.* $C_i$ *bedeute, dass der* $i$*-te Computerarbeitsplatz funktionstüchtig ist* $(i = 1, 2, 3, 4)$. *Erfassen/Beschreiben Sie die Ereignisse:*

a) *Alle* 4 *Computerarbeitsplätze sind funktionstüchtig.*

b) *Genau* 3 *Computer arbeiten.*

c) *Mindestens ein Computerarbeitsplatz fällt aus.*

d) *Höchstens ein Computer fällt aus.*

e) *Nur der 3. Computer fällt aus.*

**Aufgabe 1.2** *Wie berechnet man für folgende Ereignisverknüpfungen die Wahrscheinlichkeiten* $P(A)$, *wenn die Einzelwahrscheinlichkeiten* $P(B)$, $P(C)$, $P(D)$, $P(E)$ $P(A \cap B), \ldots$ *usw. bekannt sind?*

a) $A = B \cap C \cap D$ *und* $B, C, D$ *sind unabhängige Ereignisse.*

b) $A = B \cup C$ *und* $B$ *und* $C$ *schließen sich nicht aus.*

c) $A = (B \cup C) \cap (D \cup E)$ *und* $B, C, D, E$ *sind unabhängige Ereignisse.*

d) $A = (B \cap C) \cup (D \cap E)$ *und* $(B \cap C) \cap (D \cap E) = \emptyset$ *und* $B, C, D, E$ *sind unabhängige Ereignisse.*

e) $A = (B \cap C) \cup (D \cap E)$ *und* $(B \cap C) \cap (D \cap E) \neq \emptyset$ *und* $B, C, D, E$ *sind unabhängige Ereignisse.*

f) $A = B \cup C \cup D$ *und* $B, C, D$ *schließen sich nicht aus und* $B, C, D$ *sind unabhängige Ereignisse.*

g) $A = (B \cap C) \cup (D \cap E)$ *und* $B$ *ist von* $C$ *und* $D$ *ist von* $E$ *abhängig.*

**Aufgabe 1.3** *Zum Bau eines Computerchips werden* 4 *gleichartige Bauelemente benötigt. Von* 12 *vorhandenen Bauteilen sind* 2 *defekt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter den* 4 *ausgewählten Bauteilen*

a) *kein defektes,*

b) *genau ein defektes,*

c) 2 *defekte Bauteile?*

**Aufgabe 1.4** *Ein Netzwerkadministrator überwacht drei Computernetze, die unabhängig voneinander arbeiten. Die Wahrscheinlichkeitdafür, dass ein Netz während eines Tages einer Überprüfung bedarf, sei für die drei Netze* $0,9$ *bzw.* $0,8$ *bzw.* $0,85$. *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Laufe eines Tages*

a) *keine einzige Überprüfung erforderlich ist,*

b) *wenigstens eines der drei Computernetze keiner Überprüfung bedarf?*

**Aufgabe 1.5** *Eine Lieferung von 12 Computerbauteilen gleicher Bauart enthält 3 defekte Bauteile. Es werden willkürlich 2 Bauteile ausgewählt.*

a) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Teile einwandfrei sind.*

b) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nur ein Teil einwandfrei ist.*

**Votierungswoche: 15.10. - 19.10.2012**

**Mathematik III für Informatiker WS 2012/13** **Übung 0**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

**Aufgabe 0.1** *Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und bestimmen Sie im Falle der Existenz ihren Wert.*

(a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

(b) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$

(c) $\int_0^\infty e^{-x}dx$

**Aufgabe 0.2** *Lösen Sie:*

(a) *Jeder Nutzer eines Netzwerkes hat ein Paßwort, das aus* 6 *bis* 8 *Zeichen besteht, wobei jedes Zeichen ein Kleinbuchstabe oder eine Ziffer ist. Jedes Paßwort muß mindestens eine Ziffer enthalten. Wieviele verschiedene Paßwörter sind möglich?*

(b) *Zwölf Bücher werden zufällig in ein Regal eingeräumt. Wie groß ist die Anzahl der Möglichkeiten dafür, dass drei bestimmte Bücher nebeneinander stehen?*

**Aufgabe 0.3** *Die Qualität von* 10 *Erzeugnissen wird nacheinander überprüft („Gut-schlecht-Prüfung").*

(a) *Wie viele verschiedene Prüfungsprotokolle sind insgesamt möglich? (Als Beispiel sei ein Protokoll $g, s, s, g, s, g, g, s, g, g$ angegeben.)*

(b) *Wie viele Protokolle enthalten das Element $g$ genau sechsmal?*

**Aufgabe 0.4** *Der Name einer Variablen in einem C-Programm ist ein Wort über dem Alphabet $A$, das aus Kleinbuchstaben, Großbuchstaben, Ziffern und einem Unterstrich besteht. Der erste Buchstabe des Wortes darf keine Ziffer sein. Wieviele verschiedene Variablennamen in C sind möglich, wenn eine Variable durch die ersten* 8 *Zeichen festgelegt ist? (Beachte: Es sind auch Namen mit weniger als* 8 *Zeichen zulässig!)*

**Aufgabe 0.5** *Eine Lieferung von* 30 *Computern, die durch ihre Fabrikationsnummer unterscheidbar sind, enthält* 6 *fehlerhafte Geräte.*

(a) *Wie viele Möglichkeiten gibt es,* 4 *Computer aus der Lieferung zu prüfen?*

(b) *Wie viele Möglichkeiten gibt es,* 4 *Computer aus der Lieferung zu prüfen, die genau zwei fehlerhafte Computer enthalten?*

(c) *Wie viele Möglichkeiten gibt es,* 4 *Computer aus der Lieferung zu prüfen, die höchstens ein fehlerhaftes Stück enthalten?*

**Votierungswoche: 08.10. - 12.10.2012**