Modulprüfung Mathematik I für Informatiker

WS 2006/2007
21.04.2007

1. *Man zeige mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:*

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)\, 2^k = 1 + n\, 2^{n+1}.$$

Induktionsanfang: $n = 0$. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{0} (k+1)\, 2^k = (0+1)\, 2^0 = 1 \text{ und die rechte Seite ist } 1 + 0\, 2^{0+1} = 1.$$

Also ist die Aussage für $n = 1$ richtig. Es folgt der Induktionsschritt von n nach $n+1$; zunächst ist

$$\sum_{k=0}^{n+1} (k+1)\, 2^k = \sum_{k=0}^{n} (k+1)\, 2^k + ((n+1)+1)\, 2^{n+1}.$$

Auf die Summe auf der rechten Seite wenden wir nun die Induktionsvoraussetzung an und erhalten somit

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} (k+1)\, 2^k &= \sum_{k=0}^{n} (k+1)\, 2^k + ((n+1)+1)\, 2^{n+1} \\ &= 1 + n\, 2^{n+1} + ((n+1)+1)\, 2^{n+1} = 1 + n\, 2^{n+1} + (n+2)\, 2^{n+1} \\ &= 1 + (2\, n+2)\, 2^{n+1} = 1 + (n+1)\, 2^{n+2},\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

2. i) *Man bestimme die Werte des Parameter α, so dass das Gleichungssystem $A\, x = \mathbf{b}$*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ \alpha & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix},$$

keine, genau eine und mehrere Lösungen hat.

ii) *Für $\alpha = -2$ bestimme man alle Lösungen von $A\, x = \mathbf{b}$.*

Vergleiche 4.15;

zu i) Umformen auf Dreiecksform der erweiterten Matrix; z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & -1 & -\alpha \\ \alpha & 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & -1 & -\alpha \\ 0 & -\alpha^2 & 2 & -\alpha^2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & -1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 2 - \frac{\alpha^2}{2} & -\alpha^2 - \frac{\alpha^3}{2} \end{pmatrix}$$

Ist $2 - \frac{\alpha^2}{2} \neq 0$, dann ist das System eindeutig lösbar. Es ist

$$2 - \frac{\alpha^2}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha \in \{-2, 2\}.$$

Somit ist das System eindeutig lösbar genau dann, wenn $\alpha \neq -2$ und $\alpha \neq 2$. $\alpha = 2$ eingesetzt in die letzte Umformung liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Also hat das System keine Lösung für $\alpha = 2$.

$\alpha = -2$ eingesetzt in die letzte Umformung liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

und in diesem Fall hat das System unendliche viele Lösungen.

zu ii) Aus der Matrix (1) erhalten wir die Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist die Variable x_3 frei wählbar, und für x_2, x_1 ergibt sich

$$x_2 = 1 + x_3/2 \text{ und } x_1 = -2 + 2\,x_2 = x_3.$$

Also ist die Menge aller Lösungen gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. *Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Im Falle der Linearität bestimme man die Abbildungsmatrix. Bitte begründen/beweisen Sie Ihre Antworten.*

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *mit* $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 2x - y \\ 3\,x \end{pmatrix}$.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *mit* $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x \\ 2y - 1 \end{pmatrix}$.

iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *mit* $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = |x| + |y|$.

zu i): Vergleiche 6.5; Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist genau dann linear, wenn es eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{3\times 2}}$ gibt mit $f(\binom{x}{y}) = \mathbf{A}\binom{x}{y}$ für alle $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$. Desweiteren sind die Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ die Bilder der Einheitsvektoren, also muss (falls f linear ist) gelten

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \\ 3\,x \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

ist f linear, und $\mathbf{A}$ ist die Abbildungsmatrix.

zu ii): Vergleiche 6.2; Es gilt $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h. f ist nicht linear.

zu iii): Vergleiche 6.1; Es gilt $-1 \cdot f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -(|1| + |1|) = -2$, aber $f\left(-1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = |-1| + |-1| = 2$, also ist f nicht linear.

4. *Gegeben seien die Vektoren* $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)^\intercal$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,2)^\intercal$ *und* $\mathbf{v}_3 = (4,0,4)^\intercal$.

i) *Man zeige, dass die Vektoren* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ *eine Basis des* $\mathbb{R}^3$ *bestimmen.*

ii) *Orthonormalisieren Sie die Vektoren* $\mathbf{v}_1$ *und* $\mathbf{v}_2$.

iii) *Man berechne* $\mathbf{v}_2^\intercal \mathbf{v}_2$ *und* $\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^\intercal$.

zu i) nach Satz 5.33. genügt es zu zeigen, dass die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linear unabhängig sind. Dazu prüfe, ob folgendes Gleichungssystem eindeutig lösbar ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ist Basis vom $\mathbb{R}^3$

zu ii) Vergleiche Satz 6.42.:

$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ sowie $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \dfrac{< \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 >}{||\mathbf{u}_1||^2}\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \dfrac{3}{\sqrt{3}^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ die orthonormalisierten Vektoren sind $\dfrac{\mathbf{u}_1}{||\mathbf{u}_1||}, \dfrac{\mathbf{u}_2}{||\mathbf{u}_2||}$, also $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

zu iii) Vergleiche Definition 4.23: $\mathbf{v}_2^\intercal \mathbf{v}_2 = 5$, $\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^\intercal = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

5. *Sei A die folgende 2×2-Matrix:*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

i) *Man zeige: $A^2 = A + I_2$, wobei I_2 die 2×2-Einheitsmatrix ist.*

ii) *Man zeige: $A - A^{-1} = I_2$.*

iii) *Man berechne A^8 und $\det(A^8 - 20\,A - 13\,I_2)$.*

zu i) Es ist $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ und daher gilt: $A + I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = A^2$.

zu ii) Wegen $\det(A) = -1 \neq 0$ ist A invertierbar. Nach i) ist $A^2 = A + I_2$. Multiplikation dieser Gleichung mit A^{-1} liefert $A = I_2 + A^{-1}$ also $A - A^{-1} = I_2$.

zu iii) Nach i) ist $A^2 = A + I_2$ und daher $A^4 = A^2 \cdot A^2 = (A+I_2)\cdot(A+I_2) = A^2 + 2\,A + I_2$. Wieder mit i) folgt weiter: $A^4 = A^2 + 2\,A + I_2 = 3\,A + 2\,I_2$. Für A^8 ergibt sich so

$$A^8 = A^4 \cdot A^4 = (3\,A + 2\,I_2)\cdot(3\,A + 2\,I_2) = 9\,A^2 + 12\,A + 4\,I_2 = 21\,A + 13\,I_2.$$

Somit ist $\det(A^8 - 20\,A - 13\,I_2) = \det(A) = -1$.

6. *Sei A die folgende 4×4-Matrix:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

i) *Man bestimme das charakteristische Polynom von A.*

ii) *Man bestimme alle Eigenwerte von A (Hinweis: 3 ist Eigenwert).*

iii) *Man bestimme den Eigenraum zum Eigenwert 3.*

Vergleiche 7.25, 7.26;

zu i) Entwickeln nach der letzten Zeile liefert

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_4) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entwickeln nach der 1.ten Spalte liefert

$$
\begin{aligned}
\det(A-\lambda I_4) &= (3-\lambda)\left((2-\lambda)\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}\right)\\
&= (3-\lambda)\left((2-\lambda)((1-\lambda)^2-1)+\lambda\right)\\
&= (3-\lambda)\left((2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda)+\lambda\right)\\
&= (3-\lambda)\left(-\lambda^3+4\lambda^2-3\lambda\right)\\
&= (3-\lambda)\lambda\left(-\lambda^2+4\lambda-3\right) = (3-\lambda)\lambda(\lambda-1)(3-\lambda)\\
&= (3-\lambda)^2\lambda(\lambda-1).
\end{aligned}
$$

zu ii) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $(3-\lambda)^2\lambda(\lambda-1)$ sind 3, 0, 1; also sind dies die Eigenwerte.

zu iii) Umformen von $A-3\,I_4$ auf Zeilenstufenform

$$
\begin{aligned}
A-3\,I_4 = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
\to \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

x_3, x_4 sind frei wählbar, und es ist $x_2 = 2\,x_3$, $x_1 = x_2 + x_3 = 3\,x_3$. Also ist der Eigenraum gegeben durch die Menge

$$
\left\{ x_3 \begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.
$$