Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Modulprüfung Mathematik IV

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik

SS 2011

20.07.2011

Name	Vorname	Fachrichtg.	Matrikelnr.

Punkte Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
max. Punkte	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**
Punkte						

Punkte Klausur	$\sum$	Note

Bitte beachten!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Bearbeitungszeit 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Kurven

1. Gegeben sei die Kurve

$$c(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \\ 4 \sin \frac{t}{2} \end{pmatrix} \text{ mit } t \in [0, \pi].$$

   i) Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\dot{c}(t)$ der Kurve $c(t)$ im Punkt $c(\pi)$.

   ii) Zeigen Sie, dass $\|\dot{c}(t)\| = 2$.
   Hierbei kann auch die Identität $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ *benutzt werden.*

   iii) Berechnen Sie die Länge der Kurve $c(t)$.

zu i): $\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \\ 2 \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix}$ und $\dot{c}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

zu ii):

$$\begin{aligned}
\|\dot{c}(t)\| &= \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t + 4 \cos^2 \tfrac{t}{2}} \\
&= \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t + 4 \cos^2 \tfrac{t}{2}} \\
&= \sqrt{2 - 2 \cos t + 4 \cos^2 \tfrac{t}{2}} \\
&= \sqrt{2 - 2(\cos^2 \tfrac{t}{2} - \sin^2 \tfrac{t}{2}) + 4 \cos^2 \tfrac{t}{2}} \\
&= \sqrt{2 - 2 \cos^2 \tfrac{t}{2} + 2 \sin^2 \tfrac{t}{2} + 4 \cos^2 \tfrac{t}{2}} \\
&= \sqrt{2 + 2 \cos^2 \tfrac{t}{2} + 2 \sin^2 \tfrac{t}{2}} = \sqrt{2 + 2(\cos^2 \tfrac{t}{2} + \sin^2 \tfrac{t}{2})} = \sqrt{4} = 2.
\end{aligned}$$

zu iii): $L_c(t) = \int\limits_0^\pi \|\dot{c}(t)\|\, dt = \int\limits_0^\pi 2\, dt = [2\, t]_0^\pi = 2\, \pi$

2. i) Man zeige, dass

$$B(t) = \begin{pmatrix} -1 + 3\, t \\ -1 + 3\, t + 6\, t^3 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1],$$

   die Bézierkurve bezüglich den Kontrollpunkten

$$c_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

   ist.

   ii) Man reparametrisiere die Bézierkurve aus i) auf das Intervall $[-1, 1]$.

iii) Man zeige, dass $p(x) = x^3$ das Interpolationspolynom bezüglich den obigen Stützstellen $c_0, \ldots, c_3$ ist.

zu i): Nach Definition von Bézierkurven (Definition 20.13) ist

$$\begin{aligned}
B(t) &= \sum_{i=0}^{3} b_{i,m}(t)\, c_i = (1-t)^3\, c_0 + 3(1-t)^2 t\, c_1 + 3(1-t)t^2\, c_2 + t^3\, c_3 \\
&= (1 - 3t + 3t^2 - t^3)\, c_0 + 3(1 - 2t + t^2)t\, c_1 + 3(1-t)t^2\, c_2 + t^3\, c_3 \\
&= \begin{pmatrix} -1 + 3t - 3t^2 + t^3 + 3t^2 - 3t^3 + 2t^3 \\ -1 + 3t - 3t^2 + t^3 + 3t^2 - 3t^3 + 8t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 3\,t \\ -1 + 3\,t + 6\,t^3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

zu ii) Sei $h : [-1,1] \to [0,1]$ gegeben durch $h(t) = (t+1)/2$. Dann ist h eine monoton steigende lineare Funktion mit $h(-1) = 0$ und $h(1) = 1$. Somit ist (siehe Definition 20.8)

$$\overline{B}(t) = B(h(t)) = \begin{pmatrix} -1 + 3\,h(t) \\ -1 + 3\,h(t) + 6\,(h(t))^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 + 6\,t \\ 5 + 15\,t + 9\,t^2 + 3\,t^3 \end{pmatrix}$$

die gesuchte Reparametrisierung.

zu iii): Für das Polynom $p(x) = x^3$ vom Grad 3 gilt $p(-1) = -1$, $p(0) = 0$, $p(1) = 1$ und $p(2) = 8$, d.h., das Polynom x^3 "geht durch" die vier Stützstellen. Da das Interpolationspolynom vom Grad 3 durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt ist (Satz 21.1), ist $p(x) = x^3$ das Interpolationspolynom bezüglich diesen Stützstellen.

Numerik

3. Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie eine QR-Faktorisierung der Matrix A.

ii) Finden Sie die Lösung des Ausgleichsproblems $\min\limits_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \|A\mathbf{x} - b\|$ mit Hilfe der QR-Faktorisierung.

zu i):

$$q_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ und } \|q_1^*\| = \sqrt{2+2} = 2 \text{ also } q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$q_2^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$q_2^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \|q_2^*\| = \sqrt{1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} = \tfrac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{also } q_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ und } Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

Da $A = QR$ folgt $R = Q^T A$.

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$$

zu ii): Lösung von $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^2} \|A\mathbf{x} - b\|$ ist Lösung von $R\mathbf{x} = Q^T b$ (siehe Satz 21.26).

$$Q^T b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{also } \begin{pmatrix} 2 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 \\ 2x_1 &= \tfrac{-\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \\ x_1 &= \tfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

4. Gegeben seien die folgenden Polynome

$$p_1(x, y) = x + y - 2xy \in \mathbb{R}[x, y] \text{ und } p_2(x, y) = x^2 + y^2 + x + y \in \mathbb{R}[x, y].$$

i) Untersuchen Sie $p_1(x,y)$ und $p_2(x,y)$ auf Symmetrie und beschreiben Sie gegebenenfalls $p_i(x,y)$ mit Hilfe der elementarsymmetrischen Funktionen $\sigma_1(x,y), \sigma_2(x,y)$.

ii) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} p_1(x,y) + 4 &= 0 \\ p_2(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

zu i):

$$\begin{aligned} p_1(x,y) &= x + y - 2xy \,\text{(ist symmetrisch und mit}\, \sigma_1 = x+y \,\text{und}\, \sigma_2 = xy) \\ p_1(x,y) &= \sigma_1 - 2\sigma_2 \\ p_2(x,y) &= x^2 + y^2 + x + y \,\text{(ist symmetrisch)} \\ p_2(x,y) &= \sigma_1^2 + \sigma_1 - 2xy \\ p_2(x,y) &= \sigma_1^2 + \sigma_1 - 2\sigma_2 \end{aligned}$$

zu ii):

$$\begin{aligned} p_1(x,y) + 4 &= \sigma_1 - 2\sigma_2 + 4 = 0 \Rightarrow \sigma_2 = \tfrac{\sigma_1 + 4}{2} \\ p_2(x,y) &= \sigma_1^2 + \sigma_1 - 2\sigma_2 = 0 \end{aligned}$$

Nach Einsetzen: $\sigma_1^2 + \sigma_1 - (\sigma_1 + 4) = 0$ und so $\sigma_1^2 - 4 = 0 \Rightarrow \sigma_1^2 = 4$. Es folgt $\sigma_{1/1} = -2, \sigma_{1/2} = 2$ und $\sigma_{2/1} = 1, \sigma_{2/2} = 3$.

Somit erhalten wir:

$$\begin{array}{lrlr} I & x + y = -2 & II & x + y = 2 \\ & xy = 1 & & xy = 3 \\ & \text{also}\,(-2-y)y = 1 & & \text{also}\,(2-y)y = 3 \\ & y^2 + 2y + 1 = 0 & & y^2 - 2y + 3 = 0 \\ & (y+1)^2 = 0 & & y_{\frac{1}{2}} = 1 \pm \sqrt{1-3} \\ & y = -1 & & \text{keine reelle Lösung} \\ & \text{und}\, x = -1 & & \end{array}$$

Differentialgleichungen

5. Gegeben sei die Differentialgleichung $y' + y^2 \cos x = 0$.

   i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

   ii) Lösen Sie das Anfangswertproblem für $y(\frac{3}{2}\pi) = 1$.

   zu i): Separation der Variablen: $y' + y^2 \cos x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y^2 \cos x$ und so $\int \frac{1}{y^2} dy = -\int \cos x \, dx$. Es folgt $-\frac{1}{y} = -\sin x - c$
   $\Rightarrow \frac{1}{y} = \sin x + c$ bzw. $y = \frac{1}{\sin x + c}$.

   zu ii): $y(\frac{3\pi}{2}) = 1$
   $\Rightarrow 1 = \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{2} + c} \Rightarrow 1 = \frac{1}{-1+c} \Rightarrow -1 + c = 1 \Rightarrow c = 2$
   $y_{sp} = \frac{1}{\sin x + 2}$

6. Für beliebige $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ sei folgende Differentialgleichung gegeben:
$a^2y'' - ay' = 1$.

   i) Lösen Sie die zugehörige homogene Differentialgleichung.

   ii) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und damit die allgemeine Lösung.

zu i): $a^2y'' - ay' = 0 \Leftrightarrow ay'' - y' = 0$

$$\tau(\lambda) = a\lambda^2 - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\lambda(a\lambda - 1) = 0, \\ &\lambda_1 = 0 \text{ und } \lambda_2 = \tfrac{1}{a}. \end{aligned}$$

Die allgemeine homogene Lösung ist gegeben durch $y_h = c_1e^0 + c_2e^{\frac{x}{a}} = c_1 + c_2e^{\frac{x}{a}}$ mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

zu ii): Störfunktion: $b(x) = 1$

$\tau(0) = 0 \Rightarrow y_p(x) = x \cdot b_0$

$y_p' = b_0, y_p'' = 0$

Einsetzen in DGL:

$$\begin{aligned} a^2 \cdot 0 - ab_0 &= 1 \\ b_0 &= -\tfrac{1}{a} \\ \text{Eine partikuläre Lösung ist daher } y_p(x) &= -\tfrac{x}{a}. \end{aligned}$$

Somit ist die allgemeine Lösung der DGL gegeben durch $y(x) = c_1 + c_2e^{\frac{x}{a}} - \frac{x}{a}$.

Probe: $y' = \frac{c_2}{a}e^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{a}, y'' = \frac{c_2}{a^2}e^{\frac{x}{a}}$

$\Rightarrow a^2 \cdot \frac{c_2}{a^2}e^{\frac{x}{a}} - a(\frac{c_2}{a}e^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{a}) = 1$