Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Modulprüfung Mathematik IV

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik

SS 2010
06.07.2010

Name	Vorname	Fachrichtg.	Matrikelnr.

Punkte Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
max. Punkte	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**
Punkte						

Punkte Klausur	$\sum$	Note

Bitte beachten!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Bearbeitungszeit 120 Minuten.

Viel Erfolg!

1. Kurven I

i) Bestimmen Sie Kontrollpunkte $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}^2$, so dass die Bézierkurve

$$B(t) = \sum_{i=0}^{3} b_{i,3}(t)c_i,\ t \in [0,1],$$

gleich der Kurve $c(t) = (-4t^3 + 6t - 2, -6t^2 + 6t - 1)^T$, $t \in [0,1]$, ist.

ii) Skizzieren Sie den Kontrollpolygonzug c_0, c_1, c_2, c_3, c_0 und die Kurve $B(t)$.

Lösung

i): Schreibe $c(t) = \sum_{i=0}^{3} a_i t^i = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} t^3$. Dann sind nach Satz 20.15 die Kontrollpunkte gegeben als $c_i = \sum_{j=0}^{i} \frac{\binom{i}{j}}{\binom{3}{j}} a_j$, $i = 0, \ldots, 3$. Also

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_1 = a_0 + \frac{1}{3}a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ c_2 &= a_0 + \frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alternativ ist

$$\begin{aligned} c(t) &= \sum_{i=0}^{3} b_{i,3}(t)c_i = (1-t)^3 c_0 + 3(1-t)^2 t c_1 + 3(1-t)t^2 c_2 + t^3 c_3 \\ &= c_0 + (-3c_0 + 3c_1)t + (3c_0 - 6c_1 + 3c_2)t^2 + (-c_0 + 3c_1 - 3c_2 + c_3)t^3. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen $a_0 = c_0$, $a_1 = -3c_0 + 3c_1$, $a_2 = 3c_0 - 6c_1 + 3c_2$ und $a_3 = -c_0 + 3c_1 - 3c_2 + c_3$ aus denen man durch sukzessives Einsetzen die Punkte c_i ermittelt.

ii): Skizze:

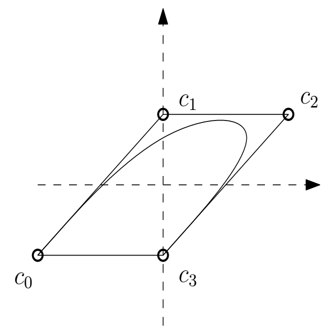
2. Kurven II

Sei $\alpha > 0$, und sei $c_\alpha : [0, 8\pi] \to \mathbb{R}^2$ die Kurve mit $c_\alpha(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos t, \sin t)$.

i) Man bestimme die Länge der Kurve.

ii) Man bestimme alle Punkte der Kurve c_α, die auf der Geraden $y = x$ liegen.

Lösung



i) Es ist

$$\dot{c}_\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{\alpha t}\cos t - e^{\alpha t}\sin t \\ \alpha e^{\alpha t}\sin t + e^{\alpha t}\cos t \end{pmatrix},$$

und somit ist

$$\begin{aligned} ||\dot{c}_\alpha(t)|| &= \sqrt{(\alpha e^{\alpha t}\cos t - e^{\alpha t}\sin t)^2 + (\alpha e^{\alpha t}\sin t + e^{\alpha t}\cos t)^2} \\ &= e^{\alpha t}\sqrt{\alpha^2\cos^2 t + \sin^2 t - 2\alpha\cos t\sin t + \alpha^2\sin^2 t + \cos^2 t + 2\alpha\sin t\cos t} \\ &= e^{\alpha t}\sqrt{\alpha^2+1}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Länge der Kurve

$$\begin{aligned} \int_0^{8\pi} ||\dot{c}_\alpha(t)|| \mathrm{d}t = \sqrt{\alpha^2+1}\int_0^{8\pi} e^{\alpha t}\mathrm{d}t = \sqrt{\alpha^2+1}\left(\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\Big|_0^{8\pi}\right) \\ = \sqrt{1+\frac{1}{\alpha^2}}\left(e^{\alpha 8\pi}-1\right). \end{aligned}$$

ii) Die Schnittpunkte sind durch alle $t \in [0, 8\pi]$ gegeben für die gilt

$$e^{\alpha\, t}\cos t = e^{\alpha\, t}\sin t.$$

Es sind also alle $t \in [0, 8\pi]$ gesucht mit $\sin t = \cos t$. Die letzte Bedingung gilt genau dann, wenn $t = \frac{\pi}{4} + 2\,k\pi$ oder $t = \frac{5}{4}\pi + 2\,k\pi$ und $k \in \mathbb{Z}$. In dem Intervall $[0, 8\pi]$ ergeben sich so die folgenden 8 Schnittpunkte:

$$e^{\alpha\, t}(\cos t, \sin t), \quad t = \left(\frac{1+4\,m}{4}\right)\pi, m = 0, \ldots, 7.$$

3. Numerik I

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

i) Führen Sie eine LU-Faktorisierung der Matrix A durch.

ii) Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems mithilfe Ihrer Faktorisierung aus i).

Lösung

(a)

$$
\begin{array}{cccc|ccc|l}
 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & |\alpha_{2,1} = +\frac{2}{3} \\
U_0 = & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & = L_0 \\
 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \\
U_1 = & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & = L_1 |\alpha_{3,2} = -\frac{1}{2} \\
 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \\
U_2 = & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 1 & 0 & = L_2 \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(b) $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ setzen $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$

$$\Rightarrow L\mathbf{y} = \mathbf{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y_1 = 1,\ y_2 = 0,\ y_3 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = 1,\ x_2 = 0,\ x_1 = 1$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Numerik II

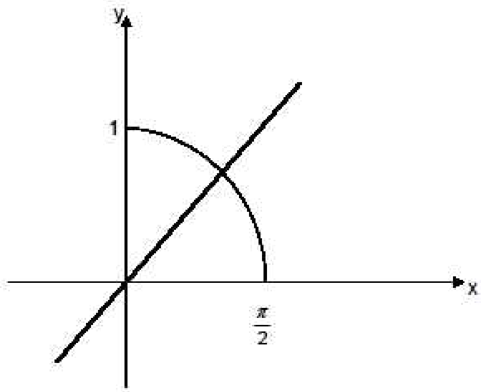
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x - \cos x$.

i) Bestimmen Sie ein Intervall $[a, b]$ in dem eine Nullstelle der Funktion $f(x)$ liegt.

ii) Bestimmen Sie einen Näherungswert dieser Nullstelle, in dem Sie mithilfe des Newton-Verfahrens zwei Iterationsschritte ausführen, beginnend mit $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

iii) Geben Sie eine geometrische Interpretation des Newtonverfahrens.

Lösung



i) $f(x) = x - \cos x = 0 \Rightarrow x = \cos x$
   Schnittpunkt liegt im Intervall $I = [0, \frac{\pi}{2}]$.
   $f(0) = 0 - 1 < 0$
   $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0$

ii) Newton-Verfahren
   $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n}$
   $x_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{1+1} = \frac{\pi}{4}$
   $x_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\frac{\pi}{4} - 1/\sqrt{2}}{1 + 1/\sqrt{2}} = \frac{\pi/4 - 1}{1 + \sqrt{2}}$

iii) x_{n+1} ist der Schnittpunkt der Tangente der Funktion f im Punkte x_n mit der x-Achse.

5. Differentialgleichungen I

Bestimmen Sie alle Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die folgendes Problem lösen:

$$y'' = x,$$

mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 2$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

i) Lösen Sie die zugehörige homogene Differentialgleichung.

ii) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

iii) Bestimmen Sie die Funktion, die das obige Problem löst, unter der Annahme, dass $y(0) = 1$ und $y'(0) = 2$.

Lösung

i) Zum Bestimmen der homogenen Lösungen betrachten wir das zugehörige charakteristische Polynom (vgl. Definition 22.25)

$$\tau(\lambda) = \lambda^2.$$

Die Nullstellen von $\tau(\lambda)$ sind $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Die zwei Nullstellen korrespondieren zu zwei linear unabhängigen Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und somit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = c_1 + c_2 x, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

ii) Eine partikuläre Lösung wird mittels Satz 22.27 bestimmt. Die rechte Seite hat die Form $p(x)e^{\alpha x}$, wobei $p(x) = x$ ein Polynom vom Grad 1 ist und $\alpha = 0$ ist. Da $\tau(\alpha) = \tau(0) = 0$ mit Vielfachheit 2, setzen wir als partikuläre Lösung $y_p(x) = x^2(ax + b)$ an, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Die Ableitungen von $y_p(x)$ sind $y_p'(x) = 3ax^2 + 2bx$, und $y_p''(x) = 6ax + 2b$. Das Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung liefert $a = \frac{1}{6}$ und $b = 0$ und damit ist $y_p(x) = \frac{1}{6}x^3$.
Die Lösung der inhomogen Differentialgleichung ist

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2 x + \frac{1}{6}x^3.$$

iii) Einsetzen der Anfangswerte liefert $y(0) = c_1 = 1$ und $y'(0) = c_2 = 2$. Also ist die gesuchte Lösung $y(x) = y(x) = \frac{x^3}{6} + 2x + 1$.

6. Differentialgleichungen II

Bestimmen Sie alle Funktionen $y : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, die

$$xy' - y = x - 1$$

erfüllen.

Lösung

Wir lösen zuerst die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$xy' - y = 0$$

mittels Separation der Variablen (vgl. Satz 22.4). Es gilt

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx \quad \Rightarrow \quad \ln |y| = \ln |x| + c \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

Demnach sind sämtliche homogene Lösungen gegeben durch

$$y_h(x) = |x|c = xc \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

da $x > 0$.

Wir verwenden Variation der Konstanten um eine partikuläre Lösung der inhomogen Differentialgleichung zu finden.

Nach Bemerkung 22.19 führt $y_p(x) = c(x)y_h(x) = c(x)x$ zu

$$c(x) = \int \frac{x-1}{x} e^{-\int \frac{1}{x}dx} dx = \int \left(\frac{x-1}{x}\right) \frac{1}{x} dx = \ln x + \frac{1}{x}.$$

Somit ist $y_p(x) = x(\ln x + \frac{1}{x}) = x \ln x + 1$ eine partikuläre Lösung und nach Satz 22.16 ist die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = xc + x \ln x + 1,$$

für jedes $c \in \mathbb{R}$.