Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Wiederholung zur Modulprüfung Mathematik II

Fachrichtung: Computer Science in Engineering, Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik

SS 2012

28.09.2012

Name	Vorname	Fachrichtg.	Matrikelnr.

Punkte Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
max. Punkte						
Punkte						

Punkte Klausur	$\sum$	Note

Bitte beachten!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Bearbeitungszeit 120 Minuten.

Viel Erfolg!

1. a) Sei a der Grenzwert der Folge $a_n = \frac{1-2^{n+1}+4^n}{1-4^n}$.

   i) Zeigen Sie $a = -1$.

   ii) Bestimmen Sie ein n_0 in Abhängigkeit von $\varepsilon > 0$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.
   Hinweis: Binomische Formeln könnten helfen.

   b) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ auf Konvergenz.

Lösung

a.i) Durch Kürzen mit 4^n ergibt sich:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-2^{n+1}+4^n}{1-4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4^n} - 2\cdot\frac{1}{2^n} + 1}{\frac{1}{4^n} - 1} = -1$$

a.ii) Für n_0 hilft die 3. binomische Formel.

$$|a_n - a| = \left|\frac{1-2^{n+1}+4^n}{1-4^n} + 1\right| = \left|\frac{2-2^{n+1}}{1-4^n}\right| = \left|\frac{2(1-2^n)}{(1-2^n)(1+2^n)}\right| = \left|\frac{2}{1+2^n}\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{\varepsilon} - 1 < 2^n$$

$$\Leftarrow \quad \log_2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) < n$$

b) 1. Möglichkeit: Majorantenkriterium

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-2n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} < \infty$$

2. Möglichkeit: Partialsumme ausrechnen

$$\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{m} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{m} \to 1$$

2. i) Bilden Sie die 1. Ableitungen folgender Funktionen:

$$f_1 : \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\} \to \mathbb{R}, \qquad f_1(x) = e^{\sqrt{x}}\sin(x^2),$$
$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_2(x) = \ln\left(\tfrac{1-\sin^2(x)}{(x+1)^2}\right).$$

   ii) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = -\frac{x}{5+x^2}.$$

   Bestimmen Sie die Nullstellen von $g(x)$, das Verhalten von $g(x)$ für $x \to \pm\infty$ und alle lokalen Minima und Maxima von $g(x)$.

LÃ¶sung

i)

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}} \sin(x^2) + e^{\sqrt{x}}\cos(x^2)\; 2x \\
&= e^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(x^2) + 2x \cos(x^2) \right) \\
&\quad \text{(Produktregel, Kettenregel)} \\
f_2'(x) &= \frac{(x+1)^2}{(1-\sin^2(x))} \cdot \frac{(-2\sin(x)\cos(x)(x+1)^2 - 2(1-\sin^2(x))(x+1))}{(x+1)^4} \\
&= \frac{1}{(\cos^2(x))} \cdot \frac{(-2\sin(x)\cos(x)(x+1)^2 - 2\cos^2(x)(x+1))}{(x+1)^2} \\
&= -2\tan(x) - \frac{2}{x+1}. \\
&\quad \text{(Kettenregel, Quotientenregel)}
\end{aligned}$$

ii)

Nullstellen: $x = 0$.
Verhalten im Unendlichen: $\lim_{x\to\infty} -\frac{x}{5+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{2x} = 0$ (l'Hopital, *Satz 11.12*).
Extremwerte: $g'(x) = \frac{x^2-5}{(5+x^2)^2}$, $g''(x) = -\frac{2x(x^2-15)}{(x^2+5)^3}$.
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$. $g''(-\sqrt{5}) < 0 \to$ lok. Maximum, $g''(\sqrt{5}) > 0 \to$ lok. Minimum.

3. Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{e^x}{x}$ und $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \sqrt{x}$.

   i) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f \circ g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mithilfe der Substitution $t^2 = x$.

   ii) Berechnen Sie mithilfe der partiellen Integration das bestimmte Integral $\int\limits_0^1 x^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lösung

i) Mit der Substitution $t^2 = x$ folgt $dx = 2t\,\mathrm{d}t$. Somit gilt: $\int f \circ g(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^t}{t} 2t\,\mathrm{d}t = 2\int e^t\,\mathrm{d}t = 2e^t + c = 2e^{\sqrt{x}} + c$. Also ist eine Stammfunktion von $f \circ g(x)$ die Funktion $F(x) = 2e^{\sqrt{x}}$. (Probe: $F'(x) = 2e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.)

ii)

$$\int_0^1 x^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3 \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 e^x\,\mathrm{d}x = [x^2e^x]_0^1 - 2\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$$

$$= [x^2e^x]_0^1 - 2\left([xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= [x^2e^x]_0^1 - 2[xe^x]_0^1 + 2[e^x]_0^1 = e - 2.$$

4. Gegeben sei die Potenzreihe $P_\infty(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^k}{k!} x^k$.

   i) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $P_\infty(x)$.

   ii) Zeigen Sie, dass die Potenzreihe $P_\infty(x)$ die Taylorreihe der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2^x$ an der Stelle $x^* = 0$ ist.

Lösung

i) Für den Konvergenzradius ρ gilt (siehe Satz 14.19 der Vorlesung):

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(\ln 2)^k (k+1)!}{k!(\ln 2)^{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k+1}{\ln 2} \right| = \infty.$$

ii)
$$\begin{array}{lcl} f(x) = 2^x & , & f(0) = 1 \\ f'(x) = 2^x \ln^2 & , & f'(0) = \ln 2 \\ f''(x) = 2^x (\ln 2)^2 & , & f''(0) = (\ln 2)^2 \end{array}$$

Vermutung: $f^{(n)}(x) = 2^x(\ln 2)^n, f^{(n)}(0) = (\ln 2)^n$

Beweis mit vollständiger Induktion: Induktionsanfang (siehe oben!)

Induktionsschluss: $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$ (zu zeigen)

$(2^x(\ln 2)^n)' = 2^x(\ln 2)^n \cdot \ln 2 = 2^x(\ln 2)^{n+1}$

Somit folgt die Taylorreihe:

$T_\infty(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^0(\ln 2)^k}{k!}(x-0)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^k}{k!} x^k = P_\infty(x).$

5. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)^\intercal \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$, und sei $h : D \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ mit $g(x,y) = x + y - 2$.

   i) Zeigen Sie mithilfe des Einsetzungsverfahrens, dass $(x^*, y^*) = (1,1)$ lokales Minimum der Funktion h unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ ist.

   ii) Zeigen Sie, dass das lokale Minimum $(x^*, y^*) = (1,1)$ das Gleichungssystem grad $h(x^*, y^*) = \lambda^*$ grad $g(x^*, y^*)$ erfüllt und bestimmen Sie den Lagrange-Multiplikator λ^* (siehe Satz 17.36 der Vorlesung).

Lösung

i) $h = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ unter $x + y = 2$ $(y = 2 - x)$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & h(x) = \tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{2-x} \\
& h'(x) = \tfrac{-1}{x^2} + \tfrac{1}{(2-x)^2} = 0 \quad (x = 0 \notin D \text{ und } x \neq 2,\ \text{da sonst } y = 0 \notin D) \\
\Rightarrow \quad & -(2-x)^2 + x^2 = 0 \\
\Rightarrow \quad & -4 + 4x - x^2 + x^2 = 0 \\
\Rightarrow \quad & 4x = 4 \\
\Rightarrow \quad & x = 1 \Rightarrow y = 1 \\
& h''(x) = \tfrac{2}{x^3} + \tfrac{2}{(2-x)^2} \Rightarrow h''(1) = 4 > 0 \\
\Rightarrow \quad & \text{bei}\, x = 1\, \text{hat}\, h(x)\, \text{ein relatives Minimum}
\end{aligned}
$$

Also $h(x,y)$ hat bei $x = 1$ und $y = 1$ ein relatives Minimum.

ii) grad $h = \left(\frac{-1}{x^2}, \frac{-1}{y^2}\right)$, grad $h(x^*, y^*) = (-1, -1)$

grad $g = (1,1)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^* = \mathbf{-1}$$

Also beträgt der Lagrange-Multiplikator $\lambda^* = -1$.

6. a) Sei G das Dreieck mit den Ecken $(0,0)^\intercal$, $(2,0)^\intercal$, und $(0,1)^\intercal$.

   i) Man beschreibe G als Normalbereich.

   ii) Sei $f : G \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = (x_1)^2 + (x_2)^2$. Man bestimme $\int_G f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$.

   b) Sei $0 < a < b$, und sei $G = \{(x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq (x_1)^2 + (x_2)^2 \leq b^2\}$.

   i) Man skizziere G.

   ii) Man beschreibe G in Polarkoordinaten und berechne den Flächeninhalt von G.

Lösung

a.i) $G = \{(x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 1 - \frac{x_1}{2}\}$.

a.ii) GemäßSatz 18.13 und i) ist

$$
\begin{aligned}
\int_G f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_0^2 \left(\int_0^{1-\frac{x_1}{2}} (x_1)^2 + (x_2)^2 \, \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \\
&= \int_0^2 \left(\left((x_1)^2 x_2 + \frac{1}{3}(x_2)^3 \right) \Big|_0^{1-\frac{x_1}{2}} \right) \mathrm{d}x_1 \\
&= \int_0^2 \left((x_1)^2 \left(1 - \frac{x_1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x_1}{2}\right)^3 \right) \mathrm{d}x_1 \\
&= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{4}(x_1)^2 - \frac{13}{24}(x_1)^3 \right) \mathrm{d}x_1 \\
&= \left(\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{4}(x_1)^2 + \frac{5}{12}(x_1)^3 - \frac{13}{96}(x_1)^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{5}{6}.
\end{aligned}
$$

b.ii) $G = \{(r\cos\phi, r\sin\phi) : a \leq r \;\; \leq b, 0 \leq \phi \leq 2\,\pi\}$ (vgl. Def. 18.19), und der Flächeninhalt von diesem Kreissegment beträgtt $2\,\pi\,(b^2 - a^2)$ (elementare Schulgeometrie). Bzw. gemäß18.17 und Beispielen aus der Vorlesung

$$
\int_G 1\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_a^b \left(\int_0^{2\pi} r \, \mathrm{d}\phi \right) \mathrm{d}r = 2\pi \int_a^b r\mathrm{d}r = 2\pi \left(\frac{1}{2}r^2 \Big|_a^b \right) = \pi(b^2 - a^2).
$$