Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Modulprüfung Mathematik III

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik

WS 2007/08
29.01.2008

Name	Vorname	Fachrichtg.	Matrikelnr.

Punkte Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
max. Punkte	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**
Punkte						

Punkte Klausur	Bonuspunkte	$\sum$	Note

Bitte beachten!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Bearbeitungszeit 120 Minuten.

Viel Erfolg!

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$.

i) Berechnen Sie den Gradienten von f und zeigen Sie, dass dieser nur im Punkt $(0,0)$ verschwindet.

ii) Zeigen Sie, dass die Hesse-Matrix $H_f(0,0)$ positiv semidefinit ist.

zu i) (vergleiche Definition 15.18)
$f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$
$\operatorname{grad} f(x,y) = (12x^3 - 8xy, 2y - 4x^2)$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{array}{rccc} \text{I)} & 12x^3 - 8xy & = & 0 \\ \text{II)} & 2y - 4x^2 & = & 0 \end{array}$$

$$\text{zu I)} \quad x(12x^2 - 8y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ oder } 12x^2 - 8y = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ oder } x = \pm\sqrt{\tfrac{2}{3}y}$$

$$\text{zu II)} \quad \text{1. Fall: } x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$
$$\text{2. Fall: } x = \pm\sqrt{\tfrac{2}{3}y} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\tfrac{2}{3} \cdot 2x^2} = \pm\sqrt{\tfrac{4}{3}} \cdot x$$

Dies ist eine falsche Aussage $\forall x \neq 0$.
$\Rightarrow \operatorname{grad} f(x,y)$ verschwindet nur im Punkt $(0,0)$

zu ii) (vergleiche Definition 15.33)

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 36x^2 - 8y & -8x \\ -8x & 2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow H_f(0,0)$ besitzt die Eigenwerte 0 und 2 und ist damit positiv semidefinit.

2. i) Man berechne das Integral $\int_D f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\,\mathbf{x}$ für

$$f(x,y) = \sqrt{x\,y} \quad \text{und} \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le y\right\}.$$

ii) Man berechne mittels Polarkoordinaten das Integral $\int_D f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\,\mathbf{x}$ für

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{und} \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 2,\ x, y \le 0\right\}.$$

zu i) (vergleiche Satz 16.10)

$$\int_D f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\,\mathbf{x} = \int_0^1 \int_{y^2}^{y} \sqrt{x\,y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{2}{3}\,y^{1/2}\,x^{3/2}\right]_{y^2}^{y} \mathrm{d}y = \frac{2}{3}\int_0^1 \left(y^2 - y^{7/2}\right)\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}\,y^3 - \frac{2}{9}\,y^{9/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{27}.$$

zu ii) Der Bereich D ist ein Viertel-Kreisring in negativen Quadranten mit den Radien 1 und $\sqrt{2}$. In Polarkoordinaten erhält man

$$D = \left\{ r \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} : 1 \le r \le \sqrt{2},\, \pi \le \phi \le \frac{3}{2}\pi \right\}.$$

Sei $\tilde{D} = \{(r,\phi) : 1 \le r \le \sqrt{2}, \pi \le \phi \le \frac{3}{2}\pi\}$ und $\mathbf{T} : \tilde{D} \to D$ mit $\mathbf{T}(r,\phi) = r\binom{\cos\phi}{\sin\phi}$. Gemäß Satz 16.17 erhält man

$$\int_D f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\,\mathbf{x} = \int_{\tilde{D}} f(\mathbf{T}(r,\phi))\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \int_\pi^{3/2\,\pi} \int_1^{\sqrt{2}} r\,\cos\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$$
$$= \int_\pi^{3/2\,\pi} \left[\frac{r^2}{2}\,\cos\phi\right]_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}\int_\pi^{3/2\,\pi} \cos\phi\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}\,[\sin\phi]_\pi^{3/2\,\pi}$$
$$\frac{1}{2}\,(-1-0) = -\frac{1}{2}.$$

3. i) Berechnen sie die globalen Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 + 2y + 5$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

ii) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1\cos(x_2) \\ x_1\sin(x_2) \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(y_1,y_2) = y_1^2 + y_2^2$. Berechnen Sie die Jacobimatrix von $f \circ g$ mit Hilfe der Kettenregel.

zu i) (vergleiche 15.35)

Lagrange-Verfahren:

Berechne zunächst $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2,\ \frac{\partial g}{\partial x} = 2x$ und $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$.

Löse folgendes Gleichungssystem:
$$\begin{array}{rrcl} \text{I)} & 2x + 2\lambda x & = & 0 \\ \text{II)} & 2 + 2\lambda y & = & 0 \\ \text{III)} & x^2 + y^2 - 1 & = & 0 \end{array}$$

aus I) folgt $x = 0$ oder $\lambda = -1$.
Ist $x = 0$ so ist $y = \pm 1$.
Ist $\lambda = -1$ so folgt aus II) $y = 1$.
Da es wegen der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ ein Maximum und ein Minimum geben muss, besitzt f ein Maximum bei $(0,1)$ mit Funktionswert 7 und ein Minimum bei $(0,-1)$ mit Funktionswert 3.

Einsetzungsverfahren:

Es gilt $x^2 = 1 - y^2$.
In f eingesetzt erhält man $f(y) = 1 - y^2 + 2y + 5$.
Einmal ableiten ergibt $f'(y) = -2y + 2$.
Durch Nullsetzen erhält man $y = 1$.
Die 2. Ableitung ist $f''(y) = -2$, d.h. f besitzt ein Maximum bei $(0,1)$.

Da nach globalen Extremwerten gefragt wurde, muss nun noch der fehlenden Randwert überprüft werden.
Dies ist $(0,-1)$, d.h. f besitzt ein globales Maximum bei $(0,1)$ mit Funktionswert 7 und ein globales Minimum bei $(0,-1)$ mit Funktionswert 3.

zu ii) (vergleiche 15.27)
Es gilt $J_{f\circ g}(\mathbf{x}) = J_f(g(\mathbf{x}))J_g(\mathbf{x})$.
Berechne zunächst $J_f(\mathbf{y}) = (2y_1, 2y_2)$.
Daraus folgt $J_f(g(\mathbf{x})) = (2x_1\cos(x_2), 2x_1\sin(x_2))$.
Nun berechne $J_g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos(x_2) & -x_1\sin(x_2) \\ \sin(x_2) & x_1\cos(x_2) \end{pmatrix}$.
Setzt man beides in die obige Formel ein, so erhält man

$$\begin{array}{rcl} J_{f\circ g}(\mathbf{x}) & = & (2x_1\cos^2(x_2) + 2x_1\sin^2(x_2), -2x_1^2\cos(x_2)\sin(x_2) + 2x_1^2\cos(x_2)\sin(x_2)) \\ & = & (2x_1, 0) \end{array}.$$

(Oder man erhält direkt $f(g(x_1,y_2)) = x_1^2\cos^2(x_2) + x_1^2\sin^2(x_2) = x_1^2$
$\Rightarrow J_{f\circ g}(x_1,x_2) = (2x_1, 0)$)

4. i) Ein Saftverkäufer verkauft verschiedene Kirsch-Bananen-Säfte. Er hat vier verschiedene Sorten im Angebot. Die benötigten Mengen pro Liter, die zur Verfügung stehenden Mengen sowie die Gewinne können folgender Tabelle entnommen werden: (Mengen in l, Gewinne in Euro)

	Saft 1	Saft 2	Saft 3	Saft 4	Verfügbarkeit
Kirschsaft	0,8	0,6	0,4	0,2	500
Bananensaft	0,2	0,4	0,6	0,8	400
Gewinn	2	3	3	2	

Erarbeiten Sie ein mathematisches Modell zu dem Optimierungsproblem, unter diesen Bedingungen den größtmöglichen Gewinn zu erzielen.

ii) Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\max\{\begin{array}{rcrcrcl} & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & : \\ & x_1 & & & - & x_3 & \leq 1 \\ - & x_1 & + & x_2 & & & \leq 2 \\ & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq 4 \\ & & & & & & x_1, x_2, x_3 \geq 0\} \end{array}$$

mit Hilfe des Simplexalgorithmus.

zu i) Sei x_i die Menge von Saft i in l.

$$\max\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & : & \\ 0,8x_1 & + & 0,6x_2 & + & 0,4x_3 & + & 0,2x_4 & \leq & 500 \\ 0,2x_1 & + & 0,4x_2 & + & 0,6x_3 & + & 0,8x_4 & \leq & 400 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0\ \} \end{array}$$

zu ii) Da $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ und das Problem in Standardform gegeben ist, kann als Startecke $\mathbf{0}$ gewählt werden und wir erhalten als Starttableau

$$
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 4
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{cccccc|c}
0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
\hline
1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 3
\end{array}
$$

$$
\longrightarrow \quad
\begin{array}{cccccc|c}
0 & 0 & 5 & -2 & -1 & 0 & -4 \\
\hline
1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & \boxed{3} & -1 & 0 & 1 & 3
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{cccccc|c}
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -1 & -\frac{5}{3} & -9 \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 2 \\
0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 4 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1
\end{array}
$$

Nun sind also alle relativen Kosten ≤ 0 und somit ist der Optimalwert 9 und eine Optimallösung ist $\begin{pmatrix} x_1^\star \\ x_2^\star \\ x_3^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. Ein Antivirenprogramm zur Erkennung eines Computervirus V, mit dem 5 % eines bestimmten Computertyps infiziert sind, erkennt einen mit V infizierten Computer mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,96.
Ist ein Computer nicht mit dem Virus V infiziert, so erkennt das Antivirenprogramm dennoch den Virus V mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,16. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig überprüfter Computer

i) mit V infiziert ist, obwohl das Antivirenprogramm V nicht erkannt hat,

ii) nicht mit V infiziert ist, obwohl das Programm V erkannt hat.

Sei A das Ereignis, dass der Computer mit V infiziert ist, und sei B das Ereignis, dass das Antivirenprogramm V erkennt.

zu i) $P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{B}|A) \cdot P(A)}{P(\bar{B})} = \frac{0{,}04 \cdot 0{,}05}{0{,}84 - 0{,}04} = 0,0025$

zu ii) $P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})}{1 - P(\bar{B})} = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}16}{1 - 0{,}8} = 0,76$

6. Eine Maschine produziert quadratische Speicherkarten, deren Seitenlängen 35 mm betragen sollen. Da zufallsabhängige Ungenauigkeiten während des Herstellungsprozesses nicht ausgeschlossen werden können, lässt sich die Seitenlänge L als eine normalverteilte Zufallsgröße auffassen mit $\mu = 35$ und $\sigma^2 = 0,25$. Eine Speicherkarte lässt sich in ein Lesegerät problemlos einschieben, wenn die Seitenlängen höchstens 35,2 und mindestens 34,5 mm betragen.

i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich eine zufällig aus der laufenden Produktion entnommene Speicherkarte problemlos in das Gerät einschieben lässt?

ii) Ein anderes Lesegerät erlaubt eine Abweichung der Seitenlänge vom Sollmaß um 0,7 mm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich eine zufällig entnommene Speicherkarte nicht in dieses Gerät einschieben lässt?

(Tabelle zur Standardnormalverteilung siehe Rückseite) L ist $N(\mu = 35,\ \sigma = 0,5)$ verteilt.

zu i)

$$\begin{aligned} P(34,5 < L < 35,2) &= P(\frac{34,5-35}{0,5} < \frac{L-\mu}{\sigma} < \frac{35,2-35}{0,5}) \\ &= \Phi(0,4) - \Phi(-1) = \Phi(0,4) - (1-\Phi(1)) \\ &= 0,6554 - 1 + 0,8413 = \mathbf{0,4967}. \end{aligned}$$

zu ii)

$$\begin{aligned} P(34,3 < L < 35,7) &= P(\frac{34,3-35}{0,5} < \frac{L-\mu}{\sigma} < \frac{35,7-35}{0,5}) \\ &= \Phi(+1,4) - \Phi(-1,4) = 1 - 2\Phi(1,4) \\ &= 1 - 0,9192 = 0,8384. \end{aligned}$$

D.h. eine Speicherkarte lässt sich mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - 0,8384 = \mathbf{0,1616}$ nicht in das Lesegerät einschieben.

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

Die Tabelle enthält für einige $z \in [0, 3.9]$ die Werte $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable Z. Ablesebeispiel: $\Phi(1.53) = 0.9370$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Wegen der Symmetrie dieser Verteilung gilt $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ für alle z.