

Fakultät für Mathematik  
Institut für Algebra und Geometrie  
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

## Modulprüfung Mathematik III

Fachrichtung: Computer Science in Engineering,  
Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik

WS 2009/10  
10.02.2010

Name	Vorname	Fachrichtg.	Matrikelnr.

### Punkte Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
max. Punkte	5	5	5	5	5	5
Punkte						

Punkte Klausur	Bonuspunkte	$\Sigma$	Note

### Bitte beachten!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Bearbeitungszeit 120 Minuten.

**Viel Erfolg!**

## 1. Differentialrechnung I

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3xy - x^3 - y^3$ .

- i) Man bestimme Gradienten  $\text{grad}f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  und Hesse-Matrix  $H_f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  von  $f$ .
- ii) Man bestimme alle lokalen und globalen Extrema von  $f$ .

LÖSUNG

- i) Es ist  $\text{grad}f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y-3x^2 \\ 3x-3y^2 \end{pmatrix}$  und

$$H_f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}.$$

- ii) Zum Bestimmen möglicher Extrema setzen wir  $\text{grad}f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$  und erhalten

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3y - 3x^2 \\ 3x - 3y^2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y - x^2 \\ x - y^2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow y = x^2 \wedge x - x^4 = 0 \\ &\Leftrightarrow y = x^2 \wedge x(1-x)(x^2+x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in \{(0, 0), (1, 1)\}. \end{aligned}$$

Einsetzen der Werte aus ii) in die Hesse-Matrix liefert

$$H_f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Die erste Matrix hat die Eigenwerte  $\pm 3$  und ist somit indefinit. Also ist  $(0, 0)$  kein lokales Extremum. Die zweite Matrix hat die Eigenwerte  $-3, -9$  und ist daher negativ definit (oder auch gemäß einem Kriterium aus der Vorlesung für  $2 \times 2$ -Matrizen). Somit hat  $f$  nur ein lokales Maximum  $(1, 1)$ . Dies ist kein globales Maximum, da  $f(0, -y) = y^3$  beliebig groß werden kann.

## 2. Differentialrechnung II

Für  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$  sei  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ , und es sei  $M(a, b) = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\}$ .

- i) Skizzieren Sie die Menge  $M(a, b)$ .
- ii) Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy$ .
  - a) Bestimmen Sie die Gradienten von  $f$  und  $g$ .
  - b) Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion  $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  unter der Nebenbedingung  $(x, y)^\top \in M(a, b)$ .

LÖSUNG

### 3. Integralrechnung

Sei  $D = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

- i) Beschreiben Sie  $D$  in Polarkoordinaten.
- ii) Bestimmen Sie das Integral  $\int_D (x^2 + y^2) dx$ .
- iii) Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  und  $t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Bestimmen Sie  $\text{vol}(AD + t)$ .

LÖSUNG

- i) Die Menge  $D$  besteht aus allen Punkten des Kreises  $x^2 + y^2 \leq 1$ , deren Koordinaten entweder beide nicht-negativ oder beide nicht-positiv sind. In Polarkoordinaten bedeutet dies

$$D = \{r (\cos \phi, \sin \phi)^\top : 0 \leq r \leq 1, \phi \in [0, \pi/2] \cup [\pi, (3/2)\pi]\}.$$

- ii) Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_D (x^2 + y^2) dx \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{\pi/2} r((r \cos \phi)^2 + (r \sin \phi)^2) d\phi + \int_\pi^{3\pi/2} r((r \cos \phi)^2 + (r \sin \phi)^2) d\phi \right) dr \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{\pi/2} r^3 d\phi + \int_\pi^{3\pi/2} r^3 d\phi \right) dr = \pi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

- iii) Gemäß Satz 16.15 ist  $\text{vol}(AD + t) = |\det A| \text{vol}(D) = 5 \frac{\pi}{2}$ .

### 4. Lineare Optimierung

- i) Eine Firma hat zwei Produktionsstätten  $P_1$  und  $P_2$  mit einer Produktionskapazität von 1,6 und 0,8 Tonnen pro Tag. Sie verteilt ihr Produkt an drei Kunden  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  mit jeweiligem Tagesbedarf von 0,9 t/Tag, 0,7 t/Tag und 0,3 t/Tag. Die Kosten in EUR/t für den Transport von den Produktionsstätten zu den einzelnen Kunden sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

	K1	K2	K3
P1	25	60	75
P2	20	50	85

Für die Produktion selbst fallen in  $P_1$  Kosten in Höhe von 30 EUR/t an, falls weniger als 0,3 t/Tag produziert werden und 40 EUR/t bei höherer Produktionsmenge. Die Produktionskosten in  $P_2$  sind unabhängig vom Produktionsvolumen und belaufen sich auf 35 EUR/t. Modellieren Sie das Problem, den Bedarf der Kunden an einem Tag zu decken, wobei die Gesamtkosten für die Firma minimiert werden sollen.

ii) Lösen Sie folgendes LOP mit der Simplexmethode:

$$\begin{aligned} \max\{x_1 + 2x_2 - x_3 : \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 8, \\ & 2x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 12, \\ & 3x_1 + x_2 \leq 18, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\}. \end{aligned}$$

#### LÖSUNG

i) Es seien  $x_1, x_2$  und  $x_3$  die Transportmenge des Produktes in t/Tag von  $P_1$  nach  $K_1, K_2$  und  $K_3$  und analog seien  $y_1, y_2$  und  $y_3$  die Transportmenge des Produktes in t/Tag von  $P_2$  nach  $K_1, K_2$  und  $K_3$ . Da der Gesamtbedarf der drei Kunden gleich  $0,9 + 0,7 + 0,3 = 1,9$  ist und in  $P_2$  nur höchstens 0,8 t/Tag produziert werden können, müssen in  $P_1$  mindestens 1,1 t/Tag produziert werden. Somit belaufen sich die Produktionskosten in  $P_1$  unter den Vorgaben der Kunden immer auf 40 EUR/t und wir können folgendes LOP aufstellen.

$$\begin{aligned} \text{Minimiere: } \quad & 25x_1 + 60x_2 + 75x_3 + 20y_1 + 50y_2 + 85y_3 \\ & + 40(x_1 + x_2 + x_3) + 35(y_1 + y_2 + y_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{unter:} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 1,6, \\ & y_1 + y_2 + y_3 \leq 0,8, \\ & x_1 + y_1 \geq 0,9, \\ & x_2 + y_2 \geq 0,7, \\ & x_3 + y_3 \geq 0,3, \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{aligned}$$

ii) Das Anfangstableau inklusive zusätzlichen Spalten für die Schlupfvariablen ist das folgende.

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}$$

Pivotieren nach Spalte 1 und Zeile 1:

$$\begin{array}{cccccc|c}
0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -4 \\
1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 4 \\
0 & \mathbf{3} & 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\
0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 & 6
\end{array}$$

Pivotieren nach Spalte 2 und Zeile 2:

$$\begin{array}{cccccc|c}
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -6 \\
1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{10}{3} \\
0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\
0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{6} & 1 & \frac{20}{3}
\end{array}$$

Nun sind alle relativen Kosten nicht-positiv und wir können die Optimallösung  $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{10}{3}, \frac{4}{3}, 0)$  und den zugehörigen Optimalwert 6 ablesen.

## 5. Wahrscheinlichkeitsrechnung I

In einer Team-Quiz-Show im Fernsehen wird jedem Mitglied eine Frage gestellt. Das Team gewinnt, wenn höchstens ein Mitglied eine Frage falsch beantwortet. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person die richtige Antwort gibt, ist 0,1.

- i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein aus drei Mitgliedern bestehendes Team gewinnt? Benennen Sie die Verteilung und berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der zugehörigen Zufallsvariablen.
- ii) Ermitteln Sie Erwartungswert und Varianz, wenn jedes Team aus 100 Mitgliedern besteht. Benutzen Sie die Ungleichung von Tschebyschev um die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, dass ein aus 100 Mitgliedern bestehendes Team zwischen keine und 20 richtige Antworten gibt.

### LÖSUNG

- i) Sei  $X$  die Zufallsvariable für die Anzahl der richtig beantworteten Fragen.  $X$  folgt einer Binomial-Verteilung der Länge  $n = 3$  mit Eintrittswahrscheinlichkeit  $p = 0,1$ . Die Wahrscheinlichkeiten der auftretenden Elementarereignisse berechnen sich daher zu

$$- P(X = 0) = \binom{3}{0}(0,1)^0(0,9)^3 = 0,729$$

$$- P(X = 1) = \binom{3}{1}(0,1)^1(0,9)^2 = 0,243$$

$$- P(X = 2) = \binom{3}{2}(0,1)^2(0,9)^1 = 0,027$$

$$- P(X = 3) = \binom{3}{3}(0,1)^3(0,9)^0 = 0,001$$

Das Team gewinnt, wenn mindestens zwei Mitglieder richtig antworten, d.h.,

$$\begin{aligned} P(\text{Team gewinnt}) &= P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= 0,027 + 0,001 = 0,028. \end{aligned}$$

Da  $X$  binomialverteilt ist, gilt  $E(X) = np = 0,3$  und  $\text{Var}(X) = np(1-p) = 0,27$ .

- ii) Besteht das Team aus 100 Mitgliedern, liegt immer noch eine Binomialverteilung vor, mit Parametern  $n = 100$  und  $p = 0,1$ . In diesem Fall ist  $E(X) = 10$  und  $\text{Var}(X) = 9$ .

Somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P(|X - 10| \leq 10) = 1 - P(|X - 10| > 10).$$

Tschebyschev sagt uns, dass

$$P(|X - 10| > 10) < \frac{\text{Var}(X)}{10^2} = 9/100 = 0,09,$$

und somit ist  $P(|X - 10| \leq 10) > 0,91$ .

## 6. Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Für  $a \neq 0$  sei

$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{1}{ax^2} & \text{für } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- i) Bestimmen Sie  $a \neq 0$ , so dass  $\omega$  Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable  $X$  ist.
- ii) Berechnen Sie für dieses  $a$  die Verteilungsfunktion, den Erwartungswert und die Varianz von  $X$ .

LÖSUNG

- i) Wenn  $\omega(x)$  Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable ist, muss  $\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) dx = 1$  gelten. Daraus ergibt sich die Bedingung

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) dx = \int_1^2 \frac{1}{ax^2} dx = \frac{1}{a} \left( -\frac{1}{x} \Big|_1^2 \right) \\ &= -\frac{1}{2a} + \frac{1}{a} = \frac{1}{2a}. \end{aligned}$$

Damit muss also  $a = 1/2$  sein.

ii) Die Verteilungsfunktion ist definiert durch

$$F(x) := P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \omega(t) dt.$$

Integration wie in i) unter Berücksichtigung von  $a = 1/2$  gibt uns

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ 2 - \frac{2}{x} & \text{für } 1 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{für } x \geq 2. \end{cases}$$

Der Erwartungswert ist  $\int_{-\infty}^{\infty} x\omega(x)dx = \int_1^2 \frac{2}{x} dx = 2 \log 2$ .

Die Varianz berechnet sich zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\omega(x)dx - E(X)^2 = \int_1^2 2dx - (2 \log(2))^2 = 2 - 4 \log^2(2).$$