Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Martin Henk, Dr. Michael Höding

Modulprüfung Mathematik III

Fachrichtung: Computer Science in Engineering, Computervisualistik, Informatik, Wirtschaftsinformatik

WS 2007/08
05.04.2008

Name	Vorname	Fachrichtg.	Matrikelnr.

Punkte Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
max. Punkte	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**
Punkte						

Punkte Klausur	Bonuspunkte	$\sum$	Note

Bitte beachten!

- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt.
- Alle Aussagen müssen sorgfältig begründet werden.
- Bearbeitungszeit 120 Minuten.

Viel Erfolg!

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = (x^2 - y)e^{2x-y}$.

i) Berechnen Sie den Gradienten von f und zeigen Sie, dass dieser nur im Punkt $(1,2)$ verschwindet.

ii) Ist der Punkt $(1,2)$ ein Extremwert und wenn ja, welcher Art?

zu i) (vergleiche Definition 15.18)
Es gilt $\mathrm{grad} f(x,y) = e^{2x-y}(2x^2 + 2x - 2y, y - x^2 - 1)$ und daher sicherlich $\mathrm{grad} f(1,2) = (0,0)$. Weiterhin ist genau dann $\mathrm{grad} f(x,y) = (0,0)$, wenn

$$\begin{array}{rrcl} \text{I)} & 2x^2 + 2x - 2y & = & 0 \\ \text{II)} & y - x^2 - 1 & = & 0 \end{array}.$$

$2 \times II) + I)$ liefert $2\,x - 2 = 0$. Also $x = 1$, was in II) dann $y = 2$ ergibt. Somit verschwindet $\mathrm{grad} f(x,y)$ nur im Punkt $(1,2)$.

zu ii) (vergleiche Definition 15.33)
Weiteres Ableiten führt zu $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^{2x-y}(4x^2+8x-4y+2)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = e^{2x-y}(2y - 2x^2 - 2x - 2)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^{2x-y}(x^2 - y + 2)$. Nach Definition der Hessematrix ist nun

$$H_f(x,y) = e^{2x-y} \begin{pmatrix} 4x^2 + 8x - 4y + 2 & 2y - 2x^2 - 2x - 2x \\ 2y - 2x^2 - 2x - 2 & x^2 - y + 2 \end{pmatrix}$$

und somit $H_f(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ mit $\det H_f(1,2) = 2 > 0$. Da auch das erste Element dieser Matrix (6) positiv ist, ist nach 7.42 die Matrix positiv definit, und somit ist $(1,2)$ ein lokales Minimum von f. Es ist kein globales Minimum, da $f(x,y)$ beliebig neagtiv werden kann.

2. i) Sei $a > 0$. Man berechne das Integral $\int_D f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ für $f(x,y) = x\,y$ und

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 2\,a, \sqrt{2\,a\,y - y^2} \le x \le \sqrt{2\,a\,y}\right\}.$$

ii) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Viertel-Kreisrings

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \le x^2 + y^2 \le 9,\ x \le 0,\ y \ge 0\}.$$

zu i) (vergleiche Satz 16.10)

$$\begin{aligned} \int_D f(\mathbf{x})\ \mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_0^{2\,a} \int_{\sqrt{2ay-y^2}}^{\sqrt{2ay}} x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\,a} y \left[\frac{1}{2}\,x^2\right]_{\sqrt{2\,a\,y-y^2}}^{\sqrt{2ay}} \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\,a} y\ \left(2ay - 2ay + y^2\right)\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int_0^{2\,a} y^3\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}y^4\right]_0^{2a} \\ &= 2\,a^4. \end{aligned}$$

zu ii) Gemäß dem Beispiel in der Vorlesung bestimmt man zunächst eine Darstellung von D in Polarkoordinaten

$$D = \left\{ r \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} : 2 \le r \le 3,\ \pi/2 \le \phi \le \pi \right\}.$$

Nach Satz 16.17 beträgt das Volumen von D

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(D) &= \int_D 1 \,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\pi/2}^{\pi} \int_2^3 r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2} \left[r^2\right]_2^3 \mathrm{d}\phi \\ &= \frac{5}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{d}\phi = \frac{5\pi}{4}. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die x-Koordinate des Schwerpunktes als

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{vol}(D)} \int_D x \,\mathrm{d}\mathbf{x} &= \frac{4}{5\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_2^3 r^2 \cos\phi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi = \frac{4}{5\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\phi \,\frac{1}{3} \left[r^3\right]_2^3 \mathrm{d}\phi \\ &= \frac{76}{15\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\phi \,\mathrm{d}\phi = \frac{76}{15\pi} \left[\sin\phi\right]_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{76}{15\pi}, \end{aligned}$$

und analog die y-Koordinate des Schwerpunktes als

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{vol}(D)} \int_D y \,\mathrm{d}\mathbf{x} &= \frac{4}{5\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_2^3 r^2 \sin\phi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi = \frac{4}{5\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\phi \,\frac{1}{3} \left[r^3\right]_2^3 \mathrm{d}\phi \\ &= \frac{76}{15\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\phi \,\mathrm{d}\phi = \frac{76}{15\pi} \left[-\cos\phi\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{76}{15\pi}. \end{aligned}$$

3. i) Berechnen sie die globalen Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3x + y^2 + 7$ unter der Nebenbedingung $9x^2 + 2y^2 = 1$.

ii) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x, y) = (3e^{x^2}, 3x^2 - \sin(2y))$. Berechnen sie die Jacobimatrix und deren Determinante im Punkt $(1, \frac{\pi}{2})$.

zu i) (vergleiche 15.35)
Sei $g(x, y) = 9x^2 + 2y^2 - 1$. Nach dem Lagrange-Verfahren suchen wir Lösungen des Gleichungssystems $\mathrm{grad} f(x, y) = \lambda \mathrm{grad} g(x, y)$. Mit $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 18x$ und $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 4y$ erhalten wir also

$$\begin{array}{rrcl} \text{I)} & 3 & = & \lambda 18x \\ \text{II)} & 2y & = & \lambda 4y \\ \text{III)} & 9x^2 + 2y^2 - 1 & = & 0 \end{array}$$

Aus I) folgt zunächst $\lambda \neq 0$ und $x = \frac{1}{6\lambda}$. Ist $y \neq 0$ so liefert II) den Wert $\lambda = 1/2$, was dann zu $x = 1/3$ führt. Eingesetzt in III) ergibt dies den

Widerspruch $y = 0$. Also sei $y = 0$. Dann ergibt III) $x = \pm\frac{1}{3}$. Wir erhalten demzufolge zwei Extremstellen $(\pm\frac{1}{3}, 0)$, wobei wegen $f(\frac{1}{3}, 0) = 1$ bzw. $f(-\frac{1}{3}, 0) = -1$ ein globales Maximum bzw. Minimum vorliegt (nach Satz 15.31).

zu ii) (vergleiche Definition 15.23)
Es gilt $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6xe^{x^2} & 0 \\ 6x & -2\cos(2y) \end{pmatrix}$ und $\det(J_f(x,y)) = -12xe^{x^2}\cos(2y)$.
Daraus ergibt sich $\det(J_f(1, \frac{\pi}{2})) = 12e$.

4. i) Die lokalen Verkehrsbetriebe haben den Auftrag, 4000 Gäste zu einer Großveranstaltung zu befördern. Es stehen zwei verschiedene Typen von Straßenbahnen zur Verfügung. Das ältere Modell mit einer Fahrgastkapazität von 200 Personen hat einen Betriebsaufwand von $295,-$ EUR pro Fahrt. Das neuere Modell kann lediglich 150 Personen transportieren, es fallen aber auch nur $225,-$ EUR pro Fahrt an. Der Bestand an Straßenbahnen erlaubt höchstens 13 Fahrten mit neuen und 17 Fahrten mit alten Bahnen.
Erarbeiten Sie ein mathematisches Modell zu dem Optimierungsproblem, die Personenbeförderung mit den kleinstmöglichen Kosten auszuführen.

ii) Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\max\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & : & \\ 2x_1 & - & 2x_2 & & & \leq & 4 \\ & & x_2 & - & x_3 & \leq & 1 \\ & & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}\right\}$$

mit Hilfe des Simplexalgorithmus.

zu i) Sei x die Zahl der Fahrten mit alten Bahnen und y die Zahl der Fahrten mit neuen Bahnen

$$\min\left\{\begin{array}{rcrcl} 295x & + & 225y & : & \\ 200x & + & 150y & \geq & 4000 \\ x & & & \leq & 17 \\ & & y & \leq & 13 \\ & & x, y & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{array}\right\}$$

zu ii) Als Startecke kann $\mathbf{0}$ gewählt werden und ausgehend vom Starttableau berechnen wir

$$
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
\boxed{2} & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{cccccc|c}
0 & 3 & 3 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -2 \\ \hline
1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 3 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 2
\end{array}
$$

$$
\rightarrow \quad
\begin{array}{cccccc|c}
0 & -6 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -3 & -8 \\ \hline
1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 \\
0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\
0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{array}
$$

Nun sind also alle relativen Kosten ≤ 0 und somit ist der Optimalwert 8 und eine Optimallösung ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. In einem Computerkabinett der Universität stehen 20 Computerarbeitsplätze zur Verfügung. Von den 20 vorhandenen Computern sind im Moment der Öffnung des Computerkabinettes 2 Computer ausgefallen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Besuch von 2 Studenten direkt nach der Öffnung

i) keiner der Studenten seinen Computerarbeitsplatz wegen eines ausgefallenen Computers wechseln muss,

ii) beide ihren Platz wechseln müssen.

X - Anzahl der Studenten die ihren Platz wechseln müssen
$X \sim \text{Bin}\ (n = 2,\, p = \frac{2}{20} = \frac{1}{10})$

zu i) $P(X = 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{10}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{10}\right)^2 = 0,9^2 = 0,81$

zu ii) $P(X = 2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{10}\right)^0 = 0,1^2 = 0,01$

6. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ mit

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x\, e^{x-3} & \text{für } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .
$$

i) Zeigen Sie, dass $f(x)$ Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße X ist.

ii) Geben Sie die zugehörige Verteilungsfunktion an.

iii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße X zwischen 1 und 2 liegt.

zu i) z.z. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

also $\int\limits_{1}^{3} \frac{1}{2}xe^{x-3}dx = \frac{1}{2e^3}\int\limits_{1}^{3} xe^x dx$

$= \frac{1}{2e^3}[xe^x - e^x]_1^3 = \frac{1}{2e^3}(3e^3 - e^3 - (e-e)) = 1$

zu ii) $F(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(x)dx$

$\Rightarrow \quad F(t) = 0\,\text{für} - \infty < t < 1$

$F(t) = \int\limits_{1}^{t} \frac{1}{2}xe^{x-3}dx = \frac{1}{2e^3}[xe^x - e^x]_1^t = \frac{e^{t-3}}{2}(t-1)\,\text{für}\,1 \leq t \leq 3$

$F(t) = 1\,\text{für}\,3 < t < \infty$

zu iii) $P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = \frac{e^{2-3}}{2}(2-1) - \frac{e^{1-3}}{2}(1-1) = \frac{1}{2e}$