Konstruktion einer nicht-borelschen Jordanmenge in einer Borelschen Nullmenge des $\mathbb{R}^n$

Im Folgenden wollen wir durch Konstruktion einer Menge zeigen, dass das Borel-Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$ nicht vollständig ist und dass es Jordanmengen gibt, die keine Borelmengen sind.
Als Vorbereitung zeigen wir das später nützliche Lemma:

Lemma. Seien $M \subset \mathbb{R}$ eine Borelmenge und $b_1, b_2, \ldots, b_n : M \to \mathbb{R}$ Borel-messbare Funktionen. Dann ist die Funktion $b : M^n \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die durch

$$b(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (b_1(x_1), b_2(x_2), \ldots, b_n(x_n))$$

eindeutig definiert ist, ebenfalls Borel-messbar.

Beweis. Nach Satz 11.14 genügt es, Messbarkeit für ein Erzeugendensystem nachzuweisen. Wir wählen dafür die halboffenen Quader im $\mathbb{R}^n$ (Übungsaufgabe 11.4). Sei $Q = [x_1, y_1) \times [x_2, y_2) \times \ldots \times [x_n, y_n)$ ein halboffener Quader. Dann gilt

$$b^{-1}([x_1, y_1) \times [x_2, y_2) \times \ldots \times [x_n, y_n)) = b_1^{-1}([x_1, y_1)) \times b_2^{-1}([x_2, y_2)) \times \ldots \times b_n^{-1}([x_n, y_n)).$$

Nach Voraussetzung $b_i^{-1}([x_i, y_i)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall i = 1, \ldots, n$, sodass iterierte Anwendung von Übungsaufgabe 11.14 $b^{-1}(Q) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^n \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ergibt. Also ist b Borel-messbar. □

Sei $C \subset [0,1]$ das Cantorsche Diskontinuum. C ist kompakt (Analysis I) und hat das Lebesgue-Maß Null. Dann ist $C^n \subset [0,1]^n$ ebenfalls kompakt und iterierte Anwendung von Übungsaufgabe 11.14 zeigt $\lambda_n(C^n) = (\lambda_1(C))^n = 0$. Als kompakte Menge ist C^n damit eine Borelsche Nullmenge und ebenfalls eine Jordansche Nullmenge (Analysis IIIa).
In der Übung haben wir eine monoton wachsende Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ mit $f(C) = [0,1]$ konstruiert. Wir führen auf C folgende Äquivalenzrelation ein:

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

Sei $A \subset C$ eine Teilmenge, die aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält. Nach Konstruktion ist dann die Einschränkung $f_{|A} : A \to [0,1]$ injektiv, surjektiv und monoton wachsend, das heißt bijektiv und streng monoton wachsend. Somit existiert die Umkehrfunktion $f_{|A}^{-1} : [0,1] \to A$ und ist ebenfalls streng monoton wachsend. Nach Übungsaufgabe 11.19 und Satz 11.14 ist $f_{|A}^{-1}$ Borel-messbar.
Sei nun $g : [0,1]^n \to A^n$ durch

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (f_{|A}^{-1}(x_1), f_{|A}^{-1}(x_2), \ldots, f_{|A}^{-1}(x_n))$$

defininiert. Per Konstruktion ist g bijektiv und nach unserem Lemma Borel-messbar. Wie in Satz 11.1 können wir nun eine Menge $B \subset [0,1]^n$ finden, die keine Lebesguemenge ist. Dann kann $g(B) \subset A^n \subset C^n$ keine Borelmenge sein, denn ansonsten wäre das Urbild B wegen der Borel-Messbarkeit von g eine Borelmenge und insbesondere eine Lebesguemenge. Zusätzlich ist jede Teilmenge einer Jordanschen Nullmenge wiederum eine Jordansche Nullmenge (Analysis IIIa), sodass $g(B)$ eine Jordansche Nullmenge ist.
Damit $g(B) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ und $g(B) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ wegen der Vollständigkeit des Lebesgue-Maßes, aber $g(B) \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Da $g(B)$ in einer Borelschen Nullmenge liegt, haben wir gezeigt, dass das Borel-Lebesgue-Maß nicht vollständig ist und dass es Jordanmengen gibt, die keine Borelmengen sind.