

Über $\aleph_0^{\aleph_0}$ und c^{\aleph_0}

Im Folgenden wollen wir die Kardinalitäten $\aleph_0^{\aleph_0}$ und c^{\aleph_0} untersuchen und werden zeigen, dass $c = 2^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = c^{\aleph_0}$ gilt.

Vorüberlegung

Schon Cantor hat gezeigt, dass $c = 2^{\aleph_0}$ gilt. Die Ungleichungen $2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq c^{\aleph_0}$ sind offensichtlich, demnach genügt es, $c^{\aleph_0} \leq c$ zu zeigen. Zunächst beweisen wir aber $\aleph_0^{\aleph_0} \leq c$, da wir hierfür nicht das Auswahlaxiom benötigen werden.

Bestimmung von $\aleph_0^{\aleph_0}$

Offenbar genügt es, eine Injektion von der Menge aller Folgen natürlicher Zahlen (diese hat die Kardinalität $\aleph_0^{\aleph_0}$) in die Menge der Teilmengen rationaler Zahlen (diese hat die Kardinalität 2^{\aleph_0} , da die rationalen Zahlen abzählbar sind) anzugeben.

Sei $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ eine Folge natürlicher Zahlen. Zu einer natürlichen Zahl n sei nun $z(n)$ die Zahl, die eine 0 vor dem Komma und nach dem Komma die Zifferndarstellung von n im Dezimalsystem ohne führende Nullen in umgekehrter Reihenfolge aufweist. Offenbar ist $z(n)$ rational und es gilt $z(n) \neq z(m)$ für $n \neq m$. Wir ordnen nun $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ die Menge rationaler Zahlen $\{k + z(n_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ zu. Da nach Konstruktion $0 \leq z(n) < 1$ gilt, so folgt aus $k + z(n) = l + z(m)$ zunächst $k = l$ und anschließend $z(n) = z(m)$, also $n = m$. Folglich ist diese Zuordnung injektiv und wir haben $\aleph_0^{\aleph_0} = c$ gezeigt.

Bestimmung von c^{\aleph_0}

Da eine Bijektion zwischen dem Intervall $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ und den reellen Zahlen existiert, gilt $|\frac{1}{3}, \frac{2}{3}| = c$ und es genügt wiederum, eine Injektion zwischen der Menge der Folgen $(r_k)_{k=0}^{\infty}$ mit $r_k \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \quad \forall k \in \mathbb{N}$ und der Menge der Teilmengen rationaler Zahlen anzugeben.

Zunächst wählen wir mit Hilfe des Auswahlaxioms zu jeder Zahl $r \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ eine Folge rationaler Zahlen in $(0, 1)$, die gegen r konvergiert. Die Menge der Folgenglieder bezeichnen wir mit $M(r)$. Sei weiterhin $n + M := \{n + m \mid m \in M\}$ für natürliche Zahlen n und Mengen M reeller Zahlen definiert. Dann ordnen wir einer Folge $(r_k)_{k=0}^{\infty}$ die Menge $M := \bigcup_{k=0}^{\infty} (k + M(r_k))$ zu. M ist eine Teilmenge der rationalen Zahlen und diese Zuordnung ist injektiv, da $M(r) \subset (0, 1)$ als einzigen Häufungspunkt r besitzt. Folglich gilt $c^{\aleph_0} = c$.

Folgerungen

Aus den obigen Betrachtungen folgt auch, dass eine Bijektion zwischen den reellen Zahlen und der Menge der Funktionen von den rationalen in die reellen Zahlen existiert. Da eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ einerseits bereits durch die Werte auf der dichten Teilmenge \mathbb{Q} eindeutig bestimmt ist, andererseits jede konstante Funktion stetig ist, hat die Menge $\{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ auch die Kardinalität c . Da \mathbb{Q}^m für positive ganze Zahlen m abzählbar ist und dicht in \mathbb{R}^m , welches auch die Kardinalität c besitzt, liegt, folgt, dass die Menge $\{f \mid f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ stetig}\}$ für positive ganze Zahlen m und n ebenfalls dieselbe Mächtigkeit wie die reellen Zahlen besitzt. Wenn wir ein weiteres Mal $c^{\aleph_0} = c$ benutzen, erhalten wir die Existenz einer Bijektion zwischen den reellen Zahlen und der Menge $\{(f_{m,n})_{m,n=1}^{\infty} \mid f_{m,n} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ stetig} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*\}$, was schon sehr beeindruckend ist.

Weitere Betrachtungsmöglichkeiten

Zum einen ist unser Beweis von $c^{\aleph_0} = c$ nicht konstruktiv und liefert keine Bijektion zwischen den Folgen reeller Zahlen und den reellen Zahlen. Außerdem benutzen wir das Auswahlaxiom und es stellt sich die Frage, ob $c^{\aleph_0} = c$ ohne Verwendung des Auswahlaxioms gezeigt werden kann.

Weiterhin wäre es interessant, inwieweit man allgemeine Aussagen über $|M^N|$ für (unendliche) Mengen M und N treffen kann. Ein ähnliches Argument wie oben zeigt zum Beispiel $(2^c)^{\aleph_0} = 2^c$: Eine Injektion von der Menge der Folgen von Teilmengen von $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ in die Teilmenge der reellen Zahlen wäre zum Beispiel die Zuordnung $(M_k)_{k=0}^{\infty} \mapsto \bigcup_{k=0}^{\infty} (k + M_k)$.

Dies führt zu der Vermutung, dass $\aleph_n^{\aleph_0} = \aleph_n$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt. Anhand dieser Vermutung wäre es interessant, ob man ganz allgemein $\aleph_m^{\aleph_n}$ für natürliche Zahlen m und n berechnen kann.