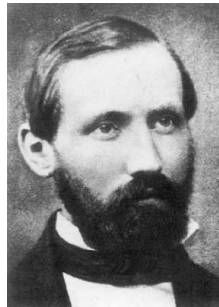


# Komplexe Analysis

Prof. Dr. Dirk Ferus

Sommersemester 2008



Version vom 11.08.2009



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Holomorphe Funktionen</b>	<b>6</b>
1.1	Die komplexen Zahlen . . . . .	6
1.2	Differenzierbarkeit . . . . .	7
1.3	Komplexe und reelle Differenzierbarkeit . . . . .	10
1.4	Konforme Abbildungen . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Möbiustransformationen</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>Integration</b>	<b>26</b>
3.1	Integration von 1-Formen . . . . .	26
3.2	Integration von 2-Formen, Satz von Stokes . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Cauchyscher Integralsatz</b>	<b>38</b>
4.1	Der Integralsatz . . . . .	38
4.2	Die Integralformel . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Anwendungen des Integralsatzes</b>	<b>44</b>
<b>6</b>	<b>Die Poissonformel und das Dirichlet-Problem im Kreis</b>	<b>57</b>
<b>7</b>	<b>Singularitäten</b>	<b>62</b>
7.1	Typen isolierter Singularitäten, meromorphe Funktionen . . . . .	62
7.2	Laurentreihen. Funktionsverlauf bei isolierten Singularitäten . . . . .	64
<b>8</b>	<b>Analytische Fortsetzung</b>	<b>72</b>
8.1	Analytische Fortsetzung längs Kurven . . . . .	72
8.2	Homotopie . . . . .	76
8.3	Die Garbe $\mathcal{O}_G$ . . . . .	84
<b>9</b>	<b>Umlaufzahl und Homologie</b>	<b>87</b>
<b>10</b>	<b>Residuensatz</b>	<b>93</b>
<b>11</b>	<b>Folgen holomorpher Funktionen</b>	<b>102</b>
11.1	Kompakte Konvergenz . . . . .	102
11.2	Unendliche Produkte . . . . .	106
<b>12</b>	<b>Partialbruchzerlegung und Produktdarstellung</b>	<b>110</b>
12.1	Partialbruchzerlegung des Cotangens . . . . .	110
12.2	Produktdarstellung des Sinus . . . . .	113
12.3	Die Gammafunktion . . . . .	114
12.4	Satz von Mittag-Leffler . . . . .	117
12.5	Weierstraßscher Produktsatz . . . . .	119

<b>13 Riemannscher Abbildungssatz</b>	<b>121</b>
<b>14 Elliptische Funktionen</b>	<b>124</b>
14.1 Periodische Funktionen und Periodengitter	124
14.2 Die Weierstraßsche $\wp$ -Funktion	128
14.3 Der Körper der elliptischen Funktionen	132
14.4 $\wp$ -Funktion und elliptische Integrale	134
14.5 $\wp$ -Funktion und Abbildungssatz	135
14.6 Die Module elliptischer Funktionen	136
<b>15 Der große Satz von Picard</b>	<b>137</b>
15.1 Eichfunktionen und innere Metrik	139
15.2 Krümmung	142
15.3 Die invariante Kobayashi-Pseudometrik	146
15.4 Der große Satz von Picard	149
<b>16 Anhang</b>	<b>150</b>
16.1 Cauchyscher Integralsatz für stetige Ketten	150
16.2 Fortsetzung, Homologie und Homotopie	153
16.3 Die Modulfunktion $\lambda$	157

## Literatur

Ganz kurz, ganz toll:

**K. Jänich:** Funktionentheorie, Springer-Lehrbuch, 3. Aufl. 1993

Klassiker:

**L. Ahlfors:** Complex Analysis, McGraw-Hill 1953

**H. Behnke/F. Sommer:** Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, Studienausgabe vom Nachdruck der 3. Auflage, Springer 1976

**E. Freitag/R. Busam:** Funktionentheorie 1, 4. Auflage, Springer 2006

**J. B. Conway:** Functions of One Complex Variable, 2. Auflage, Springer Graduate Text 2002 (Insbesondere zum Thema *Analytische Fortsetzung*)

Viele schöne Erklärungen:

**T. Needham:** Visual Complex Analysis, Clarendon Press, Oxford 1997

Skripten

**A. Bobenko:** Skriptum Komplexe Analysis SS 2005, über die Homepage von A. Bobenko

**D. Ferus:** Skripten zur Analysis und zur Topologie über meine Homepage  
<http://www.math.tu-berlin.de/ferus/>

Spezielle Themen

**R. Remmert:** Funktionentheorie II, Springer zum Riemannschen Abbildungssatz

**S. Kobayashi:** Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings, Marcel Dekker, 1970 und

**H. Grauert, H. Reckziegel:** Math. Z. 89 (1965), 108-125 zum Satz von Picard

Zur Geschichte der Komplexen Analysis

**F. Klein:** Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Reprint, Springer 1979

**Dieter Gaier:** Über die Entwicklung der Funktionentheorie in Deutschland von 1890 bis 1950, in: Ein Jahrhundert Mathematik 1890-1990. Festschrift zum Jubiläum der DMV Aus der Reihe: Dokumente zur Geschichte der Mathematik.

## Danksagung zur Vorlesung SS 2006

Diese Vorlesung hat mir ganz außerordentlich viel Spaß gemacht. Neben den wunderbaren Aspekten der *Komplexen Analysis* haben dazu vor allem das stete und lebendige Interesse der Hörerinnen und Hörer sowie die kundige und engagierte Begleitung von Stefan Born beigetragen. Den einen wie dem anderen sei herzlich dafür gedankt!

Im Sommer 2007 möchte ich außerdem Dario Götz und Jonas Schweiger ganz herzlich danken, die vor ihrer Prüfung das Skriptum gründlich durchgearbeitet und mir eine Liste mit über sechzig Fehlern geschickt haben. Zu meiner Ehrenrettung kann ich anführen, dass dabei kein substantieller Argumentationsfehler war. Trotzdem ...

Dirk Ferus



# 1 Holomorphe Funktionen

- Zwei Minuten Erinnerung an die komplexen Zahlen
- Komplexe Differentiation (Definition “wie in der Schule”)
- Elementare Beispiele, Potenzreihen sind komplex differenzierbar
- Zusammenhang zwischen komplexer und reeller Differenzierbarkeit
- Holomorphe Funktionen als Abbildungen: Konformität

## 1.1 Die komplexen Zahlen

Die komplexe Ebene  $\mathbb{C}$  sei der  $\mathbb{R}^2$  mit der üblichen  $\mathbb{R}$ -Vektorraumstruktur und der Multiplikation

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Damit wird  $\mathbb{C}$  bekanntlich zu einem Körper, der  $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$  als einen zu  $\mathbb{R}$  isomorphen Unterkörper enthält. Wir schreiben für reelles  $x$  statt  $(x, 0)$  einfach  $x$ . Weiter bezeichnen wir wie üblich die imaginäre Einheit mit

$$i := (0, 1)$$

und erhalten

$$(x, y) = x + iy \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

Die Projektionen von  $\mathbb{R}^2$  auf die beiden Faktoren heißen *Realteil* und den *Imaginärteil*

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} : (x, y) &\mapsto x, & \operatorname{Im} : (x, y) &\mapsto y \\ z &= \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z \quad \text{für } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Die Euklidische Norm  $\|(x, y)\| := \sqrt{x^2 + y^2}$  definiert eine *Topologie* auf  $\mathbb{C}$  und damit Begriffe wie *Umgebung*, *Konvergenz* oder *Stetigkeit*. Wir schreiben  $|\cdot|$  statt  $\|\cdot\|$ :

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Jeder Vektor  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  der Länge 1 hat eine Darstellung

$$(x, y) = (\cos \phi, \sin \phi)$$

mit einer Zahl  $\phi \in \mathbb{R}$ , die bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  eindeutig bestimmt ist. Daher besitzt jede Zahl  $z \in \mathbb{C}$  eine Darstellung

$$z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Die Zahl  $\phi \in \mathbb{R}$  heißt das *Argument* von  $z$ . Das Argument ist aber für  $z \neq 0$  nur bis auf ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  eindeutig – und für  $z = 0$  nach Geschmack beliebig oder nicht definiert.

Nach der Formel von Euler gilt für die komplexe Exponentialfunktion  $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ , also hat man eine Darstellung

$$z = |z|e^{i\phi}.$$

Wichtig ist noch die  $\mathbb{R}$ -lineare Konjugation

$$x + iy \mapsto \overline{x + iy} := x - iy.$$

Mit ihr gilt

$$|z|^2 = z\bar{z} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

## 1.2 Differenzierbarkeit

**Definition 1.** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  eine Abbildung und  $z_0 \in G$ . Dann heißt  $f$  in  $z_0$  (*komplex*) *differenzierbar*, wenn

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert.  $f'(z_0)$  heißt dann die *Ableitung* von  $f$  an der Stelle  $z_0$ .

Ist  $f$  in jedem Punkt von  $G$  differenzierbar, so heißt  $f$  *holomorph* oder (*komplex-*)*analytisch*.

Viele Rechenregeln für die Differentiation sehen im Komplexen genauso aus, wie im Reellen, und die Beweise sind wörtlich dieselben. Das betrifft insbesondere die Differentiation von Summen und Produkten sowie die Kettenregel. Deshalb sind zum Beispiel **Polynome**

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

differenzierbar mit der offensichtlichen Ableitung. Ebenso sind **rationale Funktionen**, also Quotienten von Polynomen auf dem Komplement der Nullstellen des Nenners holomorphe Funktionen, deren Ableitung man mit der Quotientenregel berechnen kann. Die holomorphen Funktionen auf einer festen offenen Menge  $G$  bilden einen Ring.

Allerdings gibt es für die komplexen Zahlen keine Anordnung, und auch der Mittelwertsatz gilt nicht. Man kann nur *Beträge* abschätzen. Manchmal muss man deshalb andere Beweise suchen, wie der Vergleich des folgenden Satzes mit dem Satz 268 aus meinem Skriptum *Analysis I* zeigt.

**Satz 2 (Potenzreihen).** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $0 < R \leq \infty$  und  $f : \{z \mid |z - z_0| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$  die dadurch definierte Funktion. Dann gilt

(i) Die Potenzreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$  hat denselben Konvergenzradius  $R$  und definiert deshalb eine Funktion  $g : \{z \mid |z - z_0| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$ .

(ii) Die Funktion  $f$  ist holomorph mit Ableitung  $g$ .

Kurz: Auch komplexe Potenzreihen darf man gliedweise differenzieren.

*Beweis.* Zu (i). Das geht genauso wie im Reellen.

Zu (ii). Überlegen Sie mit Hilfe der Kettenregel, dass man sich auf den Fall  $z_0 = 0$  beschränken kann. Das macht das folgende Argument übersichtlicher. Sei also

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Wir wollen zeigen: Ist  $z_1 \in \mathbb{C}$  mit  $|z_1| < R$ , so gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_1} \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} - g(z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left( \frac{z^k - z_1^k}{z - z_1} - k z_1^{k-1} \right) = 0. \quad (1)$$

Wir wählen dazu ein  $r$  mit  $|z_1| < r < R$ . Dann gilt für  $|z| < r$  (und nur solche  $z$  müssen wir für unseren Beweis berücksichtigen)

$$\begin{aligned} \left| \frac{z^k - z_1^k}{z - z_1} \right| &= |z^{k-1} + z^{k-2} z_1 + \dots + z z_1^{k-2} + z_1^{k-1}| \\ &\leq |z^{k-1}| + |z^{k-2} z_1| + \dots + |z z_1^{k-2}| + |z_1^{k-1}| \leq k r^{k-1} \end{aligned} \quad (2)$$

Die Reihe  $\sum_k k|a_k|r^{k-1}$  ist konvergent, daher gibt es zu gegebenem  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} k|a_k|r^{k-1} < \frac{\epsilon}{3}. \quad (3)$$

Nun gilt für  $|z| < r$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left( \frac{z^k - z_1^k}{z - z_1} - kz_1^{k-1} \right) \right| \\ & \leq \sum_{k=0}^N \left| a_k \left( \frac{z^k - z_1^k}{z - z_1} - kz_1^{k-1} \right) \right| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \left| \frac{z^k - z_1^k}{z - z_1} \right| + \sum_{k=N+1}^{\infty} k|a_k||z_1|^{k-1}. \\ & \stackrel{(2)}{\leq} \sum_{k=0}^N \left| a_k \left( \frac{z^k - z_1^k}{z - z_1} - kz_1^{k-1} \right) \right| + 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} k|a_k|r^{k-1}. \\ & \leq \sum_{k=0}^N \left| a_k \left( \frac{z^k - z_1^k}{z - z_1} - kz_1^{k-1} \right) \right| + 2\frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

Der erste Summand ist eine endliche Summe, deren Terme wegen der Ableitungsformel für  $z^k$  gegen Null gehen, wenn  $z \rightarrow z_1$ . Insgesamt gibt es also ein  $\delta > 0$  (mit  $\delta < r - |z_1|$ ), so dass

$$|z - z_1| < \delta \quad \implies \quad \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left( \frac{z^k - z_1^k}{z - z_1} - kz_1^{k-1} \right) \right| < \epsilon.$$

Daraus folgt die Behauptung (1). □

**Korollar 3 (Identitätssatz für Potenzreihen).** *Ist  $f$  durch eine konvergente Potenzreihe gegeben:*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

so gilt

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Insbesondere haben zwei Potenzreihen um  $z_0$  dieselben Koeffizienten, wenn sie auf einer Umgebung von  $z_0$  dieselbe Funktion bestimmen.

*Beweis.* Durch wiederholte Anwendung des letzten Satzes ergibt sich

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)a_k(z-z_0)^{k-m}$$

und

$$f^{(m)}(z_0) = m(m-1)\dots 1a_m. \quad \square$$

**Beispiel 4.** Hier sind bekannte auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorphe Funktionen:

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \\ \cos z &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, & \sin z &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \cosh z &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cos(iz), & \sinh z &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = -i \sin(iz). \end{aligned}$$

□

**Definition 5 (Ganze Funktionen).** Eine auf ganz  $\mathbb{C}$  definierte und holomorphe Funktion nennt man eine *ganze Funktion*.

**Beispiel 6 (Eine Warnung).** Nicht alle Sachverhalte lassen sich ins Komplexe übertragen: Der Abelsche Grenzwertsatz besagt, dass eine reelle Potenzreihe, die in einem Randpunkt des Konvergenzintervalls noch konvergiert, eine auch dort noch stetige Funktion definiert. Die offensichtliche Verallgemeinerung auf komplexe Potenzreihen ist falsch, vgl. Skriptum *Analysis I, Anhang 2*.

□

### 1.3 Komplexe und reelle Differenzierbarkeit

Die Definition der komplexen Ableitung kann man (so wie die der reellen) auch so interpretieren:  $f$  ist differenzierbar in  $z_0$ , wenn es sich bei  $z_0$  gut linear approximieren lässt, d.h. wenn es eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gibt, so dass

$$f(z) = f(z_0) + F(z - z_0) + \alpha(z) \text{ mit } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\alpha(z)}{z - z_0} = 0.$$

Aber eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung von  $\mathbb{C}$  in sich ist einfach die Multiplikation mit einer komplexen Zahl, eben  $f'(z_0)$ . Betrachtet man  $f$  nun als Abbildung vom  $\mathbb{R}^2$  in den  $\mathbb{R}^2$ , so ist die Definition der reellen Differenzierbarkeit in  $z_0$  genau dieselbe mit dem kleinen Unterschied, dass  $F$  nur  $\mathbb{R}$ -linear sein muss, nicht  $\mathbb{C}$ -linear – was ja eine stärkere Forderung ist. Jede komplex differenzierbare Funktion ist also auch differenzierbar als Abbildung des  $\mathbb{R}^2$  in sich.

Wie hängen  $\mathbb{R}$ -Linearität und  $\mathbb{C}$ -Linearität zusammen? Sei  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung. Aus der  $\mathbb{R}$ -Linearität folgt, dass  $F$  als Abbildung von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$  genau dann  $\mathbb{C}$ -linear ist, wenn

$$F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = F(i) = iF(1) = iF \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ist. Dann ist

$$F(x + iy) = xF(1) + iyF(1) = F(1)(x + iy),$$

$F$  wirkt also einfach durch Multiplikation mit der komplexen Zahl  $F(1)$ .

Ist  $F$  gegeben durch eine reelle  $2 \times 2$ -Matrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , so bedeutet die  $\mathbb{C}$ -Linearität

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix},$$

die Matrix von  $F$  ist also von der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Wir zerlegen nun eine Abbildung  $f : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$  in Real- und Imaginärteil, d.h. wir schreiben

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

für  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  und reellwertige Funktionen  $u$  und  $v$ . Die Funktionalmatrix von  $f$  ist dann gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir

**Satz 7 (Reelle und komplexe Differenzierbarkeit).**  $f$  ist in  $z_0 \in G$  genau dann komplex differenzierbar, wenn es reell differenzierbar ist und eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen gilt

(i) Das Differential  $d_{z_0}f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist komplex linear.

(ii) Es gelten in  $z_0$  die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

In diesem Fall ist

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Aus (i) dieses Satzes ergeben sich die Rechenregeln für die Differentiation komplexer Funktionen aus denen für Abbildungen des  $\mathbb{R}^2$ , die in der Analysis II bewiesen wurden.

**Beispiel 8.** Die Funktion  $f(z) := \bar{z}$  ist reell gegeben durch  $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ . Die Funktionalmatrix ist  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , also sind die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen nirgends erfüllt und  $f$  ist nicht holomorph.

Die Funktion  $g(z) := \bar{z}^2$  ist reell gegeben durch  $g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ -2xy \end{pmatrix}$ . Die Funktionalmatrix ist  $\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix}$ , also sind die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen nur für  $z = 0$  erfüllt. Nur in diesem Punkt ist  $g$  komplex differenzierbar, es ist nicht holomorph.

□

Eine reelle Funktion auf einem Intervall mit überall verschwindender Ableitung ist konstant. Das ist eine Folge aus dem Mittelwertsatz, der im Komplexen nicht gilt. Andererseits gibt es eine Verallgemeinerung des Konstanzkriteriums auf Funktionen mehrerer Variablen: Eine differenzierbare Funktion mit überall verschwindendem Differential auf einer offenen und *zusammenhängenden* Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist konstant. Weil aus der komplexen aber die reelle Differenzierbarkeit folgt, gilt

**Satz 9.** Ist  $f$  holomorph auf der offenen und zusammenhängenden Menge  $G \subset \mathbb{C}$  mit überall verschwindender Ableitung  $f'$ , so ist  $f$  konstant.

Offene und zusammenhängende Teilmengen von  $\mathbb{C}$  kommen in der komplexen Analysis ständig vor und verdienen deshalb einen abkürzenden Namen. Man nennt sie *Gebiete*. Wir werden der Einfachheit halber oft voraussetzen, dass die betrachteten Funktionen *holomorph auf einem Gebiet  $G$*  sind, auch wenn der Zusammenhang in der konkreten Situation vielleicht keine Rolle spielt.

**Korollar 10.** Ist  $f : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf dem Gebiet  $G$  und reellwertig, so ist  $f$  konstant.

*Beweis.* Wenn  $f = u + iv$  reellwertig ist, ist der Imaginärteil  $v = 0$  und nach den Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen sind die partiellen Ableitungen von  $u$  ebenfalls 0. Also ist  $f$  konstant. □

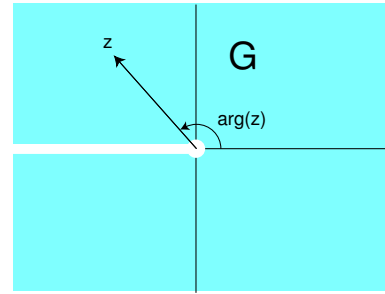
**Definition 11 (Argumentfunktion).** Im Komplement der abgeschlossenen negativen reellen Halbachse, also in

$$G := \{z = re^{i\phi} \mid r > 0, -\pi < \phi < \pi\} \quad (4)$$

definiert  $\arg(re^{i\phi}) := \phi$  eine wohlbestimmte differenzierbare Funktion

$$\arg : G \rightarrow ]-\pi, +\pi[,$$

die wir *Argumentfunktion* nennen wollen. Natürlich ist  $\arg$  keine analytische Funktion, vgl. das vorstehende Korollar.



Beachten Sie: Ohne Einschränkung auf den Bereich  $G$  ist das Argument einer komplexen Zahl nur bis auf ein Vielfaches von  $2\pi$  bestimmt. Legt man sich willkürlich etwa auf den Bereich  $]-\pi, +\pi]$  fest, so erhält man eine auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  definierte Funktion, die aber auf der negativen reellen Achse unstetig ist. Deshalb schränken wir uns auf das ‘‘Schlitzgebiet’’  $G$  ein.

Die Beschreibung dieser Funktionen durch Arcus-Funktionen auf dem gesamten Definitionsbereich ist nicht so ganz einfach. Zum Beispiel ist

$$\arg(x + iy) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{für } x > 0, \\ + \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } y > 0, \\ - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } y < 0, \end{cases}$$

Daraus folgt, dass  $\arg$  stetige partielle Ableitungen hat, nämlich

$$\frac{\partial \arg}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \arg}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (5)$$

insbesondere also reell differenzierbar ist.

Ist  $z = |z|e^{i\phi}$  in dem Schlitzgebiet  $G$  und  $-\pi < \phi < \pi$ , so folgt durch ‘‘Logarithmieren’’:

$$\log z = \log |z| + i\phi, \quad z \in G$$

wobei  $\log |z|$  den natürlichen Logarithmus bezeichnen soll. Für positives reelles  $z$  ist  $\phi = 0$ ,  $\log |z| = \log z$  und diese Gleichung folgt aus der Analysis I. Für komplexes  $z$  ist der Logarithmus aber bisher gar nicht erklärt, so dass ‘‘Logarithmieren’’ bisher sinnlos ist. Aber wir benutzen diese heuristische Überlegung zur Motivation für folgende

**Definition 12 (Komplexer Logarithmus).** Für  $z$  im Schlitzgebiet (4) definieren wir mit dem (reellen) natürlichen Logarithmus  $\ln$  den (*komplexen Hauptwert*)*logarithmus* durch

$$\log(z) := \ln |z| + i \arg(z). \quad (6)$$

Das ist also eine Funktion  $\log : G \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Beispiel 13.** Die Logarithmusfunktion ist holomorph. Sie ist nämlich reell stetig differenzierbar und wir prüfen die Cauchy-Riemannschen Gleichungen für  $u(x, y) = \ln r, v(x, y) = \arg$ , wobei  $r(z) := |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Mit (5) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \ln r}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{y}{r^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Daher ist  $\log z$  eine holomorphe Funktion auf  $G$  mit Ableitung

$$\log'(z) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}.$$

Es gilt

$$e^{\log(z)} = e^{\log|z|} e^{i \arg(z)} = |z| e^{i \arg(z)} = z.$$

□

**Harmonische Funktionen.** Wenn wir annehmen, dass die holomorphe Funktion  $f = u + iv$  reell sogar zweimal differenzierbar ist<sup>1</sup>, so folgt aus den Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen nach dem Satz von Schwarz

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial \frac{\partial v}{\partial y}}{\partial x} + \frac{\partial(-\frac{\partial v}{\partial x})}{\partial y} = 0$$

und ebenso  $\Delta v = 0$ . Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind also sogenannte *harmonische Funktionen*, zweimal differenzierbare Funktionen, deren Laplacesche verschwindet.

Ist  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$  eine harmonische Funktion, so kann man umgekehrt fragen, ob es eine Funktion  $v : G \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, für die

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{7}$$

ist. In diesem Fall wäre  $f := u + iv$  holomorph. In der Analysis lernt man, dass die notwendige Bedingung, nämlich

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

die bei harmonischem  $u$  ja erfüllt ist, auf zum  $\mathbb{R}^2$  diffeomorphen Gebieten (insbesondere also lokal) auch hinreichend ist (Poincarésches Lemma). Zum Beispiel dann, wenn  $G$  eine offene Kreisscheibe oder das Schlitzgebiet aus vorstehendem Beispiel ist. Auf solchem  $G$  ist jede harmonische Funktion der Realteil einer holomorphen Funktion.

**Beispiel 14.** Die Funktion  $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  ist auf  $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$  harmonisch, wie man direkt nachrechnen kann. Also gibt es auf dem Schlitzgebiet eine harmonische Funktion  $v$ , so dass  $f = u + iv$  holomorph ist.  $v$  ist durch (7) charakterisiert, also durch

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Das legt  $v$  natürlich nur bis auf eine additive Konstante fest. Wählen wir diese so, dass  $v(1, 0) = 0$ , so erhalten wir  $v = \arg$ .

□

Harmonische Funktionen sind wegen  $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u$  gerade die Potentiale von Divergenz- oder quellfreien Vektorfeldern und spielen daher in der Potentialtheorie eine wichtige Rolle. Die Funktionentheorie ist deshalb ein wichtiges Hilfsmittel der zweidimensionalen Potentialtheorie.

<sup>1</sup> Wir werden später sehen, dass das immer der Fall ist!

Wir vermerken noch:

**Satz 15.** *Ist  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $h : f(G) \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch, so ist  $h \circ f$  ebenfalls harmonisch: Harmonische Funktionen von holomorphen Funktionen sind harmonisch.*

*Beweis.* Auf einer offenen Umgebung von  $f(z_0)$  ist  $h$  der Realteil einer holomorphen Funktion  $H$  und nach der Kettenregel ist  $H \circ f$  holomorph auf einer Umgebung von  $z_0$ . Also ist  $h \circ f$  als Realteil einer holomorphen Funktion auf einer Umgebung von  $z_0$  harmonisch.  $\square$

## 1.4 Konforme Abbildungen

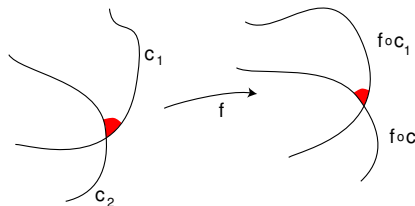
Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph im Gebiet  $G$  und sei  $c : [a, b] \rightarrow G$  eine differenzierbare Kurve. Dann ist  $f \circ c$  die Bildkurve unter  $f$ , und für den Tangentialvektor an diese gilt nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}(f \circ c)(t) = f'(c(t))\dot{c}(t).$$

Ist  $f'(c(t)) = re^{i\phi} \neq 0$ , so wird der Tangentialvektor von  $c$  durch  $f$  also um den Faktor  $r$  gestreckt und um den Winkel  $\phi$  gedreht. Die Tangentialvektoren zweier Kurven  $c_1, c_2$ , die sich in einem Punkt

$$c_1(t_1) = c_2(t_2)$$

schneiden, werden unter  $f$  um denselben Winkel  $\phi$  gedreht: Der Schnittwinkel  $\angle(\dot{c}_1(t_1), \dot{c}_2(t_2))$  der Kurven bleibt unter  $f$  erhalten. Man nennt diese Eigenschaft *Konformität*.



**Satz 16.** *Holomorphe Abbildungen ohne Nullstellen der Ableitung sind konforme Abbildungen.*

**Beispiel 17.** Die holomorphe Abbildung  $f(z) = z^2$  bildet die Gerade  $c : t \mapsto te^{i\phi}$  durch den Nullpunkt in die Gerade  $f \circ c : t \mapsto t^2e^{2i\phi}$  ab, der Schnittwinkel der Geraden mit der reellen Achse verdoppelt sich also. Warum ist das kein Widerspruch zum Satz?

□

Die vorstehende Satz gestattet eine Umkehrung. Ist  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine winkeltreue  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung, so ist insbesondere für alle  $z \in \mathbb{R}^2$

$$\langle F(z), F(iz) \rangle = 0$$

und deshalb

$$\langle F(1), F(i) \rangle = 0 \text{ und } \langle F(1+i), F(-1+i) \rangle = 0.$$

Daraus folgt weiter

$$0 = -\langle F(1), F(1) \rangle + \langle F(i), F(i) \rangle = |F(i)|^2 - |F(1)|^2,$$

so dass also  $F(1)$  und  $F(i)$  von gleicher Länge sind und senkrecht aufeinander stehen. Deshalb ist  $F(i) = \pm iF(1)$ . Das Vorzeichen wird bestimmt durch das Orientierungsverhalten von  $F$ , denn

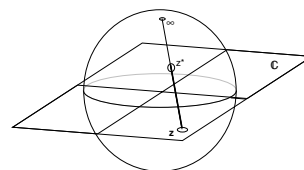
$$\det(F(1), F(i)) = \det(F(1), \pm iF(1)) = \pm \underbrace{\det(F(1), iF(1))}_{>0}.$$

Ist  $F$  also auch noch orientierungstreu, so ist  $F$  komplex linear. Damit folgt:

**Satz 18.** *Eine reell differenzierbare Abbildung  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  eines Gebiets  $G \subset \mathbb{C}$  mit überall winkel- und orientierungstreuer Ableitung ist holomorph.*

Daher hängt die Theorie konformer Abbildungen von  $\mathbb{C}$  in sich eng mit der komplexen Analysis zusammen.

Konforme Abbildungen sind besonders interessant. Zum Beispiel kann man zeigen, dass es keine längentreue Abbildung der Kugelfläche in die Ebene gibt, was offenbar ein angeborenes Handicap der Kartographie darstellt. Aber es gibt immerhin noch konforme Abbildungen, zum Beispiel die stereographische Projektion.



Eine intensiv studierte Frage ist deshalb die, welche Gebiete der Ebene sich auf welche konform (und bijektiv) abbilden lassen. Wir lernen dazu später den Riemanschen Abbildungssatz kennen.

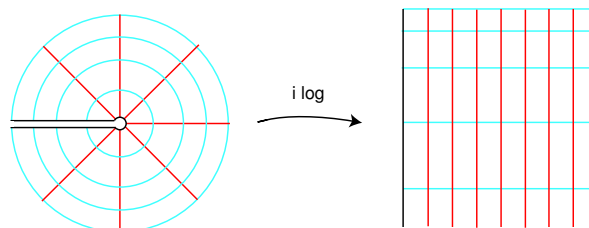
**Bemerkung: Die Riemannsche Zahlenkugel.** Die oben skizzierte Abbildung

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{1-\zeta}(\xi + i\eta)$$

kann man benutzen, um die komplexe Ebene mit der im “Nordpol” punktierten Einheitskugel  $\Sigma$  zu identifizieren. Mit dieser Identifikation kann man Abbildungen in die komplexe Ebene auch deuten als Abbildungen in die Sphäre, und dadurch zum Beispiel der Aussage  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$  eine anschauliche Bedeutung gegeben: In der Sphäre ist der Grenzwert eben der “Nordpol”. Die volle Sphäre entspricht dann also der um einen Punkt  $\infty$  ergänzten komplexen Ebene  $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Das eine wie das andere bezeichnet man dann auch als die *Riemannsche Zahlenkugel*. Diese Erweiterung der komplexen Ebene ist ein in der komplexen Analysis häufig verwendetes Modell, wie Sie im nächsten Abschnitt schon sehen werden.

Neben der Anschaulichkeit des Kugelmodells ist ein weiterer Vorteil gegenüber der einfach mengentheoretisch gebildeten Vereinigung  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , dass man auf der erweiterten Ebene nicht erst eine Topologie erklären muss: Die ist auf der Sphäre seit *Analysis II* bereits vorhanden.

Die stereographische Projektion bildet das Netz der Längen- und Breitenkreise auf der Sphäre (= Erdoberfläche) winkeltreu ab auf das ebene Netz der Strahlen aus dem Ursprung und der Kreise um den Ursprung. Schlitzt man die Ebene längs der negativen reellen Achse auf und wendet darauf den komplexen Logarithmus oder besser die Abbildung  $z \mapsto i \log(z)$  an, so wird das Netz wiederum winkeltreu(!) abgebildet auf ein Netz orthogonaler Geraden.



Die Komposition der stereographischen Projektion mit  $i \log$  ist der für Seekarten verwendete Mercator<sup>2</sup>-Entwurf der Kartographie. (Konstante Kompass-Weisung = Gerade auf der Karte = Loxodrome).

<sup>2</sup> Nach dem Kartographen Gerhard Mercator (1512-1594), nicht zu verwechseln mit dem Entdecker der  $\ln(1+x)$ -Reihe Nikolaus Mercator (1620-1687).

## 2 Möbiustransformationen

- Eine Klasse einfacher, aber interessanter Funktionen=Abbildungen
- Die Riemannsche Zahlenkugel
- Möbiustransformationen sind kreistreu
- Die 6-Punkteformel
- Das Doppelverhältnis als Möbiusinvariante

Wenn man komplexe Funktionen geometrisch als Abbildungen der komplexen Ebene in sich untersucht, bilden die holomorphen Funktionen der Gestalt

$$f(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

mit  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ , die sogenannten gebrochen-linearen Abbildungen, eine interessante Klasse. Diese Funktionen sind einerseits so einfach, dass man sie gut “verstehen” kann, andererseits gibt es aber genug von ihnen, um interessante Dinge damit zu machen.

Falls  $ad = bc$  und  $d \neq 0$ , ist

$$f(z) = \frac{adz + bd}{d(cz + d)} = \frac{bcz + bd}{d(cz + d)} = \frac{b}{d},$$

also  $f$  konstant. Das gilt auch, wenn  $ad = bc$  und  $c \neq 0$ , also immer, wenn  $ad = bc$  und der Nenner nicht 0 ist. Wir schließen diesen Fall aus und definieren

**Definition 19 (Möbiustransformationen).** Eine *Möbiustransformation* der komplexen Ebene ist eine Funktion der Form

$$f(z) := \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } ad - bc \neq 0. \quad (8)$$

Beachten Sie, dass Multiplikation von  $a, b, c, d$  mit einem gemeinsamen Faktor  $\neq 0$  dieselbe Möbiustransformation liefert, so dass man sich auf den Fall  $ad - bc = 1$  beschränken kann (aber nicht muss). Die Möbiustransformationen hängen von 3 komplexen Parametern ab.

Unter “Transformationen” versteht man gemeinhin bijektive Abbildungen, und tatsächlich erhält man durch Auflösen von  $w = \frac{az+b}{cz+d}$  nach  $z$  die Umkehrabbildung:

**Satz 20 (Umkehrtransformation).** Die Möbiustransformation (8) ist injektiv und die Umkehrabbildung ist

$$f^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a},$$

also wieder eine Möbiustransformation.

Etwas unbefriedigend ist, dass (8) für  $cz + d = 0$ , also für  $z = -\frac{d}{c}$  nicht definiert ist. Hier erweist sich die am Ende des letzten Abschnitts erklärte Erweiterung der komplexen Ebene durch ein Punkt  $\infty$  zur Riemannschen Zahlenkugel

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

als hilfreich. Erweitert man die Möbiustransformation (8) zu einer (wieder mit  $f$  bezeichneten) Abbildung  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , indem man

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty, \quad f(\infty) := \frac{a + \frac{b}{\infty}}{c + \frac{d}{\infty}} := \frac{a}{c}$$

setzt, so wird das eine bijektive Abbildung von  $\hat{\mathbb{C}}$  in sich, und der letzte Satz liefert die Umkehrabbildung.

**Satz 21.** Die Möbiustransformationen bilden eine Untergruppe der Gruppe der Bijektionen von  $\hat{\mathbb{C}}$  auf sich.

*Beweis.* Dafür muss man nur noch zeigen, dass die Komposition von zwei Möbiustransformationen wieder eine solche ist. Ist

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

so findet man

$$f \circ g = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}.$$

Es ist klar, dass  $f \circ g$  nicht konstant ist. □

Der Beweis zeigt mehr als der Satz behauptet, nämlich dass

$$\Phi : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

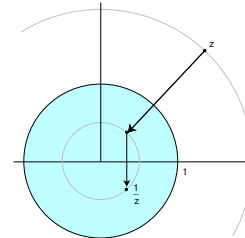
ein Homomorphismus der Gruppe  $SL(2, \mathbb{C})$ , der Gruppe der komplexen  $2 \times 2$ -Matrizen mit Determinante 1, auf die Gruppe der Möbiustransformationen ist. Der Kern ist  $\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

Wir gehen darauf nicht näher ein, halten nur fest, dass man die Koeffizienten der Komposition zweier Möbiustransformationen einfach durch Matrizenmultiplikation finden kann.

**Beispiel 22 (Inversion).** Die Möbiustransformation  $f(z) = \frac{1}{z}$  (also  $a = d = 0, b = c = 1$ ) heißt die *Inversion am Einheitskreis*. Es ist

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} : z \mapsto \frac{z}{|z|^2} \mapsto \overline{\left( \frac{z}{|z|^2} \right)}$$

Erst wird also die Länge von  $z$  auf das Reziproke gestaucht bzw. gestreckt und danach das Ergebnis an der reellen Achse gespiegelt. Der Punkt  $\infty$  geht nach 0 und umgekehrt.



**Achtung.** In der Geometrie betrachtet man die *Spiegelung* (auch *Inversion*) an einem Kreis. Speziell für den Einheitskreis ist das die Abbildung  $z \mapsto \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$ , also der Vektor in Richtung  $z$  mit reziproker Länge – ohne die nachfolgende Spiegelung an der reellen Achse. Diese Abbildung ist geometrisch noch einfacher als die Abbildung  $z \mapsto \frac{1}{z}$ , hat aber für die Analysis den Nachteil, nicht holomorph zu sein.

Für spätere Verwendung wollen wir eine besondere Eigenschaft der Inversion festhalten: Sie bildet Kreise in Kreise ab. Der Kreis um  $a$  vom Radius  $r$  erfüllt die Gleichung

$$r^2 = |z - a|^2 = (z - a)\overline{(z - a)} = z\bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} + a\bar{a}$$

Die Bildwerte  $w = \frac{1}{z}$  erfüllen dann  $r^2 = \frac{1}{w\bar{w}} - \frac{\bar{a}}{w} - \frac{a}{\bar{w}} + a\bar{a}$  oder

$$r^2 - a\bar{a} = \frac{1 - \bar{a}\bar{w} - aw}{w\bar{w}}.$$

Wir nehmen zunächst an, dass der Kreis nicht durch 0 geht, d.h. dass  $r^2 - a\bar{a} \neq 0$  ist. Dann folgt

$$w\bar{w} - \bar{b}w - b\bar{w} + b\bar{b} = \frac{r^2}{(r^2 - a\bar{a})^2} \text{ mit } b = \frac{\bar{a}}{a\bar{a} - r^2},$$

und das ist wieder eine Kreisgleichung. Erfüllt  $w$  diese Gleichung, so erfüllt  $z = \frac{1}{w}$  die Ausgangsgleichung, so dass das Bild des Kreises wieder ein ganzer Kreis ist.

Was passiert, wenn  $r^2 = |a|^2 > 0$  ist. Dann erhält man

$$1 - \bar{a}\bar{w} - aw = 0$$

Die linke Seite ist reell, und wenn man die Gleichung mit  $a = \alpha + i\beta, w = x + iy$  reell ausschreibt, erhält man

$$2\alpha x - 2\beta y = 1.$$

Das ist eine Gerade, die nicht durch den Ursprung geht. Und jede solche Gerade kann man auf diese Weise erhalten, nämlich aus dem Kreis um  $a = \alpha + i\beta$  mit Radius  $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ . Geraden durch den Ursprung werden bei der Inversion einfach an der reellen Achse gespiegelt, gehen also in wieder in Ursprungsgeraden über. Und weil die Inversion ihr eigenes Inverses ist, bildet sie umgekehrt alle Geraden in Geraden oder Kreise ab.

Es ist deshalb praktisch, auch Geraden als Kreise (durch  $\infty$ ) zu deklarieren, und nur dann stimmt die oben gemachte Behauptung, dass die Inversion Kreise in Kreise abbildet.

Unter der stereographischen Projektion entsprechen übrigens Geraden und Kreise gleichermaßen Kreisen auf der Kugelfläche: solchen die durch den Nordpol gehen, und solchen, die das nicht tun.

Beachten Sie: Der Mittelpunkt eines Kreises gehen bei der Inversion i.a. *nicht* in den Mittelpunkt des Bildkreises über!

□

**Lemma 23.** Eine Möbiustransformation  $f$  ist durch die Werte  $f(0), f(1), f(\infty)$  eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Ist  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , so ist

$$f(0) = \frac{b}{d}, \quad f(1) = \frac{a+b}{c+d}, \quad f(\infty) = \frac{a}{c}.$$

1. Fall:  $c = 0$ . Dann ist nach Definition der Möbiustransformation  $d \neq 0$ . Wir erhalten

$$f(1) = \frac{a}{d} + \frac{b}{d}$$

und

$$f(z) = (f(1) - f(0))z + f(0).$$

2. Fall:  $d = 0$ . Dann ist  $c \neq 0$ ,

$$f(1) = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

und

$$f(z) = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \frac{1}{z} = f(\infty) + (f(1) - f(\infty)) \frac{1}{z}.$$

3. Fall:  $c \neq 0 \neq d$ . Dann ist

$$f(z) = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{f(\infty)z + f(0)\frac{d}{c}}{z + \frac{d}{c}}$$

und

$$f(1) = \frac{f(\infty) + f(0)\frac{d}{c}}{1 + \frac{d}{c}}.$$

Aber die rechte Seite kann man lesen als eine Möbiustransformation angewendet auf  $\frac{d}{c}$  (beachte  $f(0) - f(\infty) \neq 0$ ), und wegen der Injektivität ist dann  $\frac{d}{c}$  durch deren Wert  $f(1)$  bestimmt.

□

**Satz 24 (6-Punkte-Satz).** Sind  $(z_1, z_2, z_3)$  und  $(w_1, w_2, w_3)$  zwei Tripel paarweise verschiedener Punkte, so gibt es genau eine Möbiustransformation  $f$  mit  $f(z_k) = w_k$  für  $k = 1, 2, 3$ . Diese erhält man durch Auflösen der "6-Punkte-Formel" nach  $w$ :

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w_1 - w_2)(w_3 - w)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z)} \quad (9)$$

*Beweis.* Die rechte Seite von (9) ist eine gebrochen-lineare Abbildung,  $R(z)$  mit

$$R(z_1) = 0, \quad R(z_2) = 1, \quad R(z_3) = \infty,$$

insbesondere also nicht konstant und damit eine Möbiustransformation. Entsprechendes gilt für die linke Seite  $L(w)$ , und daher ist

$$f = L^{-1} \circ R$$

eine Möbiustransformation mit  $f(z_k) = w_k$ . Damit ist die Existenz gezeigt. Die Möbiustransformation  $f \circ R^{-1}$  bildet dann  $0, 1, \infty$  auf  $(w_1, w_2, w_3)$  ab und ist nach dem Lemma eindeutig bestimmt. Daraus folgt die Eindeutigkeit von  $f$ . □

**Bemerkung.** Ist einer  $z$ - und oder  $w$ -Werte  $\infty$ , so kürzt man diesen heraus, und die Formel (9) gilt immer noch. Zum Beispiel für  $w_3 = \infty$  erhält man auf der linken Seite

$$\frac{(w - w_1)\left(\frac{w_2}{w_3} - 1\right)}{(w_1 - w_2)\left(1 - \frac{w}{w_3}\right)} = \frac{(w - w_1)(0 - 1)}{(w_1 - w_2)(1 - 0)} = \frac{w - w_1}{w_2 - w_1}. \quad (10)$$

**Lemma 25.** Jede Möbiustransformation ist Komposition  $f = f_1 \circ \dots \circ f_6$  von Möbiustransformationen  $f_k$  der folgenden einfachen Formen

$$\begin{aligned} z &\mapsto z + b && (\text{Translation}), \\ z &\mapsto az && (\text{Drehstreckung mit } a \neq 0), \\ z &\mapsto \frac{1}{z} && (\text{Inversion}). \end{aligned}$$

*Beweis.* Wir betrachten den Fall  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  mit  $d \neq 0$ . Den Fall  $d = 0$  überlasse ich Ihnen. Betrachten Sie folgende Kompositionen:

$$\begin{aligned} z &\mapsto \frac{1}{z} \mapsto d \frac{1}{z} = \frac{d}{z} \mapsto \frac{d}{z} + c = \frac{cz+d}{z} \mapsto \frac{z}{cz+d} \\ &\mapsto \frac{1}{d} (ad-bc) \frac{z}{cz+d} = \frac{az - \frac{bc}{d}z}{cz+d} \mapsto \frac{az - \frac{bc}{d}z}{cz+d} + \frac{b}{d} = \frac{az+b}{cz+d}. \end{aligned}$$

□

Weil Translationen und Drehstreckungen offenbar Kreise und Geraden in Kreise und Geraden abbilden, folgt zusammen mit dem Beispiel 22, wenn wir wieder Geraden auch als Kreise betrachten,

**Satz 26 (Kreistreue).** *Möbiustransformationen bilden Kreise in Kreise ab.*

**Bemerkung.** Das Komplement  $\mathbb{C} \setminus K$  eines Kreises oder einer Geraden besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten, die durch die (stetige!) Möbiustransformation  $f$  auf zusammenhängende Mengen, also wegen der Bijektivität jeweils auf eine der Zusammenhangskomponenten von  $f(K)$  abgebildet werden. Welche Komponente auf welche abgebildet wird, testet man leicht durch Wahl eines Punktes und Berechnung seines Bildes. Oder man bemerkt folgendes: Versieht man den Kreis mit einem Durchlaufungssinn durch Wahl einer Parametrisierung  $c : [0, 2\pi] \rightarrow K$  mit  $|\dot{c}| > 0$ , so liegt  $c(t) + \epsilon i \dot{c}(t)$  für kleine  $\epsilon$  in einer der beiden Zusammenhangskomponenten, der “linken Seite” des Kreises. Wegen der Konformität von  $f$  liegt dann  $f(c(t)) + \epsilon D_{c(t)} f(i \dot{c}(t)) = f(c(t)) + \epsilon i D_{c(t)} f(\dot{c}(t))$  auf der linken Seite der mit  $f \circ c$  parametrisierten Bildkurve. Die Möbiustransformation ist also (wie jede holomorphe Transformation) *orientierungstreu*.

**Beispiel 27.** Bei der graphischen Darstellung physikalischer Größen mit großer Variation der Werte sind logarithmische Skalen hilfreich. Einen anderen Weg geht man in der Hochfrequenztechnik, wo es um die Darstellung komplexer Widerstände  $Z = R + iX$  mit  $R > 0$  geht. Die Werte von  $Z$  liegen also in der rechten Halbebene und variieren stark. Zur graphischen Darstellung benutzt man eine Möbiustransformation, die die rechte Halbebene in den Einheitskreis transformiert. Um eine solche zu finden, gibt man für 3 Punkte auf dem Rand der rechten Halbebene, also auf der imaginären Achse, ihre Werte auf dem Einheitskreis vor:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{b}{d} = -1 \\ f(i) &= \frac{ai+b}{ci+d} = i \\ f(-i) &= \frac{-ai+b}{-ci+d} = -i \end{aligned}$$

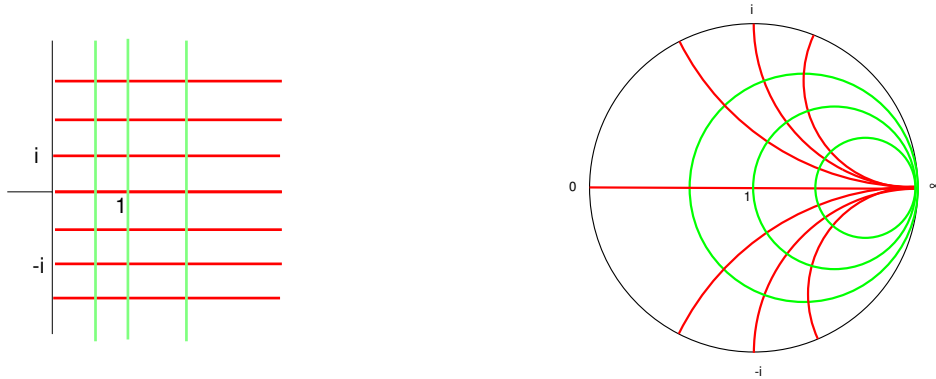
Auflösen des linearen Gleichungssystems für  $a, b, c, d$  liefert

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

Diese Transformation bildet also die imaginäre Achse auf einen Kreis durch  $-1, i, -i$ , also auf den Rand des Einheitskreises ab. Nach der obigen Bemerkung geht die rechte Halbebene dabei in das Innere des Einheitskreises über.

Die Transformation erhält wesentliche Strukturen. Die reelle Achse geht offenbar in sich über. Die Geraden von konstantem Wirkwiderstand  $R$  sind Geraden senkrecht zur reellen Achse und gehen deshalb in Kreise durch  $f(\infty) = 1$  über, die die reelle Achse senkrecht

schneiden, während die Geraden konstanten Blindwiderstands, also die Geraden senkrecht zur imaginären Achse, in Kreise durch  $f(\infty) = 1$  übergehen, die den Einheitskreis senkrecht schneiden.



Das hier erklärte Einheitskreis-Diagramm läuft in der Hochfrequenztechnik unter dem Namen *Smith-Diagramm*. □

**Beispiel 28.** Welche Möbiustransformationen bilden die obere Halbebene

$$\mathbb{H} := \{z \mid \text{Im } z > 0\}$$

auf sich ab? Jede solche Transformation bildet die reelle Achse auf sich ab. Also sind zum Beispiel  $f(-1), f(0), f(1)$  reell, und die aus der 6-Punkte-Formel bestimmten Koeffizienten von  $f$  sind ebenfalls reell. Hat man umgekehrt eine Möbiustransformation mit reellen  $a, b, c, d$ , so geht die reelle Achse in sich über und es ist

$$f(i) = \frac{ai + b}{ci + d} = \frac{1}{c^2 + d^2} (ai + b)(d - ic) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{ad - bc}{c^2 + d^2}.$$

Die obere Halbebene genau dann geht in sich über, wenn  $\text{Im } f(i) > 0$ , d.h wenn  $ad - bc > 0$ . Nach Normierung von  $ad - bc$  erhält man also:

Die Möbiustransformationen, die die obere Halbebene auf sich abbilden, sind genau die Transformationen mit  $ad - bc = 1$ , für die  $a, b, c, d$  sämtlich reell sind. □

Es ist offensichtlich, dass Möbiustransformationen ein gutes Hilfsmittel zum Studium von Kreisen in der Ebene sind. Ein fundamentales Problem dabei ist die Entscheidung, ob vier vorgegebene paarweise verschiedene Punkte  $z_1, z_2, z_3, z_4$  der Ebene auf einem Kreis liegen. Die Möbiustransformationen liefern dafür ein bequemes Kriterium.  $f(z) = \frac{(z - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z)}$  bildet  $z_2, z_3, z_4$  auf  $0, 1, \infty$  ab, also den durch die drei Punkte eindeutig bestimmten Kreis  $K$  auf die reelle Achse. Der Punkt  $z_1$  liegt genau dann auf  $K$ , wenn  $f(z_1)$  auch auf der reellen Achse liegt. Wir erhalten

**Satz 29 (und Definition: Doppelverhältnis).** Die vier paarweise verschiedenen Punkte  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$  liegen genau dann auf einem Kreis, wenn

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)}$$

reell ist. Die Zahl  $DV(z_1, z_2, z_3, z_4)$  heißt das Doppelverhältnis der vier Punkte.

Aus der 6-Punkte-Formel folgt unmittelbar die Invarianz des Doppelverhältnisses unter Möbiustransformationen

**Satz 30.** Für je vier paarweise verschieden Punkte  $z_1, z_2, z_3, z_4$  und für jede Möbiustransformation  $f$  gilt

$$DV(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = DV(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

**Satz 31.** Die Möbiustransformationen, welche die Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

bijektiv auf sich abbilden, sind genau die Transformationen der Form

$$f(z) = e^{i\phi} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \quad (11)$$

mit  $|z_0| < 1$  und  $\phi \in \mathbb{R}$ . Für diese gilt

$$|f'(z)| = \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} = \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}. \quad (12)$$

*Beweis.* Für jede Transformation der Form (11) und  $|z| = 1$  gilt

$$|f(z)|^2 = \frac{z\bar{z} - (z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0) + z_0\bar{z}_0}{1 - (z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0) + z_0\bar{z}_0 z\bar{z}} = 1.$$

Also bildet  $f$  den Rand des Einheitskreises auf sich und wegen  $f(z_0) = 0$  auch das Innere von  $\mathbb{D}$  auf sich ab.

Um zu sehen, dass umgekehrt jede Möbiustransformation  $f = \frac{az+b}{cz+d}$  mit  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ , von der angegebenen Form ist, betrachten wir die Transformation

$$g(z) = \frac{iz + 1}{iz - 1} = \frac{-iz - 1}{-iz + 1}.$$

Das ist die Abbildung  $z \mapsto -iz$  komponiert mit der Möbiustransformation aus Beispiel 27, bildet also die obere Halbebene  $\mathbb{H}$  auf den Einheitskreis  $\mathbb{D}$  ab. Die Inverse ist gegeben durch

$$g^{-1}(w) = \frac{w + 1}{iw - i}.$$

Die Möbiustransformation

$$h := g^{-1} \circ f \circ g$$

bildet dann die obere Halbebene auf sich ab, ist also nach dem Beispiel von der Form  $h(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  mit  $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$  ist. Wir finden

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\gamma - \beta) + i(\alpha + \delta) & (\beta + \gamma) + i(\alpha - \delta) \\ -(\beta + \gamma) + i(\alpha - \delta) & -(\gamma - \beta) + i(\alpha + \delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & -\bar{a} \end{pmatrix}$$

und damit

$$f(z) = \frac{az + b}{-\bar{b}z - \bar{a}}.$$

Wäre  $a = 0$ , so  $f(0) = \infty$  im Widerspruch zu  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ . Mit  $z_0 := -\frac{b}{a}$  erhalten wir

$$f(z) = \frac{a}{-\bar{a}} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}.$$

Ist  $a = |a|e^{i\psi}$ , so ist  $-\frac{a}{\bar{a}} = e^{i(2\psi+\pi)} =: e^{i\phi}$ , und weil  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ , ist  $z_0 = f^{-1}(0) \in \mathbb{D}$ . (Berechnet man  $|z_0| = |b/a|$  direkt, so braucht man  $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$  um  $|z_0| < 1$  zu zeigen.)

Die zweite Aussage des Satzes rechnet man einfach nach:

$$\begin{aligned} \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2} &= \frac{1 - \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z} \frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{1-\bar{z}_0 \bar{z}}}{1 - |z|^2} = \frac{1 - \bar{z}_0 z - z_0 \bar{z} + |z_0|^2 |z|^2 - |z|^2 - |z_0|^2 + z_0 \bar{z} + \bar{z}_0 z}{|1 - \bar{z}_0 z|^2 (1 - |z|^2)} \\ &= \frac{(1 - |z|^2)(1 - |z_0|^2)}{|1 - \bar{z}_0 z|^2 (1 - |z|^2)} = \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - \bar{z}_0 z|^2} \end{aligned}$$

und

$$f'(z) = e^{i\phi} \frac{1 - \bar{z}_0 z + (z - z_0)\bar{z}_0}{(1 - \bar{z}_0 z)^2} = e^{i\phi} \frac{1 - |z_0|^2}{(1 - \bar{z}_0 z)^2}.$$

□

**Beispiel 32.** In diesem Beispiel wollen wir zeigen, dass es zu zwei disjunkten Kreisen immer eine Möbiustransformation gibt, die diese Kreise auf ein Paar konzentrischer Kreise abbildet. Durch Translation und Streckung, also durch Möbiustransformationen, können wir erreichen, dass der erste Kreis der Einheitskreis ist. Ohne Einschränkung liegt der zweite Kreis  $K$  im Inneren des Einheitskreises, sonst wenden wir eine Inversion an. Nach einer geeigneten Drehung liegt der Mittelpunkt  $a$  von  $K$  auf der nicht-negativen reellen Achse, schneidet diese also senkrecht. Ist  $a = 0$ , sind wir fertig, also o.E.  $0 < a < 1$  und für den Radius  $r$  von  $K$  gilt  $0 < r < 1 - a$ . Die Möbiustransformationen

$$f(z) = \frac{z - t}{1 - tz} \text{ mit } t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$$

bilden die Einheitskreislinie und die reelle Achse jeweils auf sich und  $K$  auf einen Kreis  $f(K)$  ab, der die reelle Achse senkrecht schneidet in den Punkten  $f(a - r)$  und  $f(a + r)$ . Wir berechnen den Mittelpunkt von  $f(K)$  für den Fall dass  $f(K)$  wirklich ein Kreis, also  $1 - t(a \pm r) \neq 0$  ist.

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(a - r) + f(a + r)}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{(a - r) - t}{1 - t(a - r)} + \frac{(a + r) - t}{1 - t(a + r)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(a - r - t)(1 - t(a + r)) + (a + r - t)(1 - t(a - r))}{\text{Nenner}} \\ &= \frac{at^2 - (a^2 - r^2 + 1)t + a}{\text{Nenner}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Gibt es ein  $t$  mit  $1 - t(a \pm r) \neq 0$ , für das  $m = 0$  ist?

Die quadratische Gleichung  $at^2 - (a^2 - r^2 + 1)t + a = 0$  hat die Diskriminante

$$\frac{1}{4a^2} ((a^2 - r^2 + 1)^2 - 4a^2).$$

Aus  $0 < r < 1 - a$  folgt aber durch Quadrieren

$$a^2 - r^2 + 1 > 2a, \tag{14}$$

und die Diskriminante ist  $> 0$ . Damit hat

$$at^2 - (a^2 - r^2 + 1)t + a = 0$$

zwei reelle Lösungen. Diese können nicht  $\pm 1$  sein, denn sonst wäre

$$0 = a \mp (a^2 - r^2 + 1) + a = 2a \mp (a^2 - r^2 + 1)$$

im Widerspruch zu (14). Sie können auch nicht  $\frac{1}{a \pm r}$  sein, denn sonst wäre

$$0 = a - (a^2 - r^2 + 1)(a \pm r) + a(a \pm r)^2$$

und damit

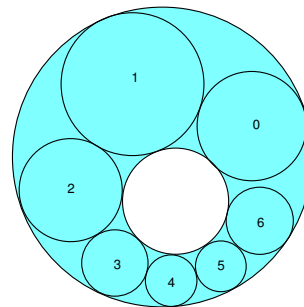
$$\begin{aligned} 0 &= a^3 + ar^2 \pm 2a^2r - a^3 + ar^2 - a \mp a^2r \pm r^3 \pm r + a \\ &= 2ar^2 \pm a^2r \pm r^3 \pm r = \pm r(\pm 2ar + a^2 + r^2 - 1) = \pm r((a \pm r)^2 - 1). \end{aligned}$$

Die Schnittpunkte  $a \pm r$  des zweiten Kreises mit der reellen Achse liegen aber nicht auf dem Einheitskreis.

Für ein solches  $t \notin \{0, \pm 1, \frac{1}{a \pm r}\}$  bildet dann die Möbiustransformation  $f$  auch den Kreis  $K$  auf einen Kreis mit Mittelpunkt 0 ab, und die Behauptung ist gezeigt.

Dieses Ergebnis hat eine hübsche von Steiner<sup>3</sup> entdeckte Anwendung:

In das Ringgebiet zwischen zwei ineinander enthaltenen Kreisen fügt man einen Anfangskreis ein, der beide berührt. Dann setzt man diesen zu einer Kette fort, indem man Kreise hinzufügt, die jeweils die Randkreise des Ringgebietes und den vorangehenden berühren. Dann ist es möglich, dass sich die Kette schließt, also periodisch wird, oder nicht. Welcher Fall eintritt, hängt anscheinend vom Ringgebiet *und* der Wahl des Anfangskreises ab. Wird allerdings das Ringgebiet von konzentrischen Kreisen berandet, so spielt aus Symmetriegründen der Anfangskreis dabei keine Rolle.



Sind die Randkreise nicht konzentrisch, so kann man aber nach dem obigen Satz eine Möbiustransformation auf konzentrische Kreise vornehmen, die offenbar die Kettenkonstruktion erhält! Also ist Schließungsbedingung nur eine Bedingung an das Ringgebiet und *unabhängig* vom gewählten Anfangskreis.

□

<sup>3</sup> Jakob Steiner war von 1825 bis 1835 Lehrer an der Städtischen Gewerbeschule Berlin, die später in der heutigen TU Berlin aufging.

### 3 Integration

Der zentrale Satz dieses Semesters, der *Cauchysche Integralsatz*, ist (unter passenden Regularitätsvoraussetzungen) eine sehr einfache Folgerung aus einem Hauptsatz der reellen Analysis, nämlich dem sogenannten *Stokesschen (oder Greenschen) Integralsatz*. Dieses Kapitel dient der Erklärung des Zusammenhangs zwischen beiden und damit zur Vervollkommnung Ihrer Allgemeinbildung. Später geben wir auch einen vom Stokes unabhängigen Beweis für den Satz von Cauchy.

Gleichzeitig legen wir hier die Grundlagen für die komplexe Integration.

- Kurvenintegrale
  - 1-Formen,
  - 1-Ketten
  - und wie man die Formen über die Ketten integriert.
- Flächenintegrale
  - 2-Formen,
  - 2-Ketten,
  - und wie man die Formen über die Ketten integriert.
- Der Satz von Stokes in zwei Dimensionen

#### 3.1 Integration von 1-Formen

**Vorbemerkungen.** In der Analysis haben Sie vielleicht  $\mathbb{R}^n$ -wertige Funktionen einer reellen Variablen über ein kompaktes Intervall integriert: Einfach komponentenweise. Für komplexwertige Funktionen  $f(t) = u(t) + iv(t)$  mit reellen  $u$  und  $v$  bedeutet das

$$\int (u(t) + iv(t))dt = \int u(t)dt + i \int v(t)dt. \quad (15)$$

Also werden Real- und Imaginärteil einzeln integriert.

In der Physik berechnet man die Arbeit eines Teilchens in einem Kraftfeld  $F : \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch Integration der  $F$ -Komponente in Richtung der von dem Teilchen beschriebenen Kurve  $c : [a, b] \rightarrow G$ , also

$$\int_a^b \left\langle F(c(t)), \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} \right\rangle \|\dot{c}(t)\| dt = \int_a^b \langle F(c(t)), \dot{c}(t) \rangle dt.$$

Der Integrand

$$\omega_{c(t)}(\dot{c}(t)) := \langle F(c(t)), \dot{c}(t) \rangle$$

hängt dabei von zwei Variablen ab, und zwar

1. (am besten stetig, vielleicht sogar differenzierbar) von einer “Ortsvariablen” und
2.  $\mathbb{R}$ -linear von einer “Richtungsvariablen”.

Das ist genau die Definition einer Differentialform vom Grad 1, kurz einer 1-Form.

**Vektorfelder oder Differentialformen?** Wenn man statt Vektorfeldern Differentialformen über Kurven integriert, ist das zunächst nur eine andere Sprechweise für genau denselben Sachverhalt. Die 1-Formen und die Vektorfelder entsprechen sich eineindeutig, allerdings nur wenn man ein Skalarprodukt zur Hilfe nimmt, das bei der Formenvariante überflüssig ist. Und die 1-Formen-Variante lässt sich bequemer verallgemeinern: auf komplexe Werte und vor allem auf die Integration über höherdimensionale Bereiche als die 1-dimensionalen Kurven, vgl. den Abschnitt 3.2

**Definition 33.** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  eine offene Menge. Eine *1-Form* oder *Pfaffsche Form*  $\omega$  auf  $G$  ist eine Abbildung  $\omega : G \rightarrow L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ , die also jedem Punkt  $z \in G$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare(!) Abbildung  $\omega_z : \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  zuordnet.

Die in der Analysis-Vorlesung betrachteten Differentialformen vom Grad 1 sind *reellwertige* Pfaffschen Formen (der Klasse  $C^\infty$ ). Für unsere Zwecke ist es günstiger, auch komplexe Werte zuzulassen, aber wir verlangen nicht, dass die Form  $\mathbb{C}$ -linear ist!

Die Pfaffschen Formen auf  $G$  bilden einen Modul über der Algebra der komplexwertigen Funktionen auf  $G$ .

**Beispiele 34.** In den folgenden Beispielen seien  $G \subset \mathbb{C}$  offen,  $z \in G$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  beliebig.

(i) Für  $P, Q : G \rightarrow \mathbb{C}$  sei

$$\boxed{\omega = Pdx + Qdy,} \tag{16}$$

definiert durch

$$\omega_z(a + ib) := P(z)a + Q(z)b.$$

Jede Pfaffsche Form ist von dieser Gestalt, denn

$$\omega_z(a + ib) = \omega_z(1)a + \omega_z(i)b.$$

(ii) Die in dieser Vorlesung häufigste Pfaffsche Form, gegeben durch eine komplexe Funktion  $f : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$ , ist

$$\boxed{f dz := f dx + i f dy.}$$

Dafür gilt

$$(f dz)_z(a + ib) = f(z)a + i f(z)b = \underbrace{f(z)(a + ib)}_{\text{komplexe Multiplikation}} = f(z)dz(a + ib)$$

(iii) Für eine  $\mathbb{R}$ -differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$  ist das (totale) Differential  $df : G \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  eine Pfaffsche Form. Für sie gilt

$$\begin{aligned} d_z f(a + ib) &= d_z f(1)a + d_z f(i)b = \frac{\partial f}{\partial x}(z)a + \frac{\partial f}{\partial y}(z)b \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z)dy \right) (a + ib). \end{aligned}$$

Das ist die aus der Analysis vertraute Gestalt.

(iv) Ist  $f : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, so ist

$$d_z f(a + ib) = f'(z)a + i f'(z)b = f'(z)(a + ib) = f'(z)dz(a + ib).$$

□

Die Pfaffschen Formen sind, wie eingangs schon erklärt, die “geborenen” Integranden für Kurvenintegrale.

**Definition 35.** Sei  $c : [a, b] \rightarrow G$  eine stetig differenzierbare Abbildung, wir nennen das eine *Kurve* in  $G$ , und sei  $\omega$  eine stetige Pfaffsche Form auf  $G$ . Dann definieren wir

$$\int_c \omega := \int_a^b \omega_{c(t)}(\dot{c}(t)) dt. \quad (17)$$

Ist  $c(t) = x(t) + iy(t)$  und  $\omega = Pdx + Qdy$ , so bedeutet das

$$\boxed{\int_c Pdx + Qdy = \int_a^b [P(c(t))\dot{x}(t) + Q(c(t))\dot{y}(t)] dt.} \quad (18)$$

Beachten Sie: Komplexwertige Funktionen auf einem kompakten Intervall  $[a, b]$  der reellen Achse integriert man, indem man Real- und Imaginärteil einzeln integriert. Das so definierte Integral ist dann eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung vom Vektorraum der stetigen komplexwertigen Funktionen auf  $[a, b]$  nach  $\mathbb{C}$ .

**Beispiel 36.** In diesem Skriptum ist der bei weitem häufigste Integrand die 1-Form  $\omega = f dz$  für eine stetige komplexe Funktion  $f$ . Dafür hat man

$$\int_c f dz = \int_a^b f(c(t))\dot{c}(t) dt.$$

□

**Bemerkung.** Mittels partieller Integration rechnet man leicht nach, dass das Integral Pfaffscher Formen sich nicht ändert, wenn man die Kurve orientierungserhaltend umparametrisiert. Deshalb werden wir oft o.E. nur Kurven betrachten, die auf dem Intervall  $[0, 1]$  definiert sind. Durchläuft man eine Kurve rückwärts, so ändert das Integral (nur) sein Vorzeichen.

**Beispiel 37.** Seien  $r > 0$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$  und

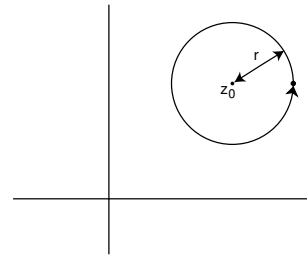
$$c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto z_0 + re^{2\pi i t} = z_0 + r \cos(2\pi t) + ir \sin(2\pi t).$$

Dann ist

$$\dot{c}(t) = r(-2\pi \sin(2\pi t) + i2\pi \cos(2\pi t)) = 2\pi i(c(t) - z_0)$$

und

$$\int_c \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^1 \frac{2\pi i(c(t) - z_0)}{c(t) - z_0} dt = 2\pi i.$$

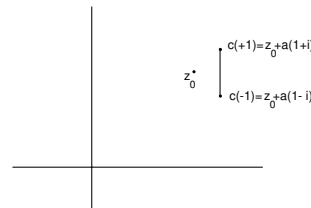


□

**Beispiel 38.** Seien  $a, z_0 \in \mathbb{C}$ . Wir definieren

$$c(t) := z_0 + a(1 + it), \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Für reelles  $a > 0$  sieht das so aus:



Dann ist  $\dot{c}(t) = ia$  und

$$\begin{aligned} \int_c \frac{dz}{z - z_0} &= \int_{-1}^{+1} \frac{ia}{a(1+it)} dt = i \int_{-1}^{+1} \frac{1-it}{1+t^2} dt = i \int_{-1}^{+1} \frac{1}{1+t^2} dt + \underbrace{i \int_{-1}^{+1} \frac{-it}{1+t^2} dt}_{=0, \text{ weil Integrand ungerade}} \\ &= \arctan t \Big|_{-1}^{+1} = i \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

unabhängig von  $a$ . □

**Beispiel 39.** Ist  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  reell stetig differenzierbar, so gilt nach der Kettenregel  $\frac{d}{dt} f(c(t)) = d_{c(t)} f(\dot{c}(t))$  für jede Kurve  $c : [a, b] \rightarrow G$ , und deshalb

$$\int_c df = \int_a^b \frac{d}{dt} f(c(t)) dt = f(c(b)) - f(c(a)).$$

Insbesondere gilt für holomorphes  $f$  mit stetiger Ableitung

$$\int_c f'(z) dz = \int_a^b \frac{d}{dt} f(c(t)) dt = f(c(b)) - f(c(a)).$$

□

**Definition 40.** Die Länge einer Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir als

$$L(c) := \int_c |dz| := \int_a^b |dz(\dot{c}(t))| dt = \int_a^b |\dot{c}(t)| dt$$

Eine wichtige Abschätzung für komplexe Integrale liefert der

**Satz 41 (Schrankensatz).** Seien  $c : [a, b] \rightarrow G \subset \mathbb{C}$  eine Kurve,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $M \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

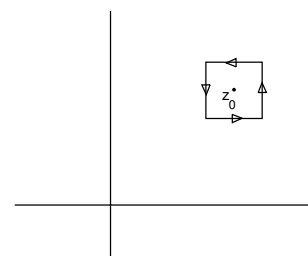
$$|f \circ c| \leq M \implies \left| \int_c f dz \right| \leq ML(c).$$

*Beweis.* Falls  $I := \int_c f dz = 0$ , ist die Behauptung klar. Andernfalls benutzen wir einen eleganten Trick:

$$1 = \operatorname{Re} \frac{\int_c f dz}{I} = \operatorname{Re} \int_a^b \frac{f(c(t))\dot{c}(t)}{I} dt = \int_a^b \operatorname{Re} \frac{f(c(t))\dot{c}(t)}{I} dt \leq \int_a^b \frac{M|\dot{c}(t)|}{|I|} dt = \frac{M}{|I|} L(c).$$

Durch Multiplikation mit  $|I|$  folgt die Behauptung. □

Wir wollen gelegentlich über Kurven integrieren, die zum Beispiel so aussehen wie die nebenstehende “quadratische” Kurve. Statt dafür eine “umlaufende” Parametrisierung zu suchen, ist es bequemer, sich vorzustellen, dass man über vier Kurvenstücke einzeln integriert und die Integrale addiert. Die einzelnen Kurvenstücke sind dann von der Form wie im Beispiel 38 mit Drehungen um die Winkel  $0, \pi/2, \pi$  und  $3\pi/2$ , also mit  $a = \epsilon, i\epsilon, -\epsilon$  und  $-i\epsilon$ . Weil das Integral in Beispiel 38 unabhängig von  $a$  ist, erhält man für das Integral über das Quadrat den Wert  $4i \frac{\pi}{2} = 2\pi i$ , also denselben Wert, wie bei der Integration über den Kreis im Beispiel 37.



**Definition 42.** Eine *1-Kette* in der offenen Menge  $G \subset \mathbb{C}$  ist eine endliche formale Linearkombination  $n_1 c_1 \oplus \dots \oplus n_N c_N$  von  $c_k : [0, 1] \rightarrow G$  mit ganzzahligen Koeffizienten  $n_k$ . Das Integral einer Pfaffschen Form  $\omega$  auf  $G$  über eine solche Kette wird definiert als

$$\int_{n_1 c_1 \oplus \dots \oplus n_N c_N} \omega = \sum_k n_k \int_{c_k} \omega.$$

Weil 1-Ketten bei uns praktisch nur als Integrationsbereiche vorkommen, ist es vernünftig, konstante Kurven oder Vielfache davon einfach wegzulassen.

Noch etwas formaler ist die 1-Kettengruppe in  $G$  die freie abelsche Gruppe, die von den stetig differenzierbaren Abbildungen  $c : [0, 1] \rightarrow G$  erzeugt wird, *modulo* der von den konstanten Kurven erzeugten Untergruppe.

Wir nennen eine 1-Kette  $\sum_k n_k c_k$  einen *1-Zyklus*, wenn jeder Punkt gleich oft als Endpunkt wie als Anfangspunkt der  $c_k$  vorkommt, wenn also

$$\sum_{k \text{ mit } c_k(1)=z} n_k = \sum_{l \text{ mit } c_l(0)=z} n_l \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

**Definition 43 (Träger).** Der *Träger* einer 1-Kette  $c = \sum_k n_k c_k$  ist definiert als die Vereinigung der Bilder der einzelnen Kurven

$$\text{supp}(c) := \bigcup_k c_k([0, 1]),$$

wobei die Vereinigung gebildet wird über alle  $k$ , für die  $c_k$  eine nicht-triviale Kurve in der Kette ist, für die also

$$n_k \neq 0 \text{ und } \#c_k([0, 1]) > 1.$$

**Beispiel 44.** Setzen wir mit Umparametrisierung auf  $[0, 1]$  statt  $[-1, +1]$

$$c_\epsilon(t) := z_0 + \epsilon(1 + i(2t - 1)) \quad 0 \leq t \leq +1,$$

so ist der oben abgebildet Quadratweg ein 1-Zyklus

$$c := c_\epsilon \oplus c_{i\epsilon} \oplus c_{-\epsilon} \oplus c_{-i\epsilon}$$

und

$$\int_c \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i.$$

Der Träger von  $c$  ist der Rand des Quadrates. □

**Beispiel 45.** Ist  $c = \sum n_k c_k$  ein 1-Zyklus in  $G$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  reell stetig differenzierbar, so folgt

$$\begin{aligned} \int_c df &= \sum_k n_k (f(c_k(1)) - f(c_k(0))) = \\ &= \sum_z f(z) \left( \sum_{c_k(1)=z} n_k - \sum_{c_k(0)=z} n_k \right) = 0. \end{aligned}$$

Insbesondere ist das Integral stetiger Funktionen mit holomorpher Stammfunktion über einen 1-Zyklus Null. □

**Definition 46.** Sei  $C : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$  eine stetig differenzierbare Abbildung. Eine solche Abbildung nennen wir ein *singuläres Quadrat* in  $G$ . Singuläre Quadrate sind gewissermaßen 2-dimensionale Analoga zu den 1-dimensionalen Kurven. Aus  $C$  bekommt man folgende Kurven in  $G$ :

$$\begin{aligned} {}_1C &: [0, 1] \rightarrow G, & \tau &\mapsto C(0, \tau) \\ {}^1C &: [0, 1] \rightarrow G, & \tau &\mapsto C(1, \tau) \\ {}_2C &: [0, 1] \rightarrow G, & \tau &\mapsto C(\tau, 0) \\ {}^2C &: [0, 1] \rightarrow G, & \tau &\mapsto C(\tau, 1) \end{aligned}$$

Die 1-Kette

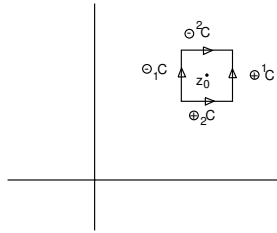
$$\partial C := ({}^1C \ominus {}_1C) \ominus ({}^2C \ominus {}_2C)$$

bezeichnet man als die *Randkette* oder den *Rand* von  $C$ . Rechnen Sie nach, dass  $\partial C$  ein 1-Zyklus ist.

**Beispiel 47.** Das singuläre Quadrat

$$C(s, t) = z_0 + \epsilon((2s - 1) + i(2t - 1))$$

bildet  $[0, 1]^2$  durch Translation und Streckung auf das Quadrat mit Mittelpunkt  $z_0$  und Seitenlänge  $2\epsilon$  ab. Die "erste untere Seite" von  $C$  ist  ${}_1C(t) = z_0 + \epsilon(-1 + i(2t - 1))$ . Insgesamt sieht die Kette so aus:



Das Integral über diese Kette ist dasselbe wie im vorangehenden Beispiel. □

**Beispiel 48.** Sei  $C = X + iY : [0, 1]^2 \rightarrow G$  stetig differenzierbar. Dann ist zum Beispiel

$$\begin{aligned} {}^1C(\tau) &= C(1, \tau), \\ {}^1\dot{C}(\tau) &= \frac{\partial X}{\partial t}(1, \tau) + i \frac{\partial Y}{\partial t}(1, \tau), \\ dx({}^1\dot{C}(\tau)) &= \frac{\partial X}{\partial t}(1, \tau), \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} {}_2C(\tau) &= C(\tau, 0), \\ {}_2\dot{C}(\tau) &= \frac{\partial X}{\partial s}(\tau, 0) + i \frac{\partial Y}{\partial s}(\tau, 0), \\ dx({}_2\dot{C}(\tau)) &= \frac{\partial X}{\partial s}(\tau, 0). \end{aligned}$$

Ist  $P : G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, so erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\partial C} P dx &= \int_0^1 P(C(1, \tau)) \frac{\partial X}{\partial t}(1, \tau) d\tau - \int_0^1 P(C(0, \tau)) \frac{\partial X}{\partial t}(0, \tau) d\tau \\ &\quad - \int_0^1 P(C(\tau, 1)) \frac{\partial X}{\partial s}(\tau, 1) d\tau + \int_0^1 P(C(\tau, 0)) \frac{\partial X}{\partial s}(\tau, 0) d\tau. \end{aligned} \quad (19)$$

Für spätere Verwendung schreiben wir das noch in einer aus der Integralrechnung vertrauten Notation:

$$\int_{\partial C} P dx = \int_0^1 \left( (P \circ C) \frac{\partial X}{\partial t} \right) \Big|_{(0,t)}^{(1,t)} dt - \int_0^1 \left( (P \circ C) \frac{\partial X}{\partial s} \right) \Big|_{(s,0)}^{(s,1)} ds.$$

□

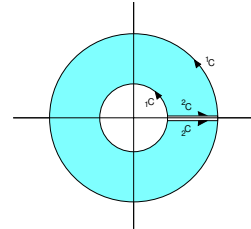
**Beispiel 49.** Seien  $0 \leq r < R$  und sei  $C : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$C(s, t) := (r + s(R - r))e^{2\pi i t}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \partial C &= \{t \mapsto Re^{2\pi i t}\} \ominus \{t \mapsto re^{2\pi i t}\} \ominus \{t \mapsto (r + t(R - r))e^{2\pi i}\} \oplus \{t \mapsto (r + t(R - r))e^0\} \\ &= \{t \mapsto Re^{2\pi i t}\} \ominus \{t \mapsto re^{2\pi i t}\} \end{aligned}$$

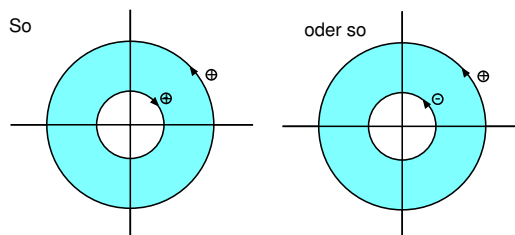
Das Integral einer Pfaffschen Form über  $\partial C$  ist dasselbe wie die Summe der Integrale über den äußeren Kreis mit positiver und den inneren Kreis mit negativer Orientierung oder die Differenz der Integrale mit beidemale positiver Orientierung.



Im Spezialfall  $r = 0$  ist der innere Kreis eine konstante Kurve, also  $\partial C = {}^1C$  der im positiven Sinn umlaufene große Kreis, vgl. die Definition 42.

□

**Konventionen.** Einfache kompakte Bereiche  $B$  der komplexen Ebene wie Kreise, Rechtecke, Dreiecke oder Kreisringe besitzen offensichtlich eine 1-Kette als Rand. Diese ist zwar nicht eindeutig, aber wenn man die einzelnen Kurven so orientiert (oder mit einem Vorzeichen versieht), dass die Fläche links liegt, so ist das Integral über diese Kette eindeutig bestimmt. Wir ersparen es uns deshalb in der Regel, die Kette zu spezifizieren und schreiben einfach  $\int_{\partial B} \omega$ .



Ist  $B$  die Kreisscheibe vom Radius  $r$  um  $z_0$ , so schreiben wir statt  $\int_{\partial B} \omega$  auch

$$\int_{|z-z_0|=r} \omega.$$

**Notation.** Die häufig auftretende Menge  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  bezeichnet man gern mit  $\mathbb{C}^*$ .

**Satz 50 (Kurven in Polarkoordinaten).** Sei  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$  eine stetig differenzierbare Kurve und  $c(0) = r_0 e^{i\phi_0}$  mit  $r_0 > 0$  und  $\phi_0 \in \mathbb{R}$ . Dann definiert

$$\phi(t) := \phi_0 + \operatorname{Im} \int_{c|_{[0,t]}} \frac{dz}{z}$$

eine stetig differenzierbare Funktion mit

$$\phi(0) = \phi_0 \tag{20}$$

$$c(t) = |c(t)| e^{i\phi(t)} \text{ f\u00fcr alle } t. \tag{21}$$

$\phi$  ist die einzige stetige Funktion mit (20), (21).

Stetig differenzierbare Kurven in  $\mathbb{C}^*$  besitzen eine Parametrisierung mit stetig differenzierbaren Polarkoordinaten. Die Winkelkoordinate ist bis auf eine additive Konstante in  $2\pi\mathbb{Z}$  eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Mit  $\int_{c|_{[0,t]}} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} dt$  erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \left( c(t) e^{-\int_{c|_{[0,t]}} \frac{dz}{z}} \right) = e^{-\int_{c|_{[0,t]}} \frac{dz}{z}} \left( \dot{c} - c \frac{\dot{c}}{c} \right) = 0,$$

also

$$c(t) = r_0 e^{i\phi_0} e^{\int_{c|_{[0,t]}} \frac{dz}{z}} = r_0 e^{\operatorname{Re} \int_{c|_{[0,t]}} \frac{dz}{z}} e^{i \left( \phi_0 + \operatorname{Im} \int_{c|_{[0,t]}} \frac{dz}{z} \right)} = r_0 e^{\operatorname{Re} \int_{c|_{[0,t]}} \frac{dz}{z}} e^{i\phi(t)}.$$

Weil  $|e^{i\phi(t)}| = 1$ , folgt  $r_0 e^{\operatorname{Re} \int_{c|_{[0,t]}} \frac{dz}{z}} = |c(t)|$  und damit (21).

Die Einzigkeit von  $\phi$  ist klar, weil die Winkelkoordinate  $\bmod 2\pi$  eindeutig bestimmt ist und stetige Funktionen nach  $2\pi\mathbb{Z}$  konstant sind. Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

### 3.2 Integration von 2-Formen, Satz von Stokes

**Definition 51.** Eine *alternierende Differentialform vom Grad 2*, kurz eine *2-Form* auf der offenen Menge  $G \subset \mathbb{C}$  ist eine Abbildung  $\theta : G \rightarrow L_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ , die jedem  $z \in G$  eine alternierende (=schiefsymmetrische)  $\mathbb{R}$ -bilineare Abbildung

$$\theta_z : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

zuordnet.

**Beispiel 52.** Ein Beispiel für eine 2-Form auf ganz  $\mathbb{C}$ , und zwar eine solche, die vom 1. Argument  $z$  unabhängig ist, ist die sogenannte *Determinantenform*  $dx \wedge dy$ , die für reelle  $a_j, b_j$  gegeben ist durch

$$\begin{aligned} (dx \wedge dy)(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2) &:= dx(a_1 + ib_1)dy(a_2 + ib_2) - dx(a_2 + ib_2)dy(a_1 + ib_1) \\ &= a_1b_2 - b_1a_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aus der linearen Algebra weiß man aber, dass die Determinante bis auf einen skalaren Faktor die einzige alternierende Bilinearform auf dem  $\mathbb{R}^2$  ist. Daher ist jede 2-Form auf  $G$  gegeben durch

$$\theta = R dx \wedge dy$$

mit einer Funktion  $R : G \rightarrow \mathbb{C}$ .

□

Wie die 1-Formen die idealen Integranden für Kurvenintegrale sind, so sind die 2-Formen die idealen Integranden für Integrale über 2-dimensionale Abbildungen.

**Definition 53.** Sei  $\theta = R dx \wedge dy$  eine stetige 2-Form auf der offenen Menge  $G \subset \mathbb{C}$ , und sei  $C : [0, 1]^2 \rightarrow G$  stetig differenzierbar. Dann definieren wir das Integral

$$\begin{aligned} \int_C \theta &:= \int_{[0,1]^2} \theta_C \left( \frac{\partial C}{\partial s}, \frac{\partial C}{\partial t} \right) d\mu_2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 R(C(s, t)) (dx \wedge dy) \left( \frac{\partial C}{\partial s}, \frac{\partial C}{\partial t} \right) \Big|_{(s,t)} ds dt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 R(C(s, t)) \det d_{(s,t)} C ds dt. \end{aligned}$$

Dabei ist  $dC$  die Funktionalmatrix der Abbildung  $C : \mathbb{R}^2 \supset G \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $\mu_2$  das 2-dimensionale Lebesguemaß.

Ist  $C$  eine orientierungserhaltende injektive Abbildung, so ist das nach dem Transformationsatz also gerade das Integral von  $R$  über die Bildmenge  $C([0, 1]^2)$ .

**Definition 54.** Sei  $\omega = P dx + Q dy$  eine differenzierbare 1-Form auf der offenen Menge  $G \subset \mathbb{C}$ . Die *Cartansche Ableitung*  $d\omega$  ist dann die durch

$$d\omega := \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

definierte 2-Form.

Ist  $d\omega = 0$ , so heißt  $\omega$  *geschlossen*.

**Beispiel 55.** Sei  $f = u + iv : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann ist

$$d(fdz) = d(\underbrace{(u + iv)}_{=:P} dx + \underbrace{(u + iv)i}_{=:Q} dy) = \left( -\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \wedge dy = 0$$

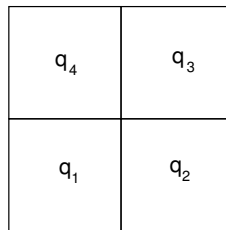
nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Für holomorphes  $f$  ist  $f(z)dz$  also geschlossen. □

Wie man 1-Ketten definiert als formale Linearkombinationen von Kurven, so kann man auch 2-Ketten definieren als formale Linearkombination von singulären Quadraten. Eine 2-Kette heißt zum Beispiel zweimal stetig differenzierbar, wenn alle daran mit Koeffizient  $\neq 0$  beteiligten singulären Quadrate zweimal stetig differenzierbar sind. Der Rand  $\partial C$  einer 2-Kette  $C$  ist die offensichtliche Linearkombination der Ränder der einzelnen Abbildungen.

**Beispiel 56.** Die Abbildungen

$$\begin{aligned} q_1(s, t) &= \frac{1}{2}(s, t), & q_2(s, t) &= \frac{1}{2}(1 + s, t) \\ q_3(s, t) &= \frac{1}{2}(1 + s, 1 + t), & q_4(s, t) &= \frac{1}{2}(s, 1 + t) \end{aligned}$$

bilden das Einheitsquadrat jeweils auf ein Viertel desselben ab:



Berechnet man

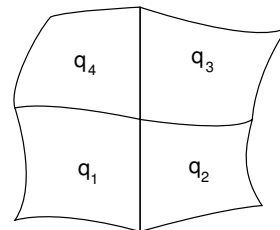
$$\partial(q_1 \oplus q_2 \oplus q_3 \oplus q_4),$$

so heben sich die inneren Kurven weg, und es bleibt eine 1-Kette von acht Kurven auf dem Rand des Einheitsquadrates  $q : (s, t) \mapsto (s, t)$ , so dass für jede 1-Form  $\omega$

$$\sum_{k=1}^4 \int_{\partial q_k} \omega = \int_{\partial(q_1 \oplus q_2 \oplus q_3 \oplus q_4)} \omega = \int_{\partial q} \omega.$$

Allgemeiner gilt für jedes singuläre Quadrat  $C$  in einem offenen  $G$  und jede 1-Form auf  $G$  dann

$$\sum_{k=1}^4 \int_{\partial(C \circ q_k)} \omega = \int_{\partial(C \circ q)} \omega.$$



□

Einer der wichtigsten Sätze der Analysis ist nun der

**Satz 57 (Satz von Stokes).** Ist  $\omega$  eine stetig differenzierbare Pfaffsche Form auf einer offenen Menge  $G \subset \mathbb{C}$  und ist  $C$  eine zweimal stetig differenzierbare 2-Kette in  $G$ , so gilt

$$\int_{\partial C} \omega = \int_C d\omega.$$

*Beweis.* Wir zeigen: Die Formel von Stokes gilt für stetig differenzierbare  $\omega = Pdx$  und 2-mal stetig differenzierbare  $C : [0, 1]^2 \rightarrow G$ .

Analog zeigt man das für  $\omega = Qdy$ .

Die Additivität des Integrals  $\int_C \omega$  in  $\omega$  und  $C$  liefert dann die Behauptung für beliebige stetig differenzierbare 1-Formen und 2-mal stetig differenzierbare 2-Ketten.

Wir schreiben  $C(s, t) = X(s, t) + iY(s, t)$  und erhalten

$$\begin{aligned} \int_C d(Pdx) &= - \int_C \frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy \\ &= - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial y}(C(s, t)) \left( \frac{\partial X}{\partial s} \frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial Y}{\partial s} \right) ds dt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{\partial P}{\partial y}(C(s, t)) \frac{\partial Y}{\partial s} \frac{\partial X}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial y}(C(s, t)) \frac{\partial X}{\partial s} \frac{\partial Y}{\partial t} \right) ds dt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{\partial P}{\partial x}(C(s, t)) \frac{\partial X}{\partial s} \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y}(C(s, t)) \frac{\partial Y}{\partial s} \frac{\partial X}{\partial t} \right) ds dt \\ &\quad - \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{\partial P}{\partial x}(C(s, t)) \frac{\partial X}{\partial s} \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y}(C(s, t)) \frac{\partial X}{\partial s} \frac{\partial Y}{\partial t} \right) ds dt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial(P \circ C)}{\partial s} \frac{\partial X}{\partial t} ds dt - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial(P \circ C)}{\partial t} \frac{\partial X}{\partial s} ds dt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} \left( (P \circ C) \frac{\partial X}{\partial t} \right) ds dt - \int_0^1 \int_0^1 (P \circ C) \frac{\partial^2 X}{\partial s \partial t} ds dt \\ &\quad - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left( (P \circ C) \frac{\partial X}{\partial s} \right) ds dt + \int_0^1 \int_0^1 (P \circ C) \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial s} ds dt \\ &= \int_0^1 \left( (P \circ C) \frac{\partial X}{\partial t} \right) \Big|_{(0,t)}^{(1,t)} dt - \int_0^1 \left( (P \circ C) \frac{\partial X}{\partial t} \right) \Big|_{(s,0)}^{(s,1)} ds \\ &\stackrel{(19)}{=} \int_{\partial C} Pdx. \end{aligned}$$

□

Die vorstehende “zweidimensionale Version” des Satzes von Stokes heißt auch der *Greensche Satz*. Analog zu unserer Definition von 1- und 2-Formen kann man (alternierende) Differentialformen vom Grad  $k$  und analog zu den 1- und 2-Ketten auch  $k$ -Ketten in einer offenen Menge des  $\mathbb{R}^n$  oder einer Mannigfaltigkeit definieren. Das Integral einer  $k$ -Form über eine  $k$ -Kette definiert sich dann praktisch von selbst. Schwieriger ist die Cartansche Ableitung zu erklären, die aus einer  $(k-1)$ -Form eine  $k$ -Form macht. Und schwieriger ist die Definition des Randes einer  $k$ -Kette als einer  $(k-1)$ -Kette. Wenn man das aber richtig macht, gilt der Stokessche Integralsatz

$$\int_{\partial C} \omega = \int_C d\omega$$

für beliebige zweimal stetig differenzierbare  $k$ -Ketten und stetig differenzierbare  $(k - 1)$ -Formen. Einzelheiten und einen Beweis finden Sie im Skriptum zur *Analysis III* oder in dem Büchlein *Calculus on manifolds* von M. Spivak – nicht zu verwechseln mit dem Buch *Calculus* vom selben Autor.

Die im obigen Satz gemachten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen für den Stokesschen Satz lassen sich für die Spezialisierung auf den Cauchyschen Integralsatz noch wesentlich reduzieren, wie wir sehen werden.

Wir schreiben die Formel des Stokes noch einmal “in Koordinaten” aus. In dieser Form läuft sie auch unter dem Namen *Greensche Formel*:

$$\int_{\partial C} (Pdx + Qdy) = \int_C \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

**Beispiel 58.** Sei  $C : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$  ein singuläres Quadrat. Dann erhalten wir mit  $\omega = xdy$

$$\int_{\partial C} xdy = \int_C dx \wedge dy = \int_{[0,1]^2} \det d_{(s,t)} C dsdt.$$

Ist  $C$  injektiv mit positiver Funktionaldeterminante (also orientierungstreu), so ist das nach dem Transformationssatz gerade der Flächeninhalt von  $C([0, 1]^2)$ , den man also auch durch ein Kurvenintegral über den Rand ermitteln kann.

□

## 4 Cauchyscher Integralsatz

- Ein unscheinbarer Satz von großer Bedeutung als triviale Folge des Stokes
- Ein anderer Beweis mit weniger Voraussetzungen (Goursat)
- Nullhomologe Zyklen, Definition und die Last mit den Beispielen
- Die überraschende Integralformel

### 4.1 Der Integralsatz

Für holomorphes  $f$  gilt

$$d(fdz) = 0,$$

vgl. Beispiel 55. Daher bekommt man aus dem Satz von Stokes – allerdings unter etwas stärkeren Regularitätsvoraussetzungen – als unmittelbare Konsequenz den vermutlich wichtigsten Satz der komplexen Analysis:

**Satz 59 (Cauchyscher Integralsatz).** Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf der offenen Menge  $G \subset \mathbb{C}$ , und sei  $C$  eine stetig differenzierbare 2-Kette in  $G$ . Dann gilt

$$\int_{\partial C} f dz = 0.$$

Beachten Sie: Im Satz von Stokes in der klassischen Version brauchte man ein *stetig differenzierbares*  $\omega$ . Ist  $f$  holomorph, so ist  $\omega = fdz$  natürlich differenzierbar, aber aus  $d\omega = 0$  folgen nur die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ . Die partiellen Ableitungen allein sind i.a. nicht 0, und warum sollten sie stetig sein? Weiter brauchte man die *zweimalige* stetige Differenzierbarkeit der 2-Kette.

Der folgende Beweis für den Cauchyschen Satz macht dagegen von der Stetigkeit von  $f'$  keinen Gebrauch und gilt für nur einmal stetig differenzierbares  $C$ . Ein entsprechender Beweis gilt auch für geschlossene reelle 1-Formen  $\omega$ . Also ist der Cauchysche Integralsatz eigentlich ein Satz der *reellen* Analysis . . .

*Beweis des Integralsatzes von Cauchy nach É. Goursat (1834).* Es genügt, den Satz für ein singuläres Quadrat  $C : [0, 1]^2 \rightarrow G$  zu zeigen. Für 2-Ketten ergibt er sich dann aus der Definition des Integrals über Ketten. Wir bezeichnen  $[0, 1]^2 =: W$ . Weil  $C$  stetig differenzierbar auf dem kompakten  $W$  ist, existiert

$$\mu := \max_{(s,t) \in W} \|d_{(s,t)}C\| < \infty,$$

wobei  $\|d_{(s,t)}C\|$  die Norm der Ableitung von  $C$  oder der Jacobimatrix bezeichnet. Nach dem Schrankensatz der Analysis II gilt dann für alle  $(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in [0, 1]^2$

$$|C(s_1, t_1) - C(s_2, t_2)| \leq \mu \|(s_1, t_1) - (s_2, t_2)\|. \quad (22)$$

Wir vierteln nun das Quadrat wie im Beispiel 56 und wählen ein Teilquadrat  $C_1 := C \circ q_k$ ,

für welches  $|\int_{\partial(C \circ q_k)} f(z) dz|$  maximal wird. Dann haben wir

$$\begin{aligned} C_1(W) &\subset C(W) \subset G, \\ \text{Durchmesser } C_1(W) &\leq \mu \frac{\text{Durchmesser}(W)}{2}, \\ \text{Länge } \partial C_1 &\leq \mu \frac{\text{Länge}(\text{Rand } W)}{2}, \\ \left| \int_{\partial C} f dz \right| &\leq 4 \left| \int_{\partial C_1} f dz \right|. \end{aligned}$$

Wir wiederholen nun diese Vierteilung mit  $C_1$  statt  $C$  und dann weiter rekursiv. Wir erhalten eine Folge  $C_k : W \rightarrow G$  mit

$$\begin{aligned} C_{k+1}(W) &\subset C_k(W) \subset G, \\ \text{Durchmesser } C_k(W) &\leq \mu \frac{\text{Durchmesser}(W)}{2^k}, \\ \text{Länge } \partial C_k &\leq \mu \frac{\text{Länge}(\text{Rand } W)}{2^k}, \\ \left| \int_{\partial C} f dz \right| &\leq 4^k \left| \int_{\partial C_k} f dz \right|. \end{aligned}$$

Die  $C_k(W)$  bilden eine geschachtelte Folge kompakter Mengen mit gegen 0 konvergierendem Durchmesser ist. Daher besteht  $\bigcap C_k(W)$  aus genau einem Punkt  $z_0$ .

Nach Definition der Differenzierbarkeit gibt es eine stetige Funktion  $\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z), \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\alpha(z)}{z - z_0} = 0.$$

Sei nun  $\epsilon > 0$  und sei  $\delta > 0$  so gewählt, dass

$$|z - z_0| \leq \delta \implies |\alpha(z)| \leq \epsilon |z - z_0|.$$

Sei weiter  $k \in \mathbb{N}$  so groß, dass Durchmesser  $C_k(W) < \delta$ . Dann gilt

$$\left| \int_{\partial C} f dz \right| \leq 4^k \left| \int_{\partial C_k} f dz \right| = 4^k \left| \int_{\partial C_k} f(z_0) dz + \int_{\partial C_k} f'(z_0)(z - z_0) dz + \int_{\partial C_k} \alpha(z) dz \right|$$

Die ersten beiden Integrale verschwinden nach Beispiel 45, weil  $f(z_0)$  die Stammfunktion  $zf(z_0)$  und  $f'(z_0)(z - z_0)$  die Stammfunktion  $\frac{1}{2}f'(z_0)(z - z_0)^2$  besitzt. Weil  $C_k(W)$  im Kreis vom Radius  $\delta$  um  $z_0$  liegt, ist für  $z \in C_k(W)$

$$|\alpha(z)| \leq \epsilon |z - z_0| \leq \epsilon \mu \frac{\text{Durchmesser}(W)}{2^k}.$$

Und weil

$$\text{Länge}(\partial C_k) \leq \mu \frac{\text{Länge}(\text{Rand } W)}{2^k},$$

bleibt

$$\left| \int_{\partial C} f dz \right| \leq 4^k \left| \int_{\partial C_k} \alpha(z) dz \right| \leq \epsilon \mu^2 \text{Länge}(\text{Rand } W) \text{Durchmesser}(W).$$

Nun war  $\epsilon > 0$  beliebig, also ist  $\int_{\partial C} f dz = 0$ . □

**Beispiel 60.** Sei  $f$  holomorph auf der offenen Menge  $G$  und

$$A = \{z \mid r \leq |z - z_0| \leq R\} \subset G$$

ein abgeschlossener Kreisring in  $G$  mit  $0 \leq r < R$ . Nach Beispiel 49 gibt

$$C(s, t) = z_0 + ((s-1)r + sR)e^{2\pi it}$$

ein singuläres Quadrat, dessen Rand sich mit

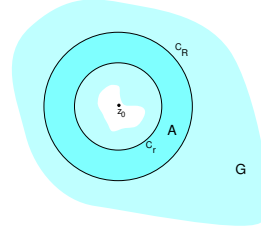
$$c_r(t) = z_0 + re^{2\pi it}, \quad c_R(t) = z_0 + Re^{2\pi it},$$

schreibt als  $\partial C = c_R \ominus c_r$ . Deshalb ist

$$\int_{\partial A} f(z) dz = \int_{\partial C} f(z) dz = 0$$

oder

$$\int_{c_r} f(z) dz = \int_{c_R} f(z) dz.$$



Für  $r = 0$  ist der kleine Kreis zu einer konstanten Kurve geschrumpft und man hat

$$\int_{c_R} f(z) dz = 0.$$

□

Wenn man in einem Gebiet  $G$  eine holomorphe Funktion und einen 1-Zyklus  $c$  gegeben hat, wüßte man gern, ob  $\int_c f(z) dz = 0$ . Dazu müßte man wissen, ob  $c$  der Rand einer 2-Kette in  $G$  ist. Solche 1-Zyklen nennt man *nullhomolog in G*. Etwas allgemeiner nennt man zwei 1-Ketten *homolog in G*, wenn ihre Differenz der Rand einer 2-Kette in  $G$  ist.

Das letzte Beispiel zeigt: Die Randkurve eines in  $G$  liegenden abgeschlossenen Kreises oder die beiden richtig "bewerteten" Randkurven eines ganz in  $G$  liegenden abgeschlossenen Kreisrings sind in  $G$  nullhomolog. Wir geben nun noch drei weitere Beispiele für nullhomologe 1-Zyklen, eines im Detail und zwei, die wir anschaulich beschreiben, ohne die mühsamen Details auszuführen. Dabei wird später wichtig sein, dass die 1-Zyklen nicht nur in  $G$  nullhomolog sind, sondern sogar im Komplement  $G \setminus \{z_0\}$  eines Punktes  $z_0$  von  $G$ .

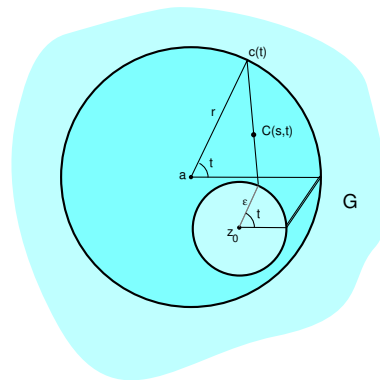
**Beispiel 61 (Schiefer Kreisring).** Sei  $K \subset G$  ein abgeschlossener Kreis vom Radius  $r$  um  $a$ , der ganz im Gebiet  $G$  liegt.

Sei  $z_0$  ein Punkt im Inneren von  $K$  und sei  $\epsilon > 0$ , so dass die abgeschlossene  $\epsilon$ -Umgebung von  $z_0$  im Inneren von  $K$  liegt. Definiere

$$c(t) := a + re^{2\pi it}, \quad c_\epsilon(t) = z_0 + \epsilon e^{2\pi it}$$

und

$$C(s, t) = sc(t) + (1-s)c_\epsilon(t).$$



Dann gilt  $C([0, 1]^2) \subset G \setminus \{z_0\}$ . (Warum?)

Wie im Beispiel 49 rechnet man nach, dass

$$\partial C = c \ominus c_\epsilon,$$

Also ist der 1-Zyklus  $c \ominus c_\epsilon$  nicht nur nullhomolog in  $G$ , sondern auch nullhomolog in  $G \setminus \{z_0\}$ .

Für eine in  $G \setminus \{z_0\}$  holomorphe Funktion  $g$  ist deshalb

$$\int_c g(z) dz = \int_{c_\epsilon} g(z) dz.$$

Das werden wir demnächst brauchen. □

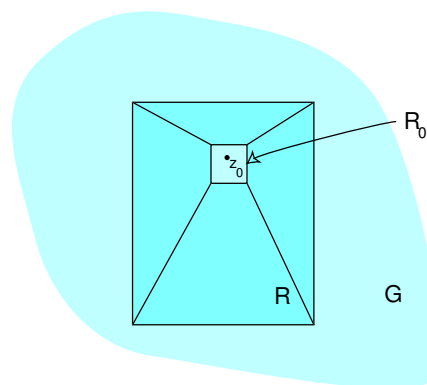
**Beispiel 62 (Rechteckring).** Seien  $R$  ein abgeschlossenes Rechteck in der offenen Menge  $G$ ,  $R_0$  ein abgeschlossenes Rechteck im Innern von  $R$  und  $z_0$  ein innerer Punkt von  $R_0$ .

Das ist also eine "eckige Variante" des letzten Beispiels. Hier ist es sinnvoll,  $R$  und  $R_0$  als singuläre Quadrate und den Zwischenbereich als 2-Kette  $C$  mit 4 singulären Quadraten aufzufassen. Dann ist klar, dass

$$\partial C = \partial R \ominus \partial R_0, \quad (23)$$

gilt. Also ist  $\partial R \ominus \partial R_0$  in  $G \setminus \{z_0\}$  nullhomolog. Für eine in  $G \setminus \{z_0\}$  holomorphe Funktion  $g$  ist deshalb

$$\int_{\partial R} g(z) dz = \int_{\partial R_0} g(z) dz.$$



□

□

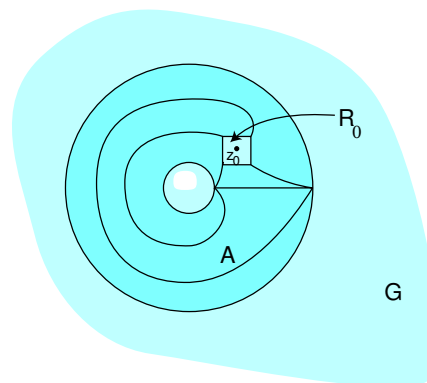
**Beispiel 63 (Gelochter Kreisring).** In diesem Beispiel betrachten wir einen abgeschlossenen Kreisring  $A$  in einer offenen Menge  $G$

und im Inneren von  $A$  ein kleines Rechteck  $R_0$  um  $z_0$  wie in der Abbildung.  $A$  haben wir schon in Beispiel 49 als singuläres Quadrat aufgefasst, und es ist klar, wie man  $R_0$  als singuläres Quadrat schreibt. Den Zwischenbereich zerlegt man als 2-Kette  $C$  mit 4 singulären Quadraten und findet

$$\partial C = \partial A \ominus \partial R_0.$$

Also ist  $\partial A \ominus \partial R_0$  nullhomolog in  $G \setminus \{z_0\}$ . Für eine in  $G \setminus \{z_0\}$  holomorphe Funktion  $g$  ist deshalb

$$\int_{\partial A} g(z) dz = \int_{\partial R_0} g(z) dz.$$



□

Beim letzten Beispiel würde man die “krummen” singulären Quadrate der Kette  $C$  nicht gerne mehr explizit aufschreiben. Überhaupt würde sich die Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes natürlich wesentlich vereinfachen, wenn man ein bequemes Kriterium dafür hätte, wann ein gegebener 1-Zyklus *nullhomolog* ist, ohne dass man eine 2-Kette explizit aufschreiben muss, die man ja doch nicht benötigt. Ein solches Kriterium werden Sie in Satz 149 kennenlernen.

Wir werden aber zunächst sehen, dass man auch ohne ein solches Kriterium bereits sehr eindrucksvolle Konsequenzen aus dem Cauchyschen Integralsatz ziehen kann.

## 4.2 Die Integralformel

**Satz 64 (Cauchysche Integralformel).** Sei  $f$  holomorph in der offenen Menge  $G \subset \mathbb{C}$ , sei  $K$  ein abgeschlossener Kreis in  $G$  und sei  $z_0$  ein innerer Punkt von  $K$ . Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0).$$

*Beweis.* Sei  $K := \{z \mid |z - a| \leq R\}$ . Für  $\delta > 0$  mit  $|z_0 - a| + \delta < R$  definieren wir

$$c_\delta(t) := z_0 + \delta e^{2\pi i t}$$

und

$$C(s, t) = (1 - s)c_\delta(t) + s(a + Re^{2\pi i t}).$$

Dann ist  $C$  eine 2-Kette in  $G \setminus \{z_0\}$ , vgl. Beispiel 61, und  $\partial C = \partial K - c_\delta$ .

Weil  $\frac{f(z)}{z - z_0}$  in  $G \setminus \{z_0\}$  holomorph ist, folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\delta} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Sei nun  $\epsilon > 0$  beliebig und  $0 < \delta < R - |z_0 - a|$ , so dass  $|f(z) - f(z_0)| \leq \epsilon$  für alle  $z$  mit  $|z - z_0| \leq \delta$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\delta} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\delta} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{c_\delta} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \epsilon \text{Länge}(c_\delta) = \epsilon \end{aligned}$$

Weil  $\epsilon$  beliebig ist, folgt die Behauptung des Satzes.  $\square$

Über diesen Satz darf man schon staunen: Die Werte einer auf einem Kreis komplex differenzierbaren Funktion sind durch ihre Werte auf dem Rand des Kreises bereits vollständig festgelegt! Komplex differenzierbare Funktionen sind also viel "starrer" als reell differenzierbare Funktionen.

**Beispiel 65.** Der Beweis der Cauchyschen Integralformel beruht darauf, dass man das Integral über den Rand des Kreises nach dem Cauchyschen Integralsatzes umschreiben kann in das Integral über einen homologen sehr kleinen Kreis um die interessante Stelle  $z_0$ . Dabei ist es nicht wichtig, dass dieses zweite Integral über kleine Kreise geht, jede andere Familie von 1-Zyklen  $c_\delta$  tut es auch, wenn sie für  $\delta \rightarrow 0$  gegen  $z_0$  "konvergiert" und wenn

$$\int_{c_\delta} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i. \quad (24)$$

Deshalb gilt die Cauchysche Integralformel auch in der Situation der Beispiele 62 und 63, denn dafür gilt (24) nach Beispiel 44, und das kleine Rechteck, kann man beliebig klein machen. Ist also etwa  $f$  holomorph im Gebiet  $G$ ,  $A$  ein abgeschlossener Kreisring in  $G$  und  $z_0$  ein innerer Punkt dieses Kreisrings, so ist

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

$\square$

## 5 Anwendungen des Integralsatzes

Die schönsten Anwendungen haufenweise:

- Taylorentwicklung
- Einmal differenzierbar - immer differenzierbar
- Ganze Funktionen mit beschränktem Wachstum sind sehr speziell
- Ein einfacher Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra
- Existenz holomorpher Stammfunktionen
- Wie holomorphe Funktionen bei ihren Nullstellen aussehen
- Satz von der Gebietstreue
- Maximumprinzip
- Das Lemma von Schwarz-Pick und die biholomorphen Automorphismen von  $\mathbb{D}$
- Hyperbolische Geometrie
- Ein unkonventioneller Beweis zum Satz von Cayley-Hamilton

**Satz 66 (Taylorentwicklung).** Seien  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $z_0 \in G$  und die offene Kreisscheibe  $U = U_R(z_0)$  um  $z_0$  vom Radius  $R > 0$  enthalten in  $G$ . Dann gilt für alle  $z \in U$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

mit

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}},$$

wo  $0 < r < R$  beliebig ist. Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist insbesondere  $\geq R$ .

*Beweis.* Sei  $z_1 \in U$ . wähle ein  $r > 0$  mit  $|z_1 - z_0| < r < R$ . Dann gilt nach der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned} f(z_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z) dz}{z - z_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z_1 - z_0}{z - z_0}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z_1 - z_0}{z - z_0} \right)^k \right) dz. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass  $\left| \frac{z_1 - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{|z_1 - z_0|}{r} < 1$ , wenn  $z$  auf dem Kreis  $c([0, 1])$  liegt. Deshalb konvergiert die geometrische Reihe. Und deshalb besitzt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(z)}{z - z_0} \left( \frac{z_1 - z_0}{z - z_0} \right)^k$$

für  $|z - z_0| = r$  die konstante konvergente Majorante  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|}{r} \left( \frac{|z_1 - z_0|}{r} \right)^k$ . Also kann man die Summe aus dem Integral herausziehen<sup>4</sup>. Man erhält:

$$f(z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{k+1}} \right) (z_1 - z_0)^k.$$

<sup>4</sup>Folgt zum Beispiel aus dem Satz über dominierte Konvergenz von Lebesgue

Die Unabhängigkeit von  $r$  folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz für den Kreisring.  $\square$

**Korollar 67.** *Holomorphe Funktionen sind beliebig oft differenzierbar.*

**Korollar 68 (Umkehrsatz).** *Sind  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $z_0 \in G$  mit  $f'(z_0) \neq 0$ , so besitzt  $f$  lokal bei  $z_0$  ein holomorphes Inverses: Es gibt eine offene Umgebung  $U$  von  $z_0$  in  $G$ , so dass gilt:*

- (i)  $f|_U$  ist injektiv,
- (ii)  $f(U)$  ist offen,
- (iii)  $(f|_U)^{-1} : f(U) \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph.

Holomorphe Abbildungen mit holomorphem Inversen nennt man auch *biholomorph*. Also sind holomorphe Abbildungen mit nicht-verschwindender Ableitung lokal biholomorph.

*Beweis.* Weil  $f$  reell stetig differenzierbar und die reelle Ableitung in  $z_0$  invertierbar ist, besitzt  $f$  nach dem Umkehrsatz lokal ein stetig differenzierbares Inverses. Ist die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  invertierbar und  $\mathbb{C}$ -linear, so ist auch  $A^{-1}$   $\mathbb{C}$ -linear (Beweis?). Daher ist die lokale Inverse von  $f$  ebenfalls holomorph.  $\square$

**Korollar 69.** *Sei  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R$ . Sei  $0 < r < R$  und sei  $|f(z)| \leq M$  für alle  $z$  mit  $|z - z_0| \leq r$ . Dann gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$*

$$|a_k| \leq \frac{M}{r^k}. \quad (25)$$

*Beweis.*

$$|a_k| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{k+1}} 2\pi r = \frac{M}{r^k}.$$

$\square$

**Korollar 70 (Cauchysche Integralformel für die Ableitung).** *Sei  $f$  holomorph auf der offenen Menge  $G$  und  $K$  eine in  $G$  enthaltene abgeschlossene Kreisscheibe. Dann gilt für alle  $z_0$  im Inneren von  $K$  und alle  $k \in \mathbb{N}$*

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{k+1}}.$$

*Beweis.* Falls  $z_0$  der Mittelpunkt von  $K$  ist, folgt das aus der Formel im Satz 66. Aber wie im Beweis der Cauchyschen Integralformel folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int_{\partial K} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{k+1}} = \int_{\partial \tilde{K}} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{k+1}}$$

für einen kleinen Kreis  $\tilde{K} \subset K$  mit Mittelpunkt  $z_0$ .  $\square$

**Lemma 71.** Sei  $p(z)$  ein Polynom vom Grad  $= n > 0$ . Dann gibt es  $R, A, B, C > 0$  mit

$$C|z|^n \leq |p(z)| \leq B|z|^n \text{ f\u00fcr alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq R$$

und

$$|p(z)| \leq A + B|z|^n \text{ f\u00fcr alle } z \in \mathbb{C}.$$

*Beweis.* Zun\u00e4chst l\u00e4\u00dft sich  $p(z)$  schreiben als

$$p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n = z^n \left( \frac{a_0}{z^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_n}{1} \right) =: z^n(g(z) + a_n)$$

mit  $a_n \neq 0$ . Weil  $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$ , gibt es  $R > 0$  mit  $|g(z)| \leq \frac{|a_n|}{2}$  f\u00fcr alle  $|z| \geq R$ . Dann folgt f\u00fcr diese  $z$

$$\left( |a_n| - \frac{|a_n|}{2} \right) |z|^n \leq |p(z)| \leq \left( |a_n| + \frac{|a_n|}{2} \right) |z|^n.$$

Mit  $A := \max_{|z| \leq R} |p(z)|$  folgt die zweite Gleichung. □

Ganze Funktionen waren auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorphe Funktionen. F\u00fcr sie gilt:

**Satz 72.** Seien  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ganz,  $A, B > 0$  und  $|f(z)| \leq A + B|z|^n$  f\u00fcr alle  $z$ . Dann ist  $f$  ein Polynom vom Grad  $\leq n$ .

*Beweis.* Nach Korollar 69 gilt f\u00fcr den  $k$ -ten Taylorkoeffizienten von  $f$  bei  $k > n$

$$|a_k| \leq \frac{A + Br^n}{r^k} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Also ist  $a_k = 0$  f\u00fcr alle  $k > n$  und  $f$  ein Polynom. □

**Korollar 73 (Satz von Liouville).** Jede beschr\u00e4nkte ganze Funktion ist konstant.

**Korollar 74 (Fundamentalsatz der Algebra).** Jedes nicht-konstante komplexe Polynom  $p(z)$  hat eine Nullstelle.

*Beweis.* Annahme:  $p$  hat keine Nullstelle. Dann ist  $f(z) = \frac{1}{p(z)}$  eine ganze Funktion. Ist  $n$  der Grad von  $p$ , so folgt aus Lemma 71 mit den dortigen Bezeichnungen

$$|f(z)| \leq \frac{1}{C|z|^n} \leq \frac{1}{CR^n} \text{ f\u00fcr } |z| \geq R.$$

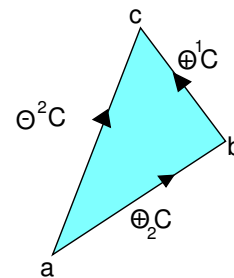
Weil  $f$  stetig ist, nimmt die Einschr\u00e4nkung auf  $\{z \mid |z| \leq R\}$  ihr Maximum an. Damit ist  $f$  beschr\u00e4nkt und nach dem Satz von Liouville konstant. Widerspruch! □

Ein Dreieck mit den Ecken  $a, b, c \in \mathbb{C}$  ist das singul\u00e4re Quadrat mit

$$C(s, t) = (1-s)a + s(1-t)b + stc.$$

Beachten Sie: Die Koeffizienten sind  $\geq 0$  mit Summe = 1, deshalb ist die Bildmenge von  $C$  gerade die konvexe H\u00fclle der drei Ecken.

Der Rand  $\partial C$  ist in der Abbildung skizziert, die Seite  ${}_1C$  ist auf den Punkt  $a$  zusammengeschrumpft.



**Satz 75 (Morera).** Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $\int_{\partial C} f dz = 0$  für jedes Dreieck  $C$  in  $G$ . Dann ist  $f$  holomorph.

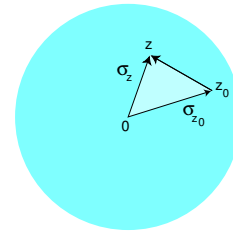
*Beweis.* Weil Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist, genügt es den Satz für kreisförmiges  $G$  zu beweisen, und wir nehmen o.E. an, dass 0 der Mittelpunkt des Kreises ist. Wir definieren auf  $G$  eine Funktion

$$F(z) := \int_{\sigma_z} f(\zeta) d\zeta,$$

wo  $\sigma_z(t) := tz$  für  $0 \leq t \leq 1$  die Strecke von 0 nach  $z$  ist. Wir wollen zeigen, dass  $F$  holomorph mit Ableitung  $f$  ist. Dann ist auch  $f$  holomorph.

Sind  $z_0, z \in G$ , so gilt für das Dreieck  $C$  mit den Ecken 0,  $z_0$ ,  $z$ :

$$\begin{aligned} {}^1C(t) &= (1-t)z_0 + tz, \\ {}_1C(t) &= 0, \\ {}^2C(t) &= tz = \sigma_z(t), \\ {}_2C(t) &= tz_0 = \sigma_{z_0}(t). \end{aligned}$$



Nach Voraussetzung ist

$$0 = \int_{\partial C} f(z) dz = \int_{{}^1C} f(z) dz - \int_{{}^2C} f(z) dz + \int_{{}_2C} f(z) dz.$$

Daher folgt

$$\begin{aligned} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{z - z_0} \left( \int_{\sigma_z} f(\zeta) d\zeta - \int_{\sigma_{z_0}} f(\zeta) d\zeta \right) = \frac{1}{z - z_0} \int_{{}^1C} f(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{z - z_0} \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz)(z - z_0) dt = \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz) dt \\ &= f(z_0) + \int_0^1 (f((1-t)z_0 + tz) - f(z_0)) dt. \end{aligned}$$

Mit der Stetigkeit von  $f$  folgt aus dem Schrankensatz 41, dass  $F$  holomorph mit  $F' = f$  ist. Also ist auch  $f$  holomorph.  $\square$

Ist  $f$  holomorph in  $G$ , so verschwindet nach dem Cauchyschen Integralsatz das Integral über den Rand eines jeden Dreiecks. Ist  $G$  konvex, so liefert der obige Beweis des Satzes von Morera die Existenz einer globalen Stammfunktion:

**Satz 76.** Jede holomorphe Funktion besitzt lokale Stammfunktionen. Jede holomorphe Funktion in einem konvexen Gebiet besitzt eine Stammfunktion.

**Korollar 77.** Jede ganze Funktion  $f$  ohne Nullstellen ist von der Form

$$f(z) = e^{h(z)}$$

mit einer ganzen Funktion  $h(z)$ .

*Beweis.* Aus  $f(z) = e^{h(z)}$  folgt durch Differenzieren  $f' = h'f$ , also  $h' = \frac{f'}{f}$ . Aber die holomorphe Funktion  $\frac{f'}{f}$  besitzt auf der konvexen Menge  $\mathbb{C}$  eine Stammfunktion  $h$ . Wir können diese außerdem so wählen, dass

$$e^{h(0)} = f(0) \tag{26}$$

ist. Dann ist

$$(fe^{-h})' = (f' - f\frac{f'}{f})e^{-h} = 0,$$

also  $f = \text{const} \cdot e^h$ , und wegen (26) ist die Konstante  $= 1$ .  $\square$

**Definition 78 (Nullstellenordnung).** Ist  $z_0$  eine Nullstelle der auf der offenen Menge  $G$  holomorphen Funktion  $f$ , so heißt

$$\text{Ord}(f, z_0) := \inf \left\{ k \in \mathbb{N} \mid f^{(k)}(z_0) \neq 0 \right\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

die *Ordnung* oder *Vielfachheit* der Nullstelle.

In einer Nullstelle  $z_0$  *unendlicher* Ordnung der holomorphen Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  verschwinden also alle Ableitungen von  $f$ , und nach dem Satz von Taylor ist  $f = 0$  auf einer Umgebung von  $z_0$ . Die Menge der Nullstellen unendlicher Ordnung ist also offen.

Um eine Nullstelle der *endlichen* Ordnung  $n$  hat man nach Taylor eine Darstellung

$$f(z) = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}(z - z_0)^k =: (z - z_0)^n g(z)$$

mit einer holomorphen Funktion  $g$ , für die  $g(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \neq 0$ . Insbesondere gibt es um  $z_0$  eine Umgebung, in der  $z_0$  die einzige Nullstelle von  $f$  ist: Die Nullstellen endlicher Ordnung sind *isoliert*. Weil die Menge aller Nullstellen von  $f$  abgeschlossen in  $G$  ist, ist daher die Menge der Nullstellen unendlicher Ordnung ebenfalls abgeschlossen.

Wir erinnern daran, dass ein *Gebiet* eine zusammenhängende offene Menge ist, und fassen zusammen:

**Satz 79.** Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph im Gebiet  $G$  und  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Dann gilt

(i)  $n = \infty$  und  $f = 0$  oder

(ii)  $n$  ist endlich, und es gibt eine auf  $G$  holomorphe Funktion  $g$  mit

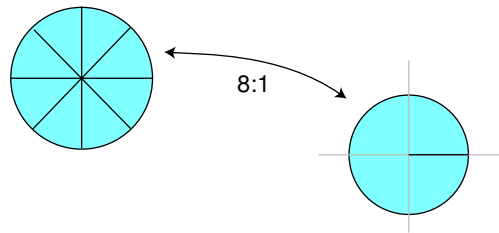
$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \text{ und } g(z_0) \neq 0, \tag{27}$$

Insbesondere ist  $z_0$  eine *isolierte* Nullstelle.

**Korollar 80 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen).** Sind  $f_1$  und  $f_2$  holomorph im Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  und stimmen sie überein auf einer Teilmenge von  $G$ , die in  $G$  einen Häufungspunkt besitzt, so folgt  $f_1 = f_2$  auf  $G$ .

*Beweis.* Besitzen die Nullstellen von  $f_1 - f_2$  in  $G$  einen Häufungspunkt, so ist dieser aus Stetigkeitsgründen eine Nullstelle von  $f_1 - f_2$ , und offenbar keine isolierte, also eine Nullstelle unendlicher Ordnung. Daher ist  $f_1 - f_2 = 0$ .  $\square$

Die Formel (27) kann man so interpretieren, dass  $f$  in der Nähe einer Nullstelle  $z_0$  der Ordnung  $n$  "im Wesentlichen" so aussieht, wie die Abbildung  $(z - z_0)^n$ , die den punktierten Kreis  $\{z \mid 0 < |z - z_0| < r\}$   $n$ -mal auf den punktierten Kreis  $\{w \mid 0 < |w| < r^n\}$  aufwickelt:



Wir wollen das noch präzisieren. Dazu zunächst ein Lemma.

**Lemma 81 (Wurzelfunktionen).** Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph im Gebiet  $G$  und sei  $z_0 \in G$  ein Punkt mit  $f(z_0) \neq 0$ . Dann besitzt  $f$  auf einer Umgebung von  $z_0$  für jedes  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  eine holomorphe  $n$ -te Wurzel.

Genauer: Ist  $a \in \mathbb{C}$  eine  $n$ -te Wurzel aus  $f(z_0)$  (wovon es  $n$  verschiedene gibt), so gibt es eine holomorphe Funktion  $g$  auf einer Umgebung  $U$  von  $z_0$  mit

$$g^n = f|_U \text{ und } g(z_0) = a.$$

*Beweis.* Die Ableitung der holomorphen Abbildung  $z \mapsto z^n$  hat in  $a$  keine Nullstelle, also gibt es nach dem Umkehrsatz eine offene Umgebung  $W$  von  $f(z_0)$  und darauf eine holomorphe Funktion  $w : W \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $w(f(z_0)) = a$  und  $w^n(z) = z$  für alle  $z \in W$ . Weil  $f$  stetig ist, gibt es eine Umgebung  $U \subset G$  von  $z_0$  mit  $f(U) \subset W$ , und wir setzen  $g := w \circ f|_U$ . Dafür ist dann  $g^n = w^n \circ f|_U = f|_U$  und  $g(z_0) = a$ .  $\square$

**Satz 82 (Nullstellensatz).** Sei  $z_0$  eine Nullstelle der endlichen Ordnung  $n$  der holomorphen Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ .

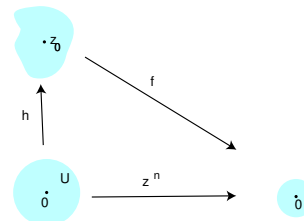
Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung

$$h : U \rightarrow V$$

einer offenen Kreisscheibe  $U$  vom Radius  $r$  um  $0$  auf eine offene Umgebung  $V$  von  $z_0$  in  $G$ , so dass auf  $U$

$$f(h(z)) = z^n.$$

Bis auf eine biholomorphe Transformation "sieht  $f$  bei  $z_0$  so aus wie  $z^n$  bei  $0$ ." Insbesondere nimmt  $f$  in  $V$  jeden Wert  $w$  mit  $0 < |w| < r^n$  genau  $n$ -mal an.



*Beweis.* Nach (27) und dem Lemma haben wir

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) = ((z - z_0)\tilde{g}(z))^n$$

mit einer holomorphen Funktion  $\tilde{g}$ . Die Abbildung

$$k(z) := (z - z_0)\tilde{g}(z)$$

hat Ableitung  $k'(z_0) = \tilde{g}(z_0) \neq 0$ , und nach dem Umkehrsatz bildet sie deshalb eine offene Umgebung von  $z_0$  biholomorph auf eine offene Umgebung  $U$  von  $k(z_0) = 0$  ab. Ohne Einschränkung ist  $U$  ein Kreis um 0. Aus  $f(z) = k(z)^n$  folgt für  $h := k^{-1}$  die Behauptung.  $\square$

**Korollar 83 (Satz von der Gebietstreue).** *Ist  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und nicht konstant auf dem Gebiet  $G$ , so ist  $f(G)$  ein Gebiet.*

*Beweis.*  $f(G)$  ist als Bild einer zusammenhängenden Mengen unter einer stetigen Abbildung zusammenhängend. Ist  $w_0 = f(z_0) \in f(G)$ , so ist  $z_0$  eine Nullstelle von  $f(z) - w_0$ . Die Ordnung ist endlich, weil  $f$  nicht konstant ist, und nach dem vorstehenden Satz bildet  $f(z) - w_0$  eine Umgebung von  $z_0$  surjektiv auf eine Umgebung von 0 ab. Also bildet  $f$  eine Umgebung von  $z_0$  surjektiv auf eine Umgebung von  $w_0$  ab. Damit ist jeder Punkt von  $f(G)$  ein innerer Punkt.  $\square$

**Korollar 84 (Maximumprinzip).** *Sei  $f$  holomorph in der offenen Menge  $G$ .*

- (i) *Ist  $G$  ein Gebiet und nimmt  $|f|$  in  $G$  sein Maximum an, so ist  $f$  konstant.*
- (ii) *Ist  $K \subset G$  kompakt, so nimmt die Einschränkung von  $|f|$  auf  $K$  ihr Maximum an, aber nicht in einem inneren Punkt von  $K$ .*

*Beweis.* Klar, weil  $f(G)$  für nicht-konstantes  $f$  nach dem Satz von der Gebietstreue eine offene Menge ist.  $\square$

**Satz 85 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip).** *Die offene Menge  $G \subset \mathbb{C}$  gehe bei Spiegelung an der reellen Achse in sich über.*

*Die Funktion  $f : G \cap \{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$  sei stetig,*

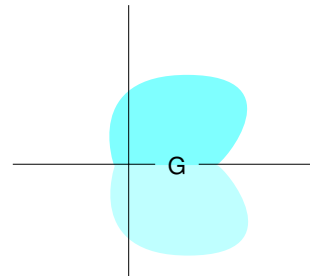
*auf  $G \cap \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$  holomorph und*

*auf  $G \cap \{z \mid \operatorname{Im} z = 0\}$  reellwertig.*

*Dann ist die auf  $G$  definierte Fortsetzung*

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{für } \operatorname{Im} z \geq 0, \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{für } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

*holomorph.*



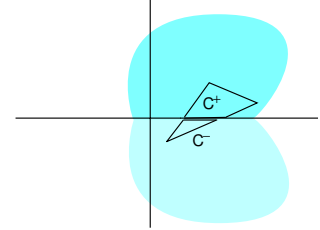
*Beweis.* Nach Voraussetzung ist  $\tilde{f}$  holomorph im Bereich  $\text{Im } z > 0$ , und weil die komplexe Konjugation anti- $\mathbb{C}$ -linear ist, ist  $\tilde{f}$  auch im Bereich  $\text{Im } z < 0$  holomorph. Wir wollen den Satz von Morera anwenden.

1. Fall. Wenn eine 2-Kette  $C$  die reelle Achse nicht trifft, ist  $\int_{\partial C} \tilde{f}(z) dz = 0$  nach dem Cauchyschen Integralsatz. Wegen der Stetigkeit von  $f$  gilt dasselbe für 2-Ketten, die in der abgeschlossenen oberen oder unteren Halbebene liegen. Insbesondere gilt das für Dreiecke, die in einer abgeschlossenen Halbebene liegen.

2. Fall. Ein Dreieck  $C$ , welches beide offenen Halbebenen trifft, bestimmt eine 2-Kette  $C^+ \oplus C^-$  aus zwei singulären Quadraten, die jeweils in einer abgeschlossenen Halbebene liegen, und für die

$$\int_{\partial C} \tilde{f}(z) dz = \int_{\partial C^+} \tilde{f}(z) dz + \int_{\partial C^-} \tilde{f}(z) dz$$

gilt. Das Integral von  $\tilde{f}$  über den Rand jedes dieser Quadrate verschwindet nach dem 1. Fall. Also ist auch hier  $\int_{\partial C} \tilde{f}(z) dz = 0$  und  $\tilde{f}$  nach Morera holomorph.



□

**Satz 86 (Lemma von Schwarz).** Sei  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorph mit  $f(0) = 0$ . Dann gilt

$$|f'(0)| \leq 1 \tag{28}$$

und

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D}. \tag{29}$$

Gilt in (28) oder für ein  $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$  in (29) Gleichheit, so ist  $f$  eine Drehung  $f(z) = az$  mit  $|a| = 1$ .

*Beweis.* Wir nehmen o.E. an, dass  $f \neq 0$ . Nach Satz 79 hat man eine Darstellung

$$f(z) = zg(z)$$

mit holomorphem  $g$ , für das  $g(0) = f'(0)$ .

Sei  $z \in \mathbb{D}$ . Nach dem Maximumprinzip gilt dann für alle  $r$  mit  $|z| \leq r < 1$

$$|g(z)| \leq \max_{|\zeta|=r} |g(\zeta)| = \max_{|\zeta|=r} \frac{|f(\zeta)|}{r} \leq \frac{1}{r}.$$

Mit  $r \nearrow 1$  folgt  $|g(z)| \leq 1$  und damit  $|f'(0)| \leq 1$  und  $|f(z)| \leq |z|$ . Bei Gleichheit gibt es ein  $z_0 \in \mathbb{D}$  mit  $|g(z_0)| = 1$ , d.h.  $|g|$  nimmt sein Maximum im Inneren von  $\mathbb{D}$  an und ist deshalb konstant. Dann ist  $f(z) = g(z_0)z$  eine Drehung.

□

**Satz 87 (Lemma von Schwarz-Pick).** Sei  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorph. Dann gilt für alle  $z \in \mathbb{D}$

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}. \tag{30}$$

Gleichheit für ein  $z$  impliziert Gleichheit für alle  $z$ , und das ist genau dann der Fall, wenn  $f$  eine Möbiustransformation von  $\mathbb{D}$  auf sich ist, vgl. Satz 31.

*Beweis.* Sei  $z_0 \in \mathbb{D}$ . Wir erinnern an Satz 31 und definieren

$$\phi_1(z) := \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}, \quad \phi_2(z) := \frac{z - f(z_0)}{1 - f(z_0)z}$$

und betrachten die holomorphe Abbildung  $F := \phi_2 \circ f \circ \phi_1$ . Offenbar ist  $F(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$  und  $F(0) = \phi_2(f(z_0)) = 0$ . Mit dem Lemma von Schwarz folgt

$$1 \geq |F'(0)| = |\phi_2'(f(z_0))f'(z_0)\phi_1'(0)|.$$

Nach Satz 31 erfüllt die Ableitung eines Möbius-Automorphismus  $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  die Gleichung

$$|\phi'(z)| = \frac{1 - |\phi(z)|^2}{1 - |z|^2}.$$

Das liefert in unserem Falle

$$|\phi_1'(0)| = \frac{1 - |z_0|^2}{1}, \quad |\phi_2'(f(z_0))| = \frac{1}{1 - |f(z_0)|^2},$$

also

$$1 \geq |F'(0)| = \frac{1 - |z_0|^2}{1 - |f(z_0)|^2} |f'(z_0)|$$

und damit die behauptete Ungleichung. Gilt Gleichheit für ein  $z_0$ , so ist  $F$  eine Drehung, also eine Möbiustransformation von  $\mathbb{D}$  auf sich, und daher ist auch  $f$  eine solche. Dass dann in (30) die Gleichheit gilt, haben wir bereits in Satz 31 nachgerechnet.  $\square$

**Korollar 88 (Automorphismen von  $\mathbb{D}$ ).** *Ist  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorph und bijektiv, also biholomorph, so ist  $f$  eine Möbiustransformation, also von der Form*

$$f(z) = e^{i\phi} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

mit  $z_0 \in \mathbb{D}, \phi \in \mathbb{R}$ , vgl. Satz 31. Nach dem letzteren Satz ist umgekehrt jede solche Möbiustransformation eine biholomorphe Abbildung von  $\mathbb{D}$  auf sich.

*Beweis.* Anwendung des Lemmas von Schwarz-Pick auf  $f^{-1}$  an der Stelle  $f(z)$  liefert

$$\frac{|1/f'(z)|}{1 - |z|^2} \leq \frac{1}{1 - |f(z)|^2}$$

oder

$$\frac{|1|}{1 - |z|^2} \leq \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2}.$$

Aus demselben Lemma angewendet auf  $f$  folgt daher Gleichheit, und  $f$  ist eine Möbiustransformation. Die spezielle Gestalt folgt dann aus Satz 31.  $\square$

## Die hyperbolische Ebene und eine differentialgeometrische Interpretation des Schwarz-Pick-Lemmas

Die Klassifikation der biholomorphen Automorphismen von  $\mathbb{D}$  ist sicher eine interessante Anwendung des Lemmas von Schwarz/Pick, aber die Bedeutung der Ungleichung (30) bleibt doch unklar. Sie wird erst durch eine differentialgeometrische Interpretation verständlich, wie ich nun erklären will.

Für stetig differenzierbare Kurven  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ist

$$L(c) := \int_a^b |\dot{c}(t)| dt$$

die übliche (Euklidische) Länge. Wenn man sich vorstellt, der Weg  $c$  führe durch verschiedenes "Gelände", in dem man leichter oder schwerer vorankommt, so kann man den Schwierigkeitsgrad vielleicht durch eine positive Funktion  $\rho$  beschreiben und die "gefühlte" Weglänge definieren als

$$L_\rho(c) := \int_a^b \rho(c(t)) |\dot{c}(t)| dt$$

Dieser Beschreibung liegt ein "isotropes" Gelände zugrunde: Wie gut man vorankommt hängt nur davon ab, wo man gerade ist, nicht auch, in welche Richtung man sich bewegt, sonst wäre  $\rho$  auch noch von der Richtung  $\dot{c}$  abhängig. Wir beschränken uns auf den isotropen Fall und betrachten für Kurven in  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$  eine ganz spezielle Funktion  $\rho$ :

$$L_\rho(c) := \int_a^b \frac{2}{1 - |c(t)|^2} |\dot{c}(t)| dt$$

heißt die *hyperbolische Länge* der Kurve  $c$  und  $\mathbb{D}$  mit dieser Längenmessung die *hyperbolische Ebene* oder auch die *Poincaré-Ebene*. Die Längenmessung nennt man auch die *Poincaré-Bergmann-Metrik*. Sie spielt als Modell der sogenannten *Nichteuklidischen Geometrie* eine wichtige Rolle in verschiedenen Bereichen der elementaren wie der Differentialgeometrie. Man erhält sie also durch Integration der hyperbolischen Geschwindigkeitsnorm

$$\|\dot{c}\|_c := \frac{2}{1 - |c|^2} |\dot{c}|.$$

Ist nun  $c$  eine Kurve in  $\mathbb{D}$  und  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorph, so gilt nach dem Lemma von Schwarz-Pick für die Euklidische Norm

$$\left\| \frac{d}{dt}(f \circ c) \right\|_{f \circ c} = \frac{2|f' \circ c|}{1 - |f \circ c|^2} |\dot{c}| \leq \frac{2}{1 - |c|^2} |\dot{c}| = \|\dot{c}\|_c$$

Wir erhalten

**Satz 89 (Geometrische Version des Schwarz-Pick-Lemmas).** *Holomorphe Abbildungen von  $\mathbb{D}$  in sich kontrahieren die hyperbolische Länge.*

**Korollar 90.** *Biholomorphe Automorphismen, also Möbiustransformationen von  $\mathbb{D}$  auf(!) sich, erhalten die hyperbolische Länge, sie sind Isometrien.*

Dieses Korollar besitzt eine Umkehrung: Ist  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  eine hyperbolische Isometrie, gilt also für alle  $z \in \mathbb{D}$  und  $v \in \mathbb{C}$

$$\frac{2|d_z f(v)|}{1 - |f(z)|^2} = \frac{2|v|}{1 - |z|^2},$$

so ist  $d_z f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  also bis auf einen Faktor  $\frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$  eine Euklidische Isometrie und deshalb auch winkeltreu, d.h. konform. Erhält  $f$  darüber hinaus auch die Orientierung, so ist  $f$  nach Satz 18 also holomorph und damit eine Möbiustransformation.

Wir fassen zusammen:

**Satz 91.** *Die folgenden Gruppen von Transformationen sind gleich:*

- Die Gruppe der biholomorphen Abbildungen von  $\mathbb{D}$  auf sich.
- Die Gruppe der Möbiustransformationen von  $\mathbb{D}$  auf sich.
- Die Gruppe der orientierungstreuen Isometrien der hyperbolischen Ebene auf sich.

Wir untersuchen nun noch folgende Fragen: Gibt es zu zwei Punkten  $z_1, z_2$  eine verbindende Kurve kürzester hyperbolischer Länge? Wenn "ja", wie lang ist diese? Wir nehmen o.E. an, dass  $z_1 \neq z_2$ . Weil Möbiustransformationen hyperbolische Isometrien sind, also die Kurvenlänge erhalten, können wir o.E. annehmen, dass  $z_1 = 0$  und  $z_2 = z \in \mathbb{R}, z > 0$ . Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$  eine stetig differenzierbare Kurve von 0 nach  $z$ . Weil wir auf der Suche nach kürzesten Kurven sind, nehmen wir an, dass  $c(t) = 0$  nur für  $t = a$ . Dann besitzt  $c$  eine Polarkoordinatendarstellung

$$c(t) = r(t)e^{i\phi(t)}$$

mit wenigstens auf  $]a, b]$  stetig differenzierbaren  $r$  und  $\phi$ . Wir finden

$$L_\rho(c) = \int_a^b \frac{2|\dot{r}(t) + ir(t)\dot{\phi}(t)|}{1-r(t)^2} dt \leq \int_a^b \frac{2|\dot{r}(t)|}{1-r(t)^2} dt,$$

weil  $\dot{r}(t)$  und  $ir(t)\dot{\phi}(t)$  im  $\mathbb{R}^2$  senkrecht aufeinander stehen. Die Kurve  $\tilde{c}(t) := r(t)$  ist also höchstens so lang, wie  $c$ , und man sieht leicht, dass sie genau dann am kürzesten ist, wenn  $r$  von  $r(a) = 0$  nach  $r(b) = z$  monoton wachsend ist. Daher ist die monoton parametrisierte Strecke  $c(t) = tz, 0 \leq t \leq 1$  eine kürzeste Kurve von 0 nach  $z$ . Ihre Länge ist

$$L_\rho(c) = \int_0^1 \frac{2}{1-t^2z^2} z dt = \int_0^z \frac{2}{1-u^2} du = \log \frac{1+z}{1-z}.$$

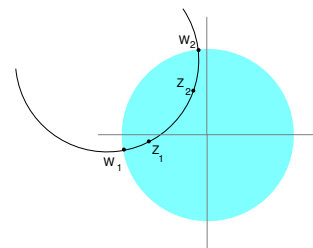
Nun ist

$$\frac{1+z}{1-z} = DV(0, +1, z, -1)$$

das Doppelverhältnis der vier Punkte  $0, 1, z, -1$  auf dem "reellen" Kreisdurchmesser. Eine Möbiustransformation  $f$  von  $\mathbb{D}$  auf sich, die  $0$  und  $z$  in Punkte  $z_1$  und  $z_2$  transformiert, bildet diesen Durchmesser ab auf das eindeutig bestimmte Kreissegment durch  $z_1$  und  $z_2$ ,

welches den Rand von  $\mathbb{D}$  orthogonal in Punkten  $f(-1) = w_1$  und  $f(+1) = w_2$  schneidet. Das Kreissegment zwischen  $z_1$  und  $z_2$  ist dann bei monotoner Parametrisierung eine kürzeste Kurve von  $z_1$  nach  $z_2$  und deren Länge ist wegen der Möbius-Invarianz des Doppelverhältnisses gegeben durch

$$L_\rho = \log DV(z_1, w_2, z_2, w_1) =: d_\rho(z_1, z_2).$$



Weil  $d_\rho(z_1, z_2)$  die hyperbolische Länge einer kürzesten verbindenden stetig differenzierbaren Kurve ist, ist klar, dass  $d_\rho$  die hyperbolische Ebene  $\mathbb{D}$  zu einem metrischen Raum macht.

Für  $z$  mit  $|z| \leq r < 1$  ist  $2 \leq \frac{2}{1-|z|^2} \leq \frac{2}{1-r^2}$ . Daraus folgt für  $z_1, z_2$  mit  $|z_j| \leq r$

$$2|z_1 - z_2| \leq d_\rho(z_1, z_2) \leq \frac{2}{1-r^2}|z_1 - z_2|. \quad (31)$$

Weil  $d_\rho(0, z) \rightarrow \infty$  für  $|z| \rightarrow 1$  und weil jede  $d_\rho$ -Cauchyfolge beschränkt ist, liegt also jede solche Cauchyfolge in einem Kreis von Radius  $r < 1$  und ist nach (31) dann auch eine Cauchyfolge in der Euklidischen Metrik. Sie ist also Euklidisch und deshalb nach (31) auch hyperbolisch konvergent: Die hyperbolische Ebene mit der Metrik  $d_\rho$  ist vollständig.

**Bemerkung.** Das Lemma von Schwarz stammt von 1869, die Verallgemeinerung und damit zusammen die Interpretation im Rahmen der hyperbolischen Geometrie ist von G. Pick 1916 veröffentlicht worden. Robert Osserman (Notices AMS 1999) wundert sich zu Recht darüber, dass dieser Zusammenhang weder Felix Klein noch Henri Poincaré aufgefallen ist.

Wir schließen mit einer Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes auf den Beweis eines klassischen Satzes der linearen Algebra. Der Beweis stammt von Charles A. McCarthy (The American Mathematical Monthly, Vol. 82, No. 4 (Apr., 1975), pp. 390-391). Dazu muss man folgendes wissen:

- Eine matrixwertige Funktion heißt holomorph, wenn sie in jeder Komponente holomorph ist.
- Matrixwertige Funktionen integriert man komponentenweise.

Der Cauchysche Integralsatz liefert dann also  $\int_{\partial C} B(z)dz = 0$  für jede holomorphe Funktion  $B : \mathbb{C} \supset G \rightarrow M(n \times n, \mathbb{C})$  und stetig differenzierbare 2-Kette  $C$  in  $G$ .

**Satz 92 (Cayley-Hamilton).** Ist  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$  eine komplexe Matrix mit charakteristischem Polynom  $\chi_A$ , so gilt  $\chi_A(A) = 0$ .

*Beweis.* Wir bezeichnen mit  $E$  die  $n$ -reihige Einheitsmatrix. Die Laurentreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{-(k+1)} A^k$$

mit Koeffizienten in  $M(n \times n, \mathbb{C})$  hat für  $|z| \geq 2\|A\|$  die konvergente Majorante  $\frac{1}{2\|A\|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ , ist also absolut konvergent, und erfüllt offenbar

$$(zE - A) \sum_{k=0}^{\infty} z^{-(k+1)} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} A^k - \sum_{k=0}^{\infty} z^{-(k+1)} A^{k+1} = E.$$

Also ist  $zE - A$  für  $|z| \geq 2\|A\|$  invertierbar mit

$$(zE - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-(k+1)} A^k.$$

Mit gliedweiser Integration folgt für alle  $j \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2\|A\|} z^j (zE - A)^{-1} dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2\|A\|} z^{j-(k+1)} A^k dz = A^j,$$

weil  $z^m$  in  $\mathbb{C}^*$  für alle  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$  eine Stammfunktion besitzt. Daraus folgt unmittelbar für jedes Polynom  $p(z)$  eine Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel:

$$p(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2\|A\|} p(z)(zE - A)^{-1} dz.$$

Nun wissen wir aus der Cramerschen Regel, dass  $A^{-1} = \det A^{-1} M(A)$ , wobei  $M(A)$  aus den Minoren von  $A$  gebildet, also ganz-rational in den Koeffizienten von  $A$  ist. Daher ist

$$(zE - A)^{-1} = \det(zE - A)^{-1} B(z)$$

mit in  $z$  ganzrationalen Komponenten von  $B$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \chi_A(A) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2\|A\|} \chi_A(z)(zE - A)^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2\|A\|} \det(zE - A) \det(zE - A)^{-1} B(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2\|A\|} B(z) dz = 0. \end{aligned}$$

□

## 6 Die Poissonformel und das Dirichlet-Problem im Kreis

- Wir leiten zunächst eine andere Version der Cauchyschen Integralformel für holomorphe Funktionen im Kreis her, die sogenannte Poissonformel, und geben für diese eine sehr anschauliche Interpretation.
- Weil die harmonischen Funktionen im Kreis nach dem Lemma von Poincaré gerade die Realteile von holomorphen Funktionen sind, erhalten wir eine analoge Formel für harmonische Funktionen.
- Wir betrachten mit dem Dirichletproblem im Kreis eines der fundamentalen Probleme der Theorie der partiellen Differentialgleichungen und damit der reellen Analysis, nämlich die Aufgabe, eine vorgegebene stetige Funktion auf dem Rand eines Kreises stetig auf die ganze Kreisscheibe so fortzusetzen, dass die Fortsetzung im Inneren harmonisch ist. Wir wollen die Eindeutigkeit und Existenz einer Lösung dieses Problems beweisen.

Wir betrachten eine holomorphe Funktion auf einer offenen Umgebung des abgeschlossenen Kreises  $K = \{z \mid |z| \leq R\}$  und ein  $z$  aus dem Inneren dieses Kreises. Die Cauchysche Integralformel liefert

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{iRe^{it}}{Re^{it} - z} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{Re^{it}}{Re^{it} - z} dt. \end{aligned}$$

Weil  $\frac{R^2}{\bar{z}} \notin K$  ist, liefert der Cauchysche Integralsatz

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - R^2/\bar{z}} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{Re^{it}}{Re^{it} - R^2/\bar{z}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{\bar{z}}{\bar{z} - Re^{-it}} dt. \end{aligned}$$

Subtraktion der beiden Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \left( \frac{Re^{it}}{Re^{it} - z} + \frac{\bar{z}}{Re^{-it} - \bar{z}} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2} dt \end{aligned}$$

und damit eine neue Version der Cauchyschen Integralformel, die nun allerdings wirklich an den Kreis gebunden ist:

**Satz 93 (Poissonsche Integralformel für holomorphe Funktionen).** Seien  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $R > 0$  und  $\{z \mid |z| \leq R\} \subset G$ . Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2} dt.$$

für alle  $z$  mit  $|z| < R$ .

Für  $z = 0$  liefert die Poissonformel eine *Mittelwertformel*

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) dt.$$

die man natürlich auch einfacher direkt aus der Cauchyschen Integralformel erhält. Für andere Punkte als den Mittelpunkt muss man die Funktionswerte von  $f$  auf dem Rand des Kreises mit einer Gewichtung mitteln, für die H.A. Schwarz eine sehr hübsche geometrische Interpretation gegeben hat:

Wir betrachten die Spiegelung der Kreislinie  $\partial K$  am Punkt  $z$ , die jedem  $\zeta \in \partial K$  den anderen Schnittpunkt  $\sigma(\zeta)$  der Sekante durch  $\zeta$  und  $z$  zuordnet. Dann ist

$$\frac{d}{dt} \sigma(Re^{it}) = \lambda R \underbrace{\frac{i\sigma(Re^{it})}{R}}_{\text{tangentialer Einheitsvektor}}$$

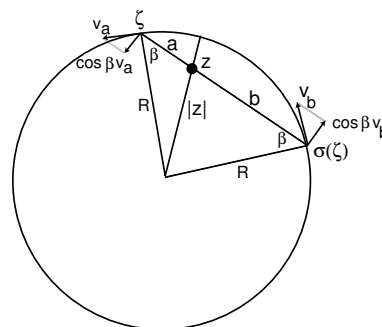
mit einer reellen Konstanten  $\lambda$ , welche das Verhältnis der Geschwindigkeiten von  $\sigma(Re^{it})$  zu  $Re^{it}$  beschreibt. (Die Geschwindigkeit von  $Re^{it}$  ist vom Betrag  $R$ , daher das  $R$  auf der rechten Seite.) Wir bestimmen  $\lambda$  geometrisch:

Nach dem Sekantensatz ist das Produkt  $ab$  der Sekantenabschnitte konstant und zwar ist

$$ab = (R + |z|)(R - |z|) = R^2 - |z|^2.$$

Diesen Wert erhält man nämlich, wenn die Sekante durch den Mittelpunkt geht. Das gesuchte Geschwindigkeitsverhältnis ist daher mit den Bezeichnungen der Abbildung

$$\frac{v_b}{v_a} = \frac{\cos \beta v_b}{\cos \beta v_a} = \frac{b}{a} = \frac{b^2}{ab} = \frac{|\sigma(\zeta) - z|^2}{R^2 - |z|^2}.$$



Damit erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \sigma(Re^{it}) = \frac{b}{a} i\sigma(Re^{it}) = \frac{b^2}{ab} i\sigma(Re^{it}) = \frac{|\sigma(Re^{it}) - z|^2}{R^2 - |z|^2} i\sigma(Re^{it}). \quad (32)$$

Wir mitteln nun die gespiegelte Funktion

$$\tilde{f}(Re^{it}) := f(\sigma(Re^{it}))$$

über den Kreis, d.h. wir berechnen  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(Re^{it}) dt$  und benutzen dazu die Substitution  $Re^{i\phi} := \sigma(Re^{it})$ . Dafür finden wir mit (32) nach Differentiation

$$iRe^{i\phi} d\phi = \frac{|\sigma(Re^{it}) - z|^2}{R^2 - |z|^2} i\sigma(Re^{it}) dt = \frac{|\sigma(Re^{it}) - z|^2}{R^2 - |z|^2} iRe^{i\phi} dt$$

und damit

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(Re^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\phi}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\phi} - z|^2} d\phi.$$

Wenn man also die Randwertverteilung von  $f$  zunächst an  $z$  spiegelt und dann über den Einheitskreis mittelt, erhält man den Wert  $f(z)$ .

Wir wollen nun Konsequenzen der Poissonformel für **harmonische Funktionen** untersuchen, also für zweimal stetig differenzierbare Funktionen  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .

Wir erinnern daran, dass jede harmonische Funktion auf einem konvexen Gebiet nach dem Poincaréschen Lemma der Realteil einer holomorphen Funktion ist.

**Satz 94 (Poissonsche Integralformel für harmonische Funktionen).** Sei  $u(z)$  harmonisch auf der offenen Menge  $G \subset \mathbb{C}$  und sei  $K := \{z \mid |z| < R\}$  eine in  $G$  enthaltene abgeschlossene Kreisscheibe. Dann gilt für alle  $z$  mit  $0 \leq |z| < R$ :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\phi} - z|^2} d\phi = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi}) \frac{Re^{i\phi} + z}{Re^{i\phi} - z} d\phi \right].$$

*Beweis.* Weil  $K$  kompakt ist, gibt es  $\epsilon > 0$  mit  $U := \{z \mid |z - a| \leq R + \epsilon\} \subset G$  und eine holomorphe Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} f = u$ . Die Behauptung folgt dann aus der Poissonformel für  $f$  durch Übergang zum Realteil.  $\square$

**Korollar 95 (Mittelwertsatz für harmonische Funktionen).** Seien  $u : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch,  $a \in G$ ,  $R > 0$  und  $K := \{z \mid |z - a| \leq R\} \subset G$ . Dann gilt

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + Re^{it}) dt. \quad (33)$$

*Beweis.* Für  $a = 0$  ist das eine unmittelbare Folgerung aus dem vorstehenden Satz. Für beliebiges  $a$  betrachte  $\tilde{u}(z) = u(z + a)$ .  $\square$

**Korollar 96 (Maximumprinzip für harmonische Funktionen).** Sei  $u : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch im Gebiet  $G$ . Nimmt  $u$  sein Maximum oder Minimum an, so ist es konstant.

*Beweis.* Nimmt  $u$  sein Maximum  $u_{max}$  in  $a \in G$  an, so ist wegen des Mittelwertsatzes  $u = u_{max}$  auf dem Rand einer jeden Kreisscheibe um  $a$ , die in  $G$  liegt. Damit ist die Menge  $\{z \mid u(z) = u_{max}\}$  offen. Da diese Menge aber auch abgeschlossen ist, ist sie ganz  $G$ .  $\square$

Bisher haben wir harmonische Funktionen auf offenen Mengen betrachtet. Im Rest dieses Abschnittes betrachten wir stetige Funktionen auf kompakten Mengen, die im Inneren der Menge harmonisch sind. Unser Augenmerk gilt also dem Randverhalten harmonischer Funktionen.

**Korollar 97 (Eindeutigkeitssatz für das Dirichlet-Problem).** Seien  $G$  ein Gebiet mit kompakter abgeschlossener Hülle  $\overline{G}$  und  $u_1, u_2 : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$  stetige, in  $G$  harmonische Funktionen. Ist  $u_1|_{\partial G} = u_2|_{\partial G}$ , so ist  $u_1 = u_2$ .

*Beweis.* Die Funktion  $u = u_1 - u_2$  verschwindet auf dem Rand von  $G$ . Sie ist stetig auf dem kompakten  $\overline{G}$ , nimmt also Maximum und Minimum an. Nimmt sie das Maximum in einem inneren Punkt an, so nimmt auch  $u|_G$  sein Maximum in einem inneren Punkt an und ist deshalb konstant, also  $u = 0$ . Ebenso für das Minimum. Nimmt aber  $u$  sein Maximum und Minimum auf  $\partial G$  an, so folgt ebenfalls  $u = 0$ .  $\square$

Wir wollen nun zeigen, dass diese Formel auch die **Existenz einer Lösung** des Dirichlet-Problems für die Kreisscheibe liefert. Sei  $K = \{z \mid |z| \leq R\}$  die Kreisscheibe vom Radius  $R$  und sei  $u_0 : \partial K \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig, d.h. stetig bis auf endlich viele Punkte, in denen

$u_0$  aber “links-” und “rechtsseitig” Grenzwerte haben soll. Für solche  $u_0$  definieren wir  $P_{u_0} : K \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$P_{u_0}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(Re^{i\phi}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\phi} - z|^2} d\phi = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(Re^{i\phi}) \frac{Re^{i\phi} + z}{Re^{i\phi} - z} d\phi \right]. \quad (34)$$

Wir betrachten die eckige Klammer rechts. Der Satz über die Differentiation unter dem Integral (vgl. Analysis III, Satz 41) verlangt, dass die gewünschte Ableitung eine integrierbare Majorante besitzt, was bei beschränkten Funktionen auf einem Kompaktum erfüllt ist. Also kann man an jeder Stelle  $|z| < R$  die partiellen Ableitungen der eckigen Klammer nach  $x$  und  $y$  unter dem Integral ausrechnen und natürlich sind dann die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt: die eckige Klammer ist eine in  $K$  holomorphe Funktion von  $z$ . Die Schwierigkeit beim Dirichlet-Problem ist der Nachweis der Stetigkeit am Rand.

Zunächst ist  $P$  ein lineares Funktional auf dem Vektorraum der stückweise stetigen Funktionen auf  $\partial K$ . Konstante Funktionen  $u_0 = c$  liefern  $P_{u_0} = c$ , wie man ohne Rechnung aus der Interpretation von H.A. Schwarz ersieht, und  $u_0 \geq 0$  impliziert  $P_{u_0} \geq 0$ . Das hat zur Folge, dass

$$m \leq u_0 \leq M \quad \implies \quad m \leq P_{u_0} \leq M. \quad (35)$$

Sei nun  $u_0$  stetig in  $z_0 = Re^{i\phi_0}$ . Wir wollen zeigen, dass dann

$$\lim_{z \rightarrow z_0} P_{u_0}(z) = u_0(z_0). \quad (36)$$

Wir können o.E. annehmen, dass  $u_0(z_0) = 0$ , sonst betrachten wir  $u_0 - u_0(z_0)$ .

Sei also  $\epsilon > 0$ . Dann gibt es ein  $\delta > 0$  mit

$$-\epsilon \leq u_0(Re^{i\phi}) \leq +\epsilon$$

für alle  $\phi \in [\phi_0 - \delta, \phi_0 + \delta]$ .

Nach (35) gilt für die stückweise stetige Funktion  $u_1 : \partial K \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$u_1(Re^{i\phi}) = \begin{cases} u_0(Re^{i\phi}) & \text{für } |\phi - \phi_0| \leq \delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

dann

$$-\epsilon \leq P_{u_1}(z) \leq +\epsilon \quad (37)$$

für alle  $z \in K$ .

Andrerseits ist für  $u_2 = u_0 - u_1$

$$P_{u_2}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\phi_0 + \delta}^{\phi_0 + 2\pi - \delta} u_0(Re^{i\phi}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\phi} - z|^2} d\phi. \quad (38)$$

Das ist – wieder nach dem zitierten Satz aus der Analysis – eine differenzierbare, also stetige Funktion von  $z$  auf dem Komplement des abgeschlossenen Kreissegmentes

$$C := \{Re^{i\phi} \mid \phi_0 + \delta \leq \phi \leq \phi_0 + 2\pi - \delta\}.$$

Weil  $z_0 \notin C$ , folgt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} P_{u_2}(z) = P_{u_2}(z_0) = 0, \quad (39)$$

denn wegen  $|z_0| = R$  ist der Integrand in (38) Null.

Also gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $|P_{u_2}(z)| \leq \epsilon$  für alle  $z \in K$  mit  $|z - z_0| < \delta$ . Für diese gilt dann wegen (37)

$$|P_{u_0}(z) - u_0(z_0)| = |P_{u_0}(z)| = |P_{u_1}(z) + P_{u_2}(z)| \leq 2\epsilon,$$

und (36) ist bewiesen.

Damit erhalten wir den Existenzsatz für die sogenannte 1. Randwertaufgabe im Kreis:

**Satz 98 (Existenzsatz für das Dirichlet-Problem im Kreis).** *Sei*

$$K := \{z \mid |z| \leq R\}$$

*die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius  $R$  und sei  $u_0 : \partial K \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig. Sei  $u := P_{u_0} : \overset{\circ}{K} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch (34). Dann ist  $u$  harmonisch in der offenen Kreisscheibe, und wenn  $u_0$  stetig in  $z_0 \in \partial K$  ist, gilt*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(z) = u_0(z_0).$$

Der vorstehende Beweis benutzt wesentlich die Monotonie von  $P_{u_0}$  und lässt sich daher nicht verallgemeinern auf holomorphe Funktionen an Stelle der harmonischen. Aber nicht nur der Beweis klappt nicht, auch der Satz lässt sich nicht auf den holomorphen Fall erweitern. Sonst könnte man eine beliebige stetige Funktion auf der Kreislinie stetig zu einer im Innere holomorphen Funktion erweitern. Betrachtet man reelle Randwerte und Möbius-transformiert man den Kreis auf die obere Halbebene, so könnte man damit zum Beispiel jede stetige reelle Funktion  $\tilde{u}_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompaktem Träger stetig zu einer auf der offenen oberen Halbebene holomorphen Funktion erweitern. Nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip erhält man dann eine holomorphe Erweiterung auf ganz  $\mathbb{C}$ . Wenn  $u_0$  kompakten Träger hat ist die nach dem Identitätssatz aber  $= 0$ . Wählt man  $u_0 \neq 0$ , so ergibt sich ein Widerspruch.

## 7 Singularitäten

### 7.1 Typen isolierter Singularitäten, meromorphe Funktionen

- Wenn einzelne Punkte im Definitionsbereich fehlen: Isolierte Singularitäten
- Die drei Typen isolierter Singularitäten
- Was bedeutet "isoliert"?

**Definition 99.** Eine *isolierte Singularität* einer holomorphen Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  auf einer offenen Menge  $G$  ist ein Punkt  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$ , für den es ein  $\epsilon > 0$  gibt, so dass  $f$  auf der punktierten  $\epsilon$ -Umgebung von  $z_0$  holomorph ist, d.h. so dass

$$U_\epsilon^*(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \epsilon\} \subset G.$$

Insbesondere ist dann also  $G \cup \{z_0\}$  offen.

**Definition 100.** Sei  $z_0$  eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion  $f$ .

- (i) Wir definieren die *Ordnung* von  $f$  in  $z_0$  durch

$$\text{Ord}(f, z_0) := \sup \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{-n} f(z) \text{ existiert in } \mathbb{C} \right\}.$$

Die Ordnung ist also eine ganze Zahl oder  $-\infty$  oder  $+\infty$

- (ii) Falls  $\text{Ord}(f, z_0) \geq 0$ , heißt  $z_0$  eine *hebbare Singularität* von  $f$ .
- (iii) Falls  $-\infty < m := \text{Ord}(f, z_0) < 0$ , heißt  $z_0$  ein *Pol* von  $f$  und  $-m$  seine *Polstellenordnung* oder *Vielfachheit*.
- (iv) Falls  $\text{Ord}(f, z_0) = -\infty$ , heißt  $z_0$  eine *wesentliche Singularität* von  $f$ .

**Beispiele 101.** (i) Ist  $f^\#$  holomorph auf  $G$  und  $z_0 \in G$ , so ist  $z_0$  trivialerweise eine isolierte Singularität von  $f := f^\#|_{G \setminus \{z_0\}}$ . Weil  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f^\#(z_0)$ , existiert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{-n} f(z)$$

für alle  $n \leq 0$ . Daher ist  $\text{Ord}(f, z_0) \geq 0$ , die Singularität also hebbbar. Wir werden später sehen, dass alle hebbaren Singularitäten so entstehen.

Hat  $f^\#$  in  $z_0$  eine  $k$ -fache Nullstelle, so gibt es eine in  $G$  holomorphe Funktion mit  $h(z_0) \neq 0$  und  $f^\#(z) = (z - z_0)^k h(z)$ . Dann existiert  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{-n} f(z)$  genau dann in  $\mathbb{C}$ , wenn  $k - n \geq 0$ , also  $n \leq k$ . Daher ist  $\text{Ord}(f, z_0) = k$  gerade die Ordnung der Nullstelle, und die neue Definition der Ordnung passt zur Definition der Nullstellenordnung.

- (ii) Für  $k > 0$  ist  $f(z) := \frac{1}{(z - z_0)^k}$  genau das, was wir uns unter einer Funktion mit einem  $k$ -fachen Pol an der Stelle  $z_0$  vorstellen. Hier existiert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{-n} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(z - z_0)^k}$$

genau dann in  $\mathbb{C}$ , wenn  $-n \geq k$ , also  $n \leq -k$ . Deshalb ist  $\text{Ord}(f, z_0) = -k$ .

(iii) Die Funktion

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

ist holomorph auf  $\mathbb{C}$  bis auf eine isolierte Singularität in 0. Aus der Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!z^k}$$

sieht man, dass  $\lim_{z \rightarrow 0} z^{-n} f(z)$  für kein  $n \in \mathbb{Z}$  existiert, so dass 0 eine wesentliche Singularität von  $f$  ist. □

**Lemma 102.** *Seien  $G \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $S$  die Menge seiner isolierten Singularitäten. Dann liegen in jeder kompakten Teilmenge von  $G \cup S$  höchstens endlich viele Punkte von  $S$ .*

*Beweis.* Wähle zu jedem  $z \in S$  eine offene Umgebung  $U_z$  in  $G \cup S$ , so dass  $f$  auf  $U_z \setminus \{z\}$  holomorph ist. Dann ist  $U_z \cap S = \{z\}$ . Die  $U_z$  bilden zusammen mit  $G$  eine offene Überdeckung von  $G \cup S$ , und zur Überdeckung einer beliebigen kompakten Teilmenge von  $G \cup S$  reichen endlich viele davon. □

**Definition 103.** (i) Wir sagen  $f$  ist holomorph auf  $G$  bis auf isolierte Singularitäten, wenn es eine Teilmenge  $S \subset G$  mit folgenden Eigenschaften gibt:

- (i)  $G$  und  $G \setminus S$  sind offen,
- (ii)  $f : G \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  ist holomorph,
- (iii) Alle Punkte von  $S$  sind isolierte Singularitäten von  $f$ .

- (ii) Eine auf  $G$  bis auf isolierte Singularitäten holomorphe Funktion heißt eine *meromorphe Funktion auf  $G$* , wenn alle Singularitäten hebbar oder Pole sind, d.h. wenn es keine wesentlichen Singularitäten gibt.

**Lemma 104.** *Ist  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und nicht konstant  $= 0$  im Gebiet  $G$ , so ist  $1/f(z)$  meromorph auf dem Gebiet  $G$ .*

*Beweis.*  $\frac{1}{f(z)}$  ist definiert und holomorph auf dem Komplement der Nullstellen von  $f$ . Diese sind isoliert und von endlicher Ordnung.

Ist  $z_0$  eine  $n$ -fache Nullstelle, so ist  $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$  mit holomorphem  $g$  und  $g(z_0) \neq 0$ . Dann hat aber

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^{-n} \frac{1}{g(z)}$$

in  $z_0$  einen  $n$ -fachen Pol. □

## 7.2 Laurentreihen. Funktionsverlauf bei isolierten Singularitäten

- Laurentreihen: Die Reihenentwicklung um isolierte Singularitäten
- Das Heben hebbarer Singularitäten
- Die wilden wesentlichen Singularitäten (Casorati-Weierstraß)
- $\infty$  als Singularität
- Klassifikation der meromorphen Funktionen auf  $\hat{\mathbb{C}}$

Beim Beweis des Satzes über Laurentreihen brauchen wir die Cauchysche Integralformel nicht nur für Kreise, sondern für Kreisringe. Auch wenn wir später mit dem Artinschen Homologiekriterium noch eine einfachere Herleitung bekommen (vgl. Beispiel 154), will ich doch schon hier einen "anständigen" Beweis dafür liefern, .

**Satz 105 (Cauchysche Integralformel für Kreisringe).** Ist  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph im Gebiet  $G$  und liegt der abgeschlossene Kreisring

$$A := \{z \in \mathbb{C} \mid R - r \leq |z - a| \leq R + r\}, \quad 0 < r < R$$

ganz in  $G$ , so gilt für jeden inneren Punkt von  $A$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=R+r} \frac{f(z) dz}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=R-r} \frac{f(z) dz}{z - z_0}.$$

*Beweis.* Zeigen Sie mittels einer Substitution der Form  $z = e^{i\phi} w + a$ , dass man o.E. annehmen kann, dass  $a = 0$  und dass  $z_0$  ein innerer Punkt des Kreises

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - R| \leq r\}$$

ist. Vgl. Abbildung unten.

Wir definieren eine Funktion  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\phi(s) = \arctan \frac{r \sin(\pi(1-s))}{R + r \cos(\pi(1-s))}.$$

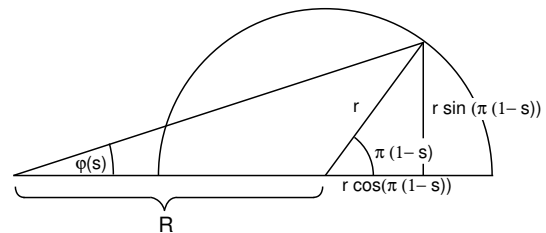
Dann gilt für alle  $s \in [0, 1]$

$$(R + r e^{i\pi(1-s)}) e^{i(2\pi - 2\phi(s))} = R + r e^{-i\pi(1-s)},$$

siehe die Abbildung.

Es gilt

$$\phi(0) = 0 = \phi(1).$$

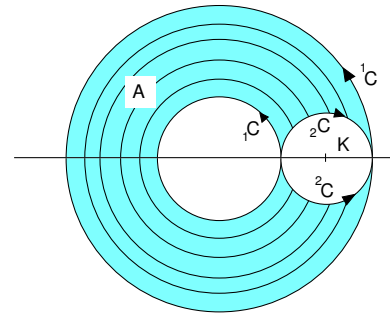


Wir definieren nun ein singuläres Quadrat  $C : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$C(s, t) = (R + r e^{i\pi(1-s)}) e^{it(2\pi - 2\phi(s))}.$$

Das Bild von  $C$  ist der abgeschlossene Kreisring  $A$  um 0 mit den Radien  $R-r, R+r$ , aus dem der offene Kreis  $\overset{\circ}{K}$  ausgeschnitten ist. Die Seiten von  $C$  sind

$$\begin{aligned} {}^1C(t) &= (R+r)e^{2\pi it}, \\ {}_1C(t) &= (R-r)e^{2\pi it}, \\ {}^2C(t) &= (R+re^{i\pi(1-t)})e^{i(2\pi-2\phi(t))} \\ &= R+re^{-i\pi(1-t)}, \\ {}_2C(t) &= R+re^{i\pi(1-t)}. \end{aligned}$$



Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist  $\int_{\partial C} f(z)dz = 0$  für jede auf einer offenen Umgebung des Bildes von  $C$  holomorphe Funktion  $f$ . Für solche gilt also

$$\int_{\partial A} f(z)dz = \int_{{}_1C} f(z)dz - \int_{{}_1C} f(z)dz = \int_{{}_2C} f(z)dz - \int_{{}_2C} f(z)dz = \int_{\partial K} f(z)dz.$$

Wenn  $f$  auf einer offenen Umgebung des Kreisrings  $A$  holomorph ist, liefert die Cauchysche Integralformel daher

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(z)dz}{z - z_0}$$

für jedes  $z_0$  im Innern des Kreises  $K$ . □

**Satz 106 (Laurentreihe im Kreisring).** Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph im Gebiet  $G$ . Für  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $0 \leq r < R \leq +\infty$  liege der offene Kreisring

$$A := \{z \mid r < |z - z_0| < R\}$$

in  $G$ . Dann gibt es eine doppelseitige Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  mit

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z - z_0)^k \quad \text{für alle } z \in A.$$

Diese Reihe heißt die Laurentreihe von  $f$  in  $A$ . (Vgl. Satz 107 für die Einzigkeit.)  
Genauer: Wählt man  $\rho$  mit  $r < \rho < R$  und setzt man

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \tag{40}$$

so ist diese Definition unabhängig von der Wahl von  $\rho$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k &\text{ ist konvergent für } |z - z_0| < R, \\ \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z - z_0)^k &\text{ ist konvergent für } |z - z_0| > r, \end{aligned}$$

und für  $z \in A$  gilt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k =: \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k.$$

**Bemerkungen.** 1. Im Fall, dass  $f$  in  $z_0$  eine isolierte Singularität hat, läßt es sich also in einer punktierten Kreisscheibe  $0 < |z - z_0| < R$  in eine Laurentreihe entwickeln. Dann nennt man

$$P_f(z) := \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z - z_0)^k$$

den *Hauptteil von  $f$  in  $z_0$* .

2. Offenbar ist  $P_f = 0$  genau dann, wenn  $z_0$  eine hebbare Singularität ist.

3. Der Hauptteil ist eine endliche, nicht-triviale Summe

$$P_f(z) := \sum_{k=-m}^{-1} a_k(z - z_0)^k, \quad a_{-m} \neq 0,$$

genau dann, wenn  $z_0$  ein  $m$ -facher Pol von  $f$  ist.

*Beweis.* Zunächst ist die Definition (40) nach Beispiel 60 unabhängig von der Wahl von  $\rho$ . Zu  $z \in A$  wählen wir  $r < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 < R$ . Sei

$$A' := \{z \mid \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\}.$$

Dann gilt nach der Cauchyschen Integralformel für den Kreisring

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Wir bezeichnen die Integrale auf der rechten Seite mit  $I_2, I_1$ . Dann folgt wie im Beweis des Satzes von Taylor 66

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k.$$

mit  $a_k$  wie in (40).

Entsprechend findet man wegen  $\left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| = \frac{\rho_1}{|z - z_0|} < 1$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho_1} \frac{f(\zeta)}{-(z - z_0) \left(1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)} d\zeta \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho_1} f(\zeta) \frac{(\zeta - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}} d\zeta \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-k}} d\zeta \right) (z - z_0)^{-k-1} \\ &= - \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta (z - z_0)^k \\ &= - \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z - z_0)^k \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

**Satz 107 (Einzigkeit der Laurentreihe).** Ist die Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

im Kreisring  $\{z \mid r < |z - z_0| < R\}$  konvergent, so definiert sie eine holomorphe Funktion  $f(z)$  und für die Koeffizienten gilt (40).

*Beweis.* Laurentreihen bestehen aus zwei Potenzreihen und sind deshalb auf kompakten Mengen gleichmäßig konvergent. Daher definieren sie eine holomorphe Funktion und man darf sie gliedweise integrieren. Es folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{m+1}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} a_k \int_{|z-z_0|=\rho} (z-z_0)^{k-m-1} dz = a_m,$$

weil alle Integranden mit  $k \neq m$  Stammfunktionen besitzen.  $\square$

**Beispiel 108.** Für  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  und  $z_0 = 0$  läßt sich der Satz über die Laurententwicklung auf die beiden folgenden Kreislänge anwenden:

$$A_1 := \{z \mid 0 < |z| < 1\}, \\ A_2 := \{z \mid |z| > 1\}.$$

Auf beiden ist  $f$  holomorph. Die Laurententwicklungen findet man am einfachsten mit Hilfe der geometrischen Reihe. Es ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

für  $z \in A_1$  und natürlich auch für  $z = 0$ . Das ist also die Taylorentwicklung um 0. In  $A_2$  hat man dagegen

$$f(z) = \frac{1}{-z(1-\frac{1}{z})} = \frac{-1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} (-1) z^k$$

$\square$

**Beispiel 109.** Bestimme die Laurentreihe von  $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$  auf

$$\{z \mid 0 < |z| < 2\pi\}.$$

In 0 hat  $e^z - 1$  eine einfache Nullstelle,  $f(z)$  also einen einfachen Pol, und die Laurentreihe von  $f$  ist von der Form

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k z^k.$$

Andererseits ist  $e^z - 1 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l!}$ , und deshalb folgt mit dem Cauchyprodukt

$$1 = f(z)(e^z - 1) = \left( \sum_{k=-1}^{\infty} a_k z^k \right) \left( \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l!} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=-1}^{m-1} \frac{a_k}{(m-k)!} z^m$$

und daraus eine Rekursionsformel für die  $a_k$ :

$$a_{-1} = 1, \quad \sum_{k=0}^m \frac{a_{k-1}}{(m-k+1)!} = 0$$

Sie liefert  $a_0 = -\frac{1}{2}$ . Die Zahlen  $B_k := k!a_{k-1}$  heißen die *Bernoullizahlen*. Mit ihnen gilt also

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^{k-1}. \quad (41)$$

Rechnen Sie nach, dass  $f(z) - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}$  eine ungerade Funktion ist. Daraus folgt (wegen des Shifts in den  $z$ -Potenzen der letzten Reihe), dass

$$B_{2n+1} = 0, n \geq 1.$$

Im übrigen schreibt sich die Rekursionsformel für die  $B_k$  als

$$0 = \sum_{k=0}^m \frac{B_k}{k!(m-k+1)!} = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k,$$

und damit

$$\sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} B_k = 0, \quad B_0 = 1.$$

Man findet

$$B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{12} = -\frac{691}{2730}.$$

Die Bernoullizahlen spielen zum Beispiel in der analytischen Zahlentheorie oder in der Topologie eine wichtige (und bis heute etwas rätselhafte) Rolle. Entdeckt wurden sie im Zusammenhang mit Potenzsummen der reziproken natürlichen Zahlen. Wir zeigen später (in Beispiel 163)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} = (-1)^{m-1} \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m}.$$

□

**Korollar 110.** Ist  $\rho$  gewählt wie im Satz und  $M = \sup \{|f(z)| \mid |z - z_0| = \rho\}$ , so gilt

$$|a_k| \leq \frac{M}{\rho^k} \quad (42)$$

für alle  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Satz 111 (Riemannscher Hebbbarkeitssatz).** Sei  $z_0$  eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $\text{Ord}(f, z_0) \geq 0$ , d.h.  $z_0$  ist hebbare Singularität.
- (ii) Es gibt  $\epsilon > 0$ , so dass  $U_\epsilon^*(z_0) \subset G$  und  $f|_{U_\epsilon^*(z_0)}$  beschränkt ist.
- (iii) Der Hauptteil der Laurententwicklung von  $f$  um  $z_0$  ist 0.
- (iv) Es gibt eine holomorphe Funktion  $\tilde{f} : G \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\tilde{f}|_G = f$ .

*Beweis.* Zu (i)  $\implies$  (ii). Nach Definition der Ordnung existiert für ein  $n \geq 0$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{-n} f(z) (z - z_0)^n,$$

und damit ist  $f$  auf einer punktierten Umgebung  $U_\epsilon^*(z_0)$  beschränkt.

Zu (ii)  $\implies$  (iii). Sei  $\epsilon > 0$  mit  $U_\epsilon^*(z_0) \subset G$  und sei  $|f| \leq M$  auf  $U_\epsilon^*(z_0)$ . Aus (42) folgt  $\overline{|a_k|} = 0$  für alle  $k < 0$ .

Zu (iii)  $\implies$  (iv). Nach Voraussetzung wird  $f$  in  $U_\epsilon^*(z_0)$  durch eine konvergente Potenzreihe um  $z_0$  dargestellt, die eine auf  $U_\epsilon(z_0)$  holomorphe Funktion  $\tilde{f}$  liefert und  $f$  in  $z_0$  holomorph ergänzt.

Zu (iv)  $\implies$  (i). Klar □

**Satz 112 (Polverhalten).** Seien  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $\epsilon > 0$  und  $z_0 \in \mathbb{C}$  eine isolierte Singularität von  $f$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i)  $z_0$  ist ein Pol von  $f$ .

(ii) Der Hauptteil der Laurententwicklung von  $f$  um  $z_0$  ist endlich, aber  $\neq 0$ : Fast alle, aber nicht alle, Koeffizienten  $a_k$  mit  $k < 0$  verschwinden.

(iii) In der Topologie von  $\hat{\mathbb{C}}$  ist

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty.$$

*Beweis.* Sei  $n := \text{Ord}(f, z_0)$  und sei  $U_\epsilon^*(z_0) \subset G$ .

Zu (i)  $\implies$  (ii). Nach Voraussetzung ist  $n < 0$  und der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{-n} f(z)$  existiert in  $\mathbb{C}$ . Also ist  $z_0$  eine hebbare Singularität von  $(z - z_0)^{-n} f(z)$ . Sei  $g : G \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $g|_{G \setminus \{z_0\}} = (z - z_0)^{-n} f(z)$ . Ist  $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  die Taylorentwicklung von  $g$  um  $z_0$ , so ist  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k+n}$  die Laurententwicklung von  $f$  um  $z_0$ . Offenbar ist der Hauptteil endlich und  $\neq 0$ .

Zu (ii)  $\implies$  (iii). Sei  $f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  mit  $-\infty < n < 0$  die Laurententwicklung von  $f$  in  $U_\epsilon^*(z_0)$  und  $a_n \neq 0$ . Dann ist  $g(z) := \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n}$  eine auf  $U_\epsilon(z_0)$  holomorphe Funktion mit  $g(z_0) = a_n \neq 0$ . Daher ist

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n g(z) = \infty.$$

Zu (iii)  $\implies$  (i). Die Ordnung von  $f$  in  $z_0$  ist offenbar  $< 0$ . Dass sie nicht  $-\infty$  sein kann, folgt aus dem nächsten Satz. □

**Satz 113 (Casorati-Weierstraß).** Eine holomorphe Funktion kommt in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität jedem Wert aus  $\mathbb{C}$  beliebig nah: Ist  $z_0$  eine wesentliche Singularität der holomorphen Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , so ist

$$f(G \cap \{z \mid |z - z_0| < \epsilon\})$$

für jedes  $\epsilon > 0$  dicht in  $\mathbb{C}$ .

*Beweis.* Andernfalls gibt es  $\epsilon > 0, w_0 \in \mathbb{C}$  und  $\delta > 0$ , so dass  $U^* := U_\epsilon^*(z_0) \subset G$  und

$$|f(z) - w_0| > \delta \text{ auf } U^*.$$

Dann ist

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w_0}$$

holomorph auf  $U^*$  mit einer isolierten Singularität in  $z_0$  und  $|g(z)| < \frac{1}{\delta}$ . Also ist die Singularität hebbbar: Es gibt eine holomorphe Funktion  $h$  auf  $U^* \cup \{z_0\}$  mit

$$\frac{1}{f(z) - w_0} \Big|_{U^*} = h|_{U^*}.$$

Es folgt  $f(z) = \frac{1}{h(z)} + w_0$ , und  $z_0$  ist eine hebbare Singularität oder ein Pol von  $f$ . Widerspruch!  $\square$

**Isolierte Singularität im Unendlichen** Ist  $z_0 \neq 0$  eine isolierte Singularität von  $f$ , so ist  $\frac{1}{z_0}$  eine isolierte Singularität von  $f\left(\frac{1}{z}\right)$ , weil  $z \mapsto \frac{1}{z}$  eine biholomorphe Abbildung von  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  auf sich ist. Weiter ist dann

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \frac{1}{z_0}} \left(z - \frac{1}{z_0}\right)^{-n} f\left(\frac{1}{z}\right) &= \lim_{\frac{1}{z} \rightarrow z_0} \left(z - \frac{1}{z_0}\right)^{-n} f\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right)^{-n} f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z_0 - z)^{-n} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} (zz_0)^n = (z_0)^{2n} \lim_{z \rightarrow z_0} (z_0 - z)^{-n} f(z). \end{aligned}$$

Daher ist  $\text{Ord}\left(f\left(\frac{1}{z}\right), \frac{1}{z_0}\right) = \text{Ord}(f(z), z_0)$ . In Analogie dazu definiert man nun, was es bedeuten soll, dass  $f$  in  $\infty$  eine isolierte Singularität besitzt, nämlich dass  $f(z)$  holomorph auf dem Komplement eines Kompaktums ist. Das ist gleichbedeutend damit, dass  $f\left(\frac{1}{z}\right)$  in 0 eine isolierte Singularität hat. Die Ordnung und der Typ der Singularität von  $f$  in  $\infty$  werden definiert als die Ordnung und der Typ der Singularität von  $f\left(\frac{1}{z}\right)$  in 0.

Ist  $f$  meromorph auf ganz  $\mathbb{C}$  und hat es in  $\infty$  einen Pol oder eine hebbare Singularität, so nennt man  $f$  meromorph auf der erweiterten Ebene  $\hat{\mathbb{C}}$ .

**Satz 114 (Der Körper der auf  $\hat{\mathbb{C}}$  meromorphen Funktionen).** Die auf  $\hat{\mathbb{C}}$  meromorphen Funktionen sind genau die rationalen Funktionen, also die Quotienten zweier Polynome.

*Beweis.* Nach Voraussetzung gibt es  $m \in \mathbb{N}$ , so dass  $\lim_{z \rightarrow 0} z^m f\left(\frac{1}{z}\right)$  existiert. Also gibt es ein  $r > 0$ , so dass  $z^m f\left(\frac{1}{z}\right)$  auf der Menge  $\{z \mid 0 < |z| < r\}$  beschränkt ist. Dann ist aber die offensichtlich auf  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion  $\frac{f(z)}{z^m}$  auf  $\{z \mid |z| > \frac{1}{r}\}$  beschränkt. Also liegen alle ihre Polstellen im Kompaktum  $\{z \mid |z| \leq \frac{1}{r}\}$ . Sie hat höchstens endlich viele Polstellen  $z_1, \dots, z_n$ , und wenn  $m_1, \dots, m_k$  deren Vielfachheiten bezeichnen, ist

$$g(z) := (z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_k)^{m_k} \frac{f(z)}{z^m}$$

nach Hebung der Singularitäten holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$ . Weil der letzte Faktor für großes  $|z|$  beschränkt ist, hat  $g(z)$  eine polynomiale Wachstumsschranke und ist nach Satz 72 ein Polynom. Damit ist  $f$  rational.  $\square$

Als Anwendung der Laurententwicklung beweisen wir noch eine komplexe Version der Regel von Bernoulli-de l'Hospital.

**Satz 115.** Seien  $f$  und  $g \neq 0$  holomorph in  $G \subset \mathbb{C}$  bis auf isolierte Singularitäten, sei  $z_0 \in G$  und sei

$$(i) \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0 = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

oder

$$(ii) \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z).$$

Dann existieren die folgenden Grenzwerte in  $\hat{\mathbb{C}}$  und es gilt:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

*Beweis.* Sei o.E.  $f \neq 0$ . Nach Voraussetzung haben  $f$  und  $g$  dann in  $z_0$  eine Nullstelle oder einen Pol. Daher gibt es  $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  und auf einer Umgebung  $U$  von  $z_0$  holomorphe Funktionen  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  mit

$$f(z) = (z - z_0)^m \tilde{f}(z), \quad g(z) = (z - z_0)^n \tilde{g}(z), \quad \text{für alle } z \in U \setminus \{z_0\}$$

und

$$\tilde{f}(z_0) \neq 0 \neq \tilde{g}(z_0).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{m(z - z_0)^{m-1} \tilde{f}(z) + (z - z_0)^m \tilde{f}'(z)}{n(z - z_0)^{n-1} \tilde{g}(z) + (z - z_0)^n \tilde{g}'(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{m-n} \frac{m \tilde{f}(z) + (z - z_0) \tilde{f}'(z)}{n \tilde{g}(z) + (z - z_0) \tilde{g}'(z)} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } m > n, \\ \frac{\tilde{f}(z_0)}{\tilde{g}(z_0)} & \text{für } m = n, \\ \infty & \text{für } m < n \end{cases} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{m-n} \frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)}. \end{aligned}$$

□

In der Literatur habe ich diese Version nirgends gefunden, vermutlich, weil die Grenzwertberechnung mittels der Laurententwicklung meistens genauso bequem ist.

Beachten Sie aber, dass die reelle l'Hospital-Regel für komplexwertige Funktionen problematisch ist: Für  $f(x) = x$  und  $g(x) = xe^{-i/x}$  findet man, weil  $|e^{-i/x}| = |\cos \frac{1}{x} - i \sin \frac{1}{x}| \leq 1$ , dass  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  und

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{-i/x} + ix^{-2}e^{-i/x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{i/x}}{x+i} = 0.$$

Aber  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{i/x}$  existiert nicht.

## 8 Analytische Fortsetzung

### 8.1 Analytische Fortsetzung längs Kurven

- Analytische Fortsetzung von “Stücken” holomorpher Funktionen längs stetiger Kurven
- Der Begriff des Funktionskeims
- Existenz und Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung

**Definition 116.** Ein *Funktionselement*  $(f, G)$  ist ein Paar bestehend aus einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  und einer holomorphen Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ .

Zwei Funktionselemente  $(f, G), (g, H)$  heißen äquivalent im Punkt  $a \in \mathbb{C}$ , wenn

$$a \in G \cap H \text{ und } f(z) = g(z) \text{ für alle } z \text{ in einer Umgebung von } a.$$

Das ist genau dann der Fall, wenn  $f$  und  $g$  im Entwicklungspunkt  $a$  dieselbe Taylorreihe haben. Hierdurch wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Funktionselemente gegeben.

Die Äquivalenzklassen aller  $(f, G)$  mit  $a \in G$  heißen *Keime holomorpher Funktionen in  $a$*  oder kurz (*Funktions*)*keime in  $a$* .

Den durch ein Funktionselement  $(f, G)$  in  $a \in G$  gegebenen Keim bezeichnen wir mit  $[f]_a$ , und wir definieren seine  $k$ -te Ableitung durch

$$[f]_a^{(k)} := [f^{(k)}]_a.$$

Offenbar ist das unabhängig vom Repräsentanten  $(f, G)$ . Ist weiter  $\phi = [f]_a$  ein Keim in  $a$ , so setzen wir für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\phi^{(k)}(a) := f^{(k)}(a).$$

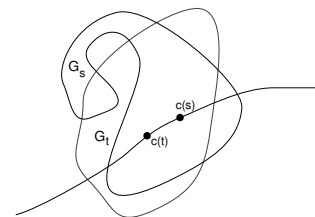
Auch das ist unabhängig vom gewählten Repräsentanten  $f$ .

**Definition 117.** Sei  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Kurve. Eine *analytische Fortsetzung längs  $c$*  ist eine Familie  $(\phi_t)_{t \in [0, 1]}$  von Keimen holomorpher Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle  $t \in [0, 1]$  ist  $\phi_t$  ein Keim in  $c(t)$ .
- Zu jedem  $t \in [0, 1]$  existieren ein  $\delta > 0$ , ein Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  und eine holomorphe Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass  $c(s) \in G$  und

$$\phi_s = [f]_{c(s)}$$

für alle  $s \in [0, 1]$  mit  $|s-t| < \delta$  (Glattheitsbedingung).



In diesem Fall sagt man, dass  $\phi_1$  aus  $\phi_0$  durch analytische Fortsetzung längs  $c$  hervorgeht.

**Bemerkungen.** Wenn man verlangt, dass die  $G$  nicht Gebiete sondern offene Kreisscheiben sind, erhält man eine äquivalente Definition!

Es ist eine schwierige Frage, ob sich ein Keim  $\phi_0$  längs  $c$  analytisch fortsetzen läßt, die Antwort ist keineswegs immer “Ja”. Wir werden aber sehen, dass im Fall der Fortsetzbarkeit das “Endergebnis”  $\phi_1$  eindeutig bestimmt ist. Und wir werden untersuchen, wie dieses Ergebnis vom Verlauf der Kurve abhängt.

Wir beschränken uns hier der einfachen Notation halber auf Kurven mit Parameterintervall  $[0, 1]$ . Es ist klar, wie man die analytische Fortsetzung längs Kurven  $c : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  definiert, und wir werden davon gelegentlich Gebrauch machen. Man zeigt leicht, die “Parameterinvarianz” der analytischen Fortsetzung: Ist  $h : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  stetig mit  $h(a) = 0, h(b) = 1$  und  $(\phi_t)_{t \in [0, 1]}$  eine analytische Fortsetzung von  $\phi_0 = \phi$ , so definiert

$$\tilde{\phi}_s := \phi_{h(s)} \text{ für } s \in [a, b]$$

eine analytische Fortsetzung von  $\tilde{\phi}_a = \phi$  längs  $c \circ h$ .

**Beispiel 118 (Triviale Fortsetzung).** Ist  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $c : [0, 1] \rightarrow G$  eine stetige Kurve in  $G$ , und setzt man  $\phi_t := [f]_{c(t)}$  für alle  $t \in [0, 1]$ , so definiert das eine analytische Fortsetzung von  $\phi_0$ , bei der aber nichts wirklich “fortgesetzt” wird. □

**Lemma 119.** Sei  $(\phi_t)_{t \in [0, 1]}$  eine analytische Fortsetzung längs  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann gibt es ein  $\delta > 0$  mit folgender Eigenschaft: Zu jedem  $t \in [0, 1]$  gibt es eine offene Kreisscheibe  $G$  und eine holomorphe Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass für alle  $s \in [0, 1]$  mit  $|s - t| < \delta$  gilt:

$$c(s) \in G \text{ und } \phi_s = [f]_{c(s)}.$$

(Beachten Sie, dass im Gegensatz zur Definition der analytischen Fortsetzung das  $\delta$  hier gleichmäßig für die ganze Kurve gilt.)

*Beweis.* Wähle zu jedem  $t \in [0, 1]$  eine offene Umgebung  $J_t \subset [0, 1]$ , eine Kreisscheibe  $G_t$  und ein holomorphes  $f_t : G_t \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $c(J_t) \subset G_t$  und  $\phi_s = [f_t]_{c(s)}$  für alle  $s \in J_t$ . Sei  $2\delta > 0$  eine Lebesguesche Zahl der offenen Überdeckung  $(J_t)_{t \in [0, 1]}$  von  $[0, 1]$  (vgl. Analysis 2, Korollar 58).

Ist nun  $s \in [0, 1]$ , so liegt  $]s - \delta, s + \delta[ \cap [0, 1]$  in einem  $J_t$ , und  $f = f_t : G = G_t \rightarrow \mathbb{C}$  leistet das Gewünschte. □

**Lemma 120.** Sei  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Kurve. Der Keim  $\phi_0 = [f]_{c(0)}$  in  $c(0)$  lässt sich genau dann längs  $c$  analytisch fortsetzen, wenn sich der Keim  $\phi'_0$  längs  $c$  analytisch fortsetzen lässt.

*Beweis.* Ist  $(\phi_t)_{t \in [0, 1]}$  eine analytische Fortsetzung längs  $c$  von  $\phi_0$ , so ist  $(\phi'_t)_{t \in [0, 1]}$  eine solche für die Ableitung.

Schwieriger ist die umgekehrte Richtung zu zeigen. Sei  $(\psi_t)_{t \in [0, 1]}$  eine analytische Fortsetzung längs  $c$  mit  $\psi_0 = \phi'_0$ . Wähle dazu  $\delta > 0$  wie im vorangehenden Lemma und eine Zerlegung  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  mit  $t_{i+1} - t_{i-1} < \delta$ . Dann gibt es zu jedem  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  eine Kreisscheibe  $G_i$  und eine holomorphe Funktion  $g_i : G_i \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$c(s) \in G_i \text{ und } \psi_s = [g_i]_{c(s)} \text{ für alle } s \in [t_{i-1}, t_{i+1}].$$

Sei  $f_1 : G_1 \rightarrow \mathbb{C}$  die Stammfunktion von  $g_1$  mit  $f_1(c(0)) = f(c(0))$ . Für  $i \in \{2, \dots, n-1\}$  definieren wir induktiv  $f_i : G_i \rightarrow \mathbb{C}$  als die Stammfunktion von  $g_i$  mit

$$f_i(c(t_{i-1})) = f_{i-1}(c(t_{i-1})).$$

Weil

$$[g_{i-1}]_{c(t_i)} = \psi_{t_i} = [g_i]_{c(t_i)}$$

ist  $g_{i-1} = g_i$  auf  $G_{i-1} \cap G_i$ , und sowohl  $f_{i-1}$  wie  $f_i$  ist dazu eine Stammfunktion. Weil aber  $f_{i-1}(c(t_{i-1})) = f_i(c(t_{i-1}))$ , ist auch

$$f_{i-1} = f_i \text{ auf } G_{i-1} \cap G_i. \quad (43)$$

Insbesondere ist

$$[f_{i-1}]_{c(t_{i-1})} = [f_i]_{c(t_{i-1})}.$$

Deshalb können wir definieren:

$$\phi_t := [f_i]_{c(t)} \text{ für } t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Wegen (43) ist die Glattheitsbedingung erfüllt und wir erhalten eine analytische Fortsetzung von  $\phi_0 = [f_1]_{c(0)} = [f]_{c(0)}$ .  $\square$

**Satz 121 (Eindeutigkeitssatz).** *Seien  $(\phi_t)_{t \in [0,1]}$  und  $(\tilde{\phi}_t)_{t \in [0,1]}$  zwei analytische Fortsetzungen längs der Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann gilt:*

$$\phi_0 = \tilde{\phi}_0 \implies \phi_1 = \tilde{\phi}_1$$

*Also ist die analytische Fortsetzung längs Kurven, wenn sie denn existiert, auch eindeutig.*

*Beweis.* Sei  $J := \{t \in [0, 1] \mid \phi_t = \tilde{\phi}_t\}$ . Wir zeigen, dass  $J$  offen und abgeschlossen in  $[0, 1]$  ist. Weil  $0 \in J$ , ist dann  $J = [0, 1]$  und damit  $1 \in J$ .

Sei also  $t \in J$  und seien  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  bzw.  $\tilde{f} : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe Funktionen, so dass  $\phi_s = [f]_{c(s)}$  bzw.  $\tilde{\phi}_s = [\tilde{f}]_{c(s)}$  für alle  $s$  nah bei  $t$ . Weil  $\phi_t = \tilde{\phi}_t$ , stimmen  $f$  und  $\tilde{f}$  auf einer Umgebung von  $c(t)$  überein und es folgt  $\phi_s = \tilde{\phi}_s$  für alle  $s$  nah bei  $t$ . Damit ist  $J$  offen.

Sei nun  $s = \lim_{i \rightarrow \infty} t_i$  der Grenzwert einer Folge  $(t_i)$  in  $J$  und seien  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  bzw.  $\tilde{f} : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe Funktionen, so dass  $\phi_t = [f]_{c(t)}$  bzw.  $\tilde{\phi}_t = [\tilde{f}]_{c(t)}$  für alle  $t$  nah bei  $s$ . Weil  $\phi_{t_i} = \tilde{\phi}_{t_i}$  folgt  $f(c(t_i)) = \tilde{f}(c(t_i))$  für alle  $i$ , und nach dem Identitätssatz ist  $f = \tilde{f}$  auf einer Umgebung von  $c(s)$ . Dann ist aber  $\phi_s = \tilde{\phi}_s$  und  $J$  auch abgeschlossen.  $\square$

Daraus folgt unmittelbar

**Korollar 122.** *Sind  $(\phi_t)_{t \in [0,1]}$  und  $(\psi_t)_{t \in [0,1]}$  analytische Fortsetzungen längs  $c : [0, 1] \rightarrow G$  mit  $\psi_0 = \phi'_0$ , so folgt*

$$\psi_t = \phi'_t \text{ für alle } t \in [0, 1].$$

Seien  $f : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $c : [0, 1] \rightarrow G$  eine stetige Kurve. Ist  $D \subset G$  eine Kreisscheibe um  $c(0)$ , so besitzt  $f|_D$  eine bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmte holomorphe Stammfunktion  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Weil sich  $[f]_{c(0)}$  trivial längs  $c$  analytisch fortsetzen läßt, gestattet nach Lemma 120 auch  $[F]_{c(0)}$  eine analytische Fortsetzung  $(\Phi_t)_{t \in [0,1]}$  längs  $c$  und  $\Phi_1$  ist durch  $[F]_{c(0)}$  nach Satz 121 eindeutig bestimmt. Das ermöglicht es, für holomorphe Funktionen das Kurvenintegral auch über *nur stetige*, nicht notwendig stetig differenzierbare Kurven zu erklären:

**Definition 123 (Integration über stetige Kurven).** Mit den obigen Bezeichnungen definieren wir

$$\int_c f(z) dz := \Phi_1(c(1)) - \Phi_0(c(0)).$$

**Lemma 124.** Die vorstehende Definition stimmt für stetig differenzierbares  $c$  mit der alten überein.

*Beweis.* Sei  $c$  stetig differenzierbar. Wir betrachten die Funktion  $I : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$I(t) := \Phi_t(c(t)).$$

Zu  $t \in [0, 1]$  gibt es eine holomorphe Abbildung  $H : G \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass für alle  $s$  nah bei  $t$  gilt  $c(s) \in G$  und  $[H]_{c(s)} = \Phi_s$ . Für diese  $s$  ist  $I(s) = H(c(s))$ . Also ist  $I$  stetig differenzierbar und  $I'(t) = H'(c(t))\dot{c}(t)$ . Weil  $[H']_{c(t)} = \Phi'_t = [f]_{c(t)}$  ist, folgt

$$I'(t) = f(c(t))\dot{c}(t)$$

und

$$\Phi_1(c(1)) - \Phi_0(c(0)) = I(1) - I(0) = \int_0^1 f(c(t))\dot{c}(t)dt.$$

□

**Beispiel 125.** Wir betrachten die analytische Funktion  $\log(z)$  auf dem Schlitzgebiet

$$G_0 := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0 \text{ oder } x > 0\}.$$

Längs jeder stetigen Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  läßt sich  $[\frac{1}{z}]_{c(0)}$  trivial fortsetzen. Ist  $c(0) \in G_0$ , so läßt sich nach Lemma 120 also auch  $\Phi_0 := [\log]_{c(0)}$  längs  $c$  analytisch fortsetzen. Die Fortsetzung  $(\Phi_t)_{t \in [0, 1]}$  liefert einen Keim  $\Phi_1$  an der Stelle  $c(1)$  und damit eine Äquivalenzklasse holomorpher Funktionen  $F_1$  auf Gebieten um  $c(1)$ . Für  $t$  nah bei 1 gilt

$$[F'_1]_{c(t)} = [\frac{1}{z}]_{c(t)}.$$

Nach dem Identitätssatz ist daher  $F'_1 = \frac{1}{z}$ . Ist insbesondere auch  $c(1) \in G_0$ , so folgt  $F_1(z) = C + \log z$  auf jeder zusammenhängenden offenen Menge, die  $c(1)$  enthält und auf der beide Seiten definiert sind.

Nach Definition 123 ist

$$F_1(c(1)) = \Phi_1(c(1)) = \log c(0) + \int_c \frac{dz}{z}.$$

Ist  $c$  stetig differenzierbar und  $c(1) = c(0)$ , so ist nach Satz 50

$$\int_{c|_{[0, 1]}} \frac{dz}{z} \in 2\pi i\mathbb{Z}.$$

Wir werden später sehen, dass das auch für Fortsetzungen längs Kurven gilt, die nur stetig sind. Für  $c(1) = c(0) \in G_0$  gibt es also ein  $n \in \mathbb{Z}$  mit

$$F_1(z) = \log z + F_1(c(1)) - \log c(1) = \log z + \int_c \frac{dz}{z} = \log z + 2\pi in.$$

□

**Beispiel 126.** Durch Heben der Singularität in 1 liefert  $(\frac{\log(z)}{1-z}, D)$  ein Funktionselement auf  $D = \{z \mid |z - 1| < 1\}$ . Fortsetzung längs der Kurve  $c(t) = e^{2\pi it}$  liefert den Quotienten der Fortsetzung von  $\log(z)$  nach  $1-z$ , aber eine Fortsetzung längs des vollen Kreises ist nicht möglich, weil der Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{2\pi i}{1-c(t)} = \infty$  wäre. Dieses Beispiel zeigt, dass man mit der analytischen Fortsetzung möglicherweise an Punkten scheitert, in denen man "früher" schon mal problemlos fortgesetzt hat.

□

## 8.2 Homotopie

- Homotopie von Kurven
- Die erste Homotopiegruppe = Fundamentalgruppe eines Gebietes
- Fortsetzung entlang homotoper Kurven führt zum selben Ergebnis (Monodromie)
- Vollständige analytische Funktionen und Riemannsche Flächen

In diesem Abschnitt sind Kurven und Homotopieabbildungen nur stetig. Wir betrachten offene Teilmengen  $G \subset \mathbb{C}$ , aber die meisten Definitionen und Sätze dieses Abschnitts gelten genauso für einen beliebigen topologischen Raum  $G$ .

**Definition 127 (Homotopie).** Zwei Kurven  $c_0, c_1 : [0, 1] \rightarrow G$  mit demselben Anfangspunkt und mit demselben Endpunkt heißen *homotop (in  $G$ )*, wenn es zwischen ihnen eine *Homotopie* gibt, also eine stetige Abbildung

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G,$$

für die

$$H(., 0) = c_0, \quad H(., 1) = c_1$$

und

$$\begin{aligned} H(0, \tau) &= c_0(0) = c_1(0) \text{ und} \\ H(1, \tau) &= c_0(1) = c_1(1) \text{ für alle } \tau \in [0, 1]. \end{aligned}$$

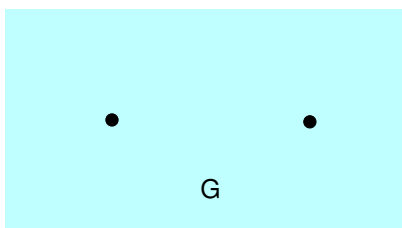
Eine geschlossene Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow G$  heißt *nullhomotop*, wenn sie homotop zur konstanten Kurve  $c_1(t) = c(0)$  ist.

Beachten Sie

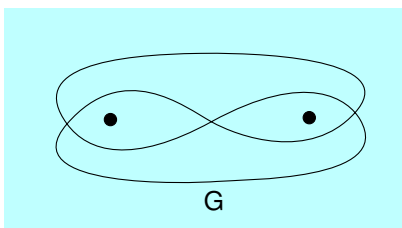
$$\partial H = {}^1H \ominus {}_1H \ominus {}^2H \oplus {}_2H = \ominus c_1 \oplus c_0$$

weil die beiden ersten (konstanten) Seiten wegfallen. Wenn man die Definition der Homologie auf stetige Abbildungen ausdehnt<sup>5</sup>, sind also homotope Kurven homolog. Die Umkehrung gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt:

**Beispiel 128.** Sei  $G$  die zweifach gelochte komplexe Ebene:

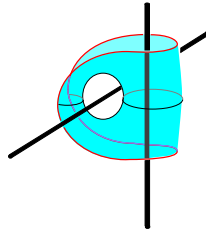


Darin betrachten wir die folgende Kurve:



<sup>5</sup>Die Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit war nur im Hinblick auf die Integration wichtig.

Es scheint plausibel, dass sich diese Kurve in  $G$  nicht zu einem Punkt zusammenziehen lässt, dass sie also in  $G$  nicht nullhomotop ist. Einen exakten Beweis kann man mit der Theorie der Überlagerungsräume gegeben, vgl. Skriptum *Topologie*. Andererseits ist diese Kurve in  $G$  nullhomolog. Zur anschaulichen Konstruktion einer 2-Kette mit dieser Kurve als Rand kann die folgenden Figur helfen:



Ein einfaches Kriterium für Nullhomologie werden wir im Abschnitt über die Umlaufzahl kennenlernen. □

**Definition 129 (Komposition von Kurven).** Für stetige Kurven  $c_1, c_2, c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $c_1(1) = c_2(0)$  definiert man die *Hintereinanderausführung*  $c_1c_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$c_1c_2(t) := \begin{cases} c_1(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ c_2(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

und die *rückwärts durchlaufene Kurve*  $c^{inv} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$c^{inv}(t) := c(1 - t).$$

Beachten Sie bei der Komposition die Reihenfolge. Anders als bei der Komposition von Abbildungen kommt erst die linke und dann die rechte Kurve zur Anwendung!

**Lemma 130.** Sei  $c : [0, 1] \rightarrow G$  eine stetige Kurve und sei  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  stetig mit  $\phi(0) = 0, \phi(1) = 1$ . Dann gilt:

- (i)  $cc^{inv}$  ist in  $G$  nullhomotop.
- (ii)  $c \circ \phi$  ist homotop zu  $c$ .

*Beweis.* Zu (i). Eine Homotopie ist gegeben durch

$$H(t, \tau) = \begin{cases} c(2t(1 - \tau)) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ c((2 - 2t)(1 - \tau)) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Zu (ii). Eine Homotopie ist gegeben durch

$$H(t, \tau) = c((1 - \tau)\phi(t) + \tau t).$$

□

**Lemma 131.** Seien  $c_1, c_2, c_3 : [0, 1] \rightarrow G$  mit  $c_1(1) = c_2(0)$  und  $c_2(1) = c_3(0)$ . Dann ist  $c_1(c_2c_3)$  in  $G$  homotop zu  $(c_1c_2)c_3$ .

*Beweis.* Nach Definition der Hintereinanderschaltung von Wegen ist

$$c_1(c_2c_3)(t) = \begin{cases} c_1(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ c_2(4t - 2) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ c_3(4t - 3) & \text{für } \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad c_1(c_2c_3)(t) = \begin{cases} c_1(4t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ c_2(4t - 1) & \text{für } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ c_3(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Setze  $a(\tau) := \frac{1}{2} - \frac{\tau}{4}$ ,  $b(\tau) := \frac{3}{4} - \frac{\tau}{4}$  und

$$H(t, \tau) = \begin{cases} c_1\left(\frac{1}{a(\tau)-0}(t-0)\right) & \text{für } 0 \leq t \leq a(\tau) \\ c_2\left(\frac{1}{b(\tau)-a(\tau)}(t-a(\tau))\right) & \text{für } a(\tau) \leq t \leq b(\tau), \\ c_3\left(\frac{1}{1-b(\tau)}(t-b(\tau))\right) & \text{für } b(\tau) \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Das liefert die gewünschte Homotopie.  $\square$

**Satz 132 (und Definition: Fundamentalgruppe).** Seien  $G \subset \mathbb{C}$  offen und  $z_0 \in G$ . In der Menge aller stetigen Kurven  $c : [0, 1] \rightarrow G$  mit  $c(0) = z_0 = c(1)$ , der Menge der Schleifen in  $z_0$ , definiert Homotopie eine Äquivalenzrelation und die Hintereinanderausführung von Kurven eine Multiplikation auf der Menge  $\pi_1(G, z_0)$  der Äquivalenzklassen, die diese Menge zu einer Gruppe macht. Sie heißt die Fundamentalgruppe von  $G$  mit Basispunkt  $z_0$ . Das neutrale Element ist die Klasse der konstanten Kurve, und die Klasse von  $c^{inv}$  liefert das Inverse der Klasse von  $c$ . Die Homotopieklasse von  $c$  wird mit  $[c] \in \pi_1(G, z_0)$  bezeichnet.

*Beweis.* Homotopie ist eine Äquivalenzrelation für die Schleifen. Nur die Transitivität erfordert eine kleine Rechnung. Selber machen!

Die Multiplikation ist wohldefiniert. Seien  $H_1, H_2$  Homotopien zwischen  $c_1$  und  $\tilde{c}_1$  bzw. zwischen  $c_2$  und  $\tilde{c}_2$ . Definiere

$$H(t, \tau) := \begin{cases} H_1(2t, \tau) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ H_2((2t - 1), \tau) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Für  $t = \frac{1}{2}$  ist

$$H_1(2t, \tau) = H_1(1, \tau) = z_0 = H_2(0, \tau) = H_2((2t - 1), \tau)$$

Daher ist  $H$  stetig. Rechnen Sie nach, dass

$$H(t, 0) = c_1c_2, \quad H(t, 1) = \tilde{c}_1\tilde{c}_2.$$

Die Multiplikation ist assoziativ. Vgl. Lemma 131.  $\square$

**Bemerkungen.** Die Fundamentalgruppe ist i.a. nicht abelsch, weshalb man die Gruppenoperation als Multiplikation und nicht als Addition einführt. Deshalb sollte man eigentlich besser *einshomotop* statt *nullhomotop* sagen. Tut man aber nicht.

Nach Definition hängt die Fundamentalgruppe von  $G$  vom gewählten Basispunkt  $z_0$  ab. Ist  $G$  aber ein Gebiet und  $z_1 \in G$  ein weiterer Punkt, so gibt es eine Kurve  $\sigma : [0, 1] \rightarrow G$  von  $z_1$  nach  $z_0$ , und  $[c] \mapsto [\sigma c \sigma^{inv}]$  definiert einen Isomorphismus von  $\pi_1(G, z_0)$  auf  $\pi_1(G, z_1)$ .

**Satz 133 (und Definition: Einfach zusammenhängend).** Sei  $G$  wegzusammenhängend und sei  $z_0 \in G$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Jede geschlossene Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow G$  ist in  $G$  nullhomotop.
- (ii) Für alle  $z_0$  in  $G$  ist  $\pi_1(G, z_0) = \{1\}$ .
- (iii) Für ein  $z_0$  in  $G$  ist  $\pi_1(G, z_0) = \{1\}$ .
- (iv) Je zwei Kurven  $c_0, c_1 : [0, 1] \rightarrow G$  mit gleichem Anfangspunkt und mit gleichem Endpunkt sind homotop in  $G$ .

In diesem Fall heißt  $G$  einfach zusammenhängend.

*Beweis.* Zu (i)  $\implies$  (ii). Trivial.

Zu (ii)  $\implies$  (iii). Trivial.

Zu (iii)  $\implies$  (iv). Seien  $c_0, c_1$  Kurven von  $p$  nach  $q$ . Wir wählen eine Kurve  $\sigma : [0, 1] \rightarrow G$  mit

$$\sigma(0) = z_0, \quad \sigma(1) = p.$$

Wir schreiben  $\simeq$  für *homotop in  $G$* . Weil nach dem Lemma 131 die Hintereinanderschaltung bis auf Homotopie assoziativ ist, verzichten wir in der folgenden Rechnung auf Klammern:

$$\begin{aligned} c_0 &\simeq c_0 c_1^{inv} c_1 \\ &\simeq \sigma^{inv} \sigma c_0 c_1^{inv} \sigma^{inv} \sigma c_1 \\ &\simeq \sigma^{inv} \underbrace{\sigma c_0 c_1^{inv} \sigma^{inv}}_{(*)} \sigma c_1. \end{aligned}$$

Die Kurve  $(*)$  ist eine Schleife in  $z_0$  und nach Voraussetzung nullhomotop. Daher ist

$$c_0 \simeq \sigma \sigma^{inv} c_1 \simeq c_1.$$

Zu (iv)  $\implies$  (i). Trivial. □

**Beispiele 134.** Konvexe Mengen  $G$  sind offensichtlich einfach zusammenhängend. Dasselbe gilt für sternförmige Mengen, d.h. solche, die die Verbindungsstrecken von einem festen "Sternpunkt" zu jedem anderen ihrer Punkte enthalten.

Für sternförmige Gebiete gilt also  $\pi_1(G, z_0) = \{1\}$ .

Das Schlitzgebiet  $\{z \mid \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ oder } \operatorname{Im}(z) \neq 0\}$  ist nicht konvex, aber sternförmig.

In der gelochten Ebene  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist der Kreis  $c(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$  nicht nullhomotop, weil das Integral von  $\frac{1}{z}$  darüber nicht verschwindet. Also ist dieser Kreis auch nicht nullhomotop, und  $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$  ist deshalb nicht trivial. Man kann zeigen, dass  $\pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$ .

Die Fundamentalgruppe der zweifach gelochten Ebene, vgl. Beispiel 128, ist nicht abelsch, sondern isomorph zur freien Gruppe mit zwei Erzeugenden. □

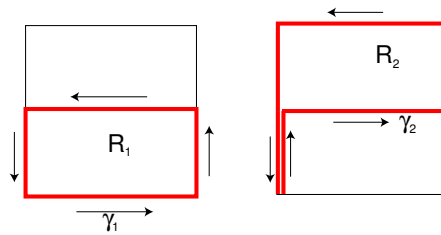
**Satz 135 (Monodromiesatz).** Seien  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $w \in G$  und  $[f]_w$  ein Funktionselement, das sich längs jeder in  $w$  beginnenden Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow G$  analytisch fortsetzen lässt. Sind dann  $c$  und  $\tilde{c}$  zwei in  $w$  beginnende homotope Kurven zum Punkt  $w^*$  und sind  $[f_1]_{w^*}$  und  $[\tilde{f}_1]_{w^*}$  aus  $[f]_w$  entstanden durch analytische Fortsetzung längs  $c$  bzw.  $\tilde{c}$ , so gilt

$$[f_1]_{w^*} = [\tilde{f}_1]_{w^*}.$$

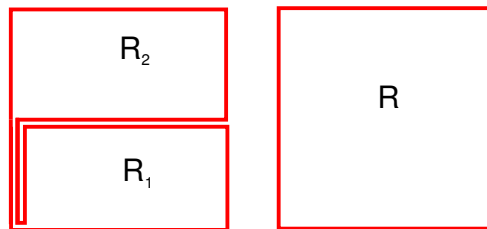
Verkürzt: Analytische Fortsetzungen längs homotoper Kurven führen zum selben Ergebnis.

*Beweis.* Sei  $H : [0, 1]^2 \rightarrow G$  eine Homotopie zwischen  $c =: c_0$  und  $\tilde{c} =: c_1$ .

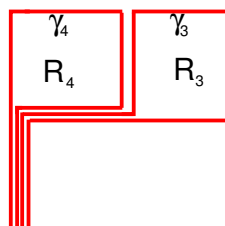
Jeder Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2 =: R$  mit  $\gamma(0) = (0, 0)$  entspricht eine Kurve  $H \circ \gamma$  in  $G$  und eine analytische Fortsetzung von  $[f]_w$  längs dieser Kurve. Wir nennen das kurz die Fortsetzung längs  $\gamma$ . Dem positiv durchlaufenen Rand  $\gamma_0$  von  $R$  entspricht die Fortsetzung längs  $c_0$ , dann längs einer konstanten Kurve in  $w^*$ , dann der rückwärtigen Fortsetzung längs  $c_1$  und schließlich längs einer konstanten Kurve in  $w$ . Es genügt zu zeigen, dass das Ergebnis dieser Fortsetzung wieder  $[f]_w$  ist, dann ist die rückwärtige Fortsetzung längs  $c_1^{inv}$  gleich der längs  $c_0^{inv}$  und damit sind auch die Vorwärts-Fortsetzungen gleich. Wir teilen  $R$  horizontal in der Mitte und betrachten die in der Abbildung dargestellten Kurven  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  um die Teilrechtecke  $R_1$  bzw.  $R_2$



Die Fortsetzung längs  $\gamma_1\gamma_2$  ist dann gleich der längs des Randes  $\gamma_0$  von  $R$ :



Wenn wir annehmen, dass die Fortsetzung längs  $\gamma_0$  nicht zum Ausgangselement zurückführt, dann gilt dasselbe für  $\gamma_1$  oder  $\gamma_2$ . Nehmen wir an, die Fortsetzung längs  $\gamma_2$  führt nicht zum Ausgang zurück. Dann halbieren wir  $R_2$  vertikal und führen dasselbe Argument durch. Wir erhalten zwei Schleifen  $\gamma_3, \gamma_4$ , von denen eine nicht zum Ausgang zurückführt.



Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhalten wir eine geschachtelte Folge

$$R \supset R_{n_1} \supset R_{n_2} \supset \dots$$

von kompakten Rechtecken, deren Durchmesser gegen 0 geht, so dass die analytische Fortsetzung längs des ‘gestielten’ Umlaufs  $\gamma_{n_k}$  um  $R_{n_k}$  nicht zum Ausgang zurückführt. Genauer sei  $\gamma_{n_k}$  wie folgt konstruiert: Wir setzen  $b_k := \sum_{j=1}^k \frac{1}{3^j} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^k}\right)$  und

- durchlaufen mit  $\sigma_k : [0, b_k] \rightarrow R$  den ‘Stiel’, so dass  $\sigma_k|_{[0, b_{k-1}]} = \sigma_{k-1}$  und
  - $\sigma_k|_{[b_{k-1}, b_k]}$  konstant ist, falls  $\sigma_{k-1}(b_{k-1})$  bereits die linke untere Ecke von  $R_{n_k}$  ist, und
  - $\sigma_k|_{[b_{k-1}, b_k]}$  andernfalls die ‘Stielverlängerung’ liefert.
- Auf dem Parameterintervall  $[b_k, 1 - b_k]$  durchlaufen wir den Rand von  $R_{n_k}$  und
- auf  $[1 - b_k, 1]$  den ‘Stiel’ rückwärts.

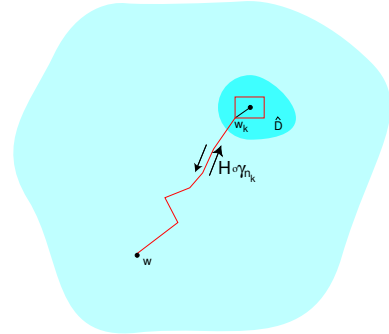
Der Durchschnitt der  $R_{n_k}$  enthält genau einen Punkt  $x_\infty$ , und die Konstruktion liefert eine stetige Kurve  $\sigma(t) := \sigma_k(t)$  für  $0 \leq t \leq b_k$  in  $R$  von 0 nach  $x_\infty$ . Wir setzen  $z_\infty := H(x_\infty)$ . Sei  $(\hat{f}, \hat{D})$  ein Funktionselement, so dass  $[\hat{f}]_{z_\infty}$  die analytische Fortsetzung von  $[f]_w$  längs  $\sigma$  (d.h. nach unserer Konvention längs  $H \circ \sigma$ ) ist.

Dann sieht  $H \circ \gamma_{n_k}$  für großes  $k$  so aus:

Die Schleife verläuft ganz in  $\hat{D}$  und die Fortsetzung von  $[f]_w$  längs  $H \circ \sigma_k$  ist  $[\hat{f}]_{w_k}$ , wo

$$w_k = H \circ \sigma(b_k) = H \circ \sigma_k(b_k)$$

ist. Die Fortsetzung von  $[\hat{f}]_{w_k}$  längs der Schleife ist dann trivial, führt also auf  $[\hat{f}]_{w_k}$  zurück. Das gilt dann auch für die ‘gestielte’ Schleife, und wir erhalten einen Widerspruch zu unserer Annahme.



□

**Beispiel 136.** Man kann zeigen, dass jede stetige Kurve in einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  in  $G$  homotop zu einem Polygonzug mit gleichem Anfangs- und Endpunkt ist, und dass man andererseits jeden Polygonzug stetig differenzierbar(!) parametrisieren kann. Darum liefert die analytische Fortsetzung eines Keims längs stetiger Kurven in  $G$  nach dem Monodromiesatz dieselben Funktionskeime wie die Fortsetzung längs stetig differenzierbarer Kurven.

□

**Definition 137 (Riemannsche Fläche eines Funktionskeims).** Sei  $\phi$  ein holomorpher Funktionskeim und  $\mathcal{R}_\phi$  die Familie aller Keime, die durch alle möglichen analytische Fortsetzung von  $\phi$  längs stetiger Kurven in  $\mathbb{C}$  entstehen. Dann heißt  $\mathcal{R}_\phi$  die von  $\phi$  erzeugte oder induzierte *Riemannsche Fläche*. Auf  $\mathcal{R}_\phi$  betrachten wir zwei Abbildungen, die *Fußpunktabbildung*

$$p_\phi : \mathcal{R}_\phi \rightarrow \mathbb{C}, [f]_z \mapsto z$$

und die von  $\phi$  erzeugte *vollständige analytische Funktion*

$$\mathcal{F}_\phi : \mathcal{R}_\phi \rightarrow \mathbb{C}, [f]_z \mapsto f(z).$$

Die vollständige analytische Funktion ist also wirklich eine Funktion. Ihren Definitionsbereich bringt sie gewissermaßen mit. Allerdings ist die Riemannsche Fläche einstweilen nur eine *Menge*, und es unklar, in welchem Sinne  $\mathcal{F}_\phi$  analytisch oder auch nur stetig sein sollte.

**Beispiel 138 (Die Riemannsche Fläche des Logarithmus).** Für den Keim  $[\log]_1$  des Hauptwertlogarithmus in 1 schreiben wir kurz  $\log$ . Ist  $(\phi_t)_{t \in [0,1]}$  eine analytische Fortsetzung von  $\log$  längs einer Kurve  $c$  und schreibt man  $\phi_t = [f_t]_{c(t)}$ , so definiert

$$e^{\phi_t} := [e^{f_t}]_{c(t)}$$

eine analytische Fortsetzung von  $e^{\log} = [z]_1$ . Aber die ist trivial. Ist daher  $\phi = [f]_{z_0} \in \mathcal{R}_{\log}$ , so ist

$$e^f(z) = z$$

für alle  $z$  nah bei  $z_0$ . Das Funktionselement  $f$  zum Keim  $\phi$  ist also ein lokales Inverses der Exponentialfunktion. Sein Funktionswert ist  $f(z_0) = \log |z_0| + i\alpha$ , wobei  $\alpha$  modulo  $2\pi$  eindeutig bestimmt ist. Der Wert hängt ab von der Kurve, die man für die analytische Fortsetzung benutzt hat, und weil jeder Umlauf um 0 der Winkel um  $2\pi$  erhöht oder vermindert, ist es klar, dass  $\mathcal{R}_{\log}$  die Keime *aller* lokalen Inversen von  $\exp$  enthält.

Wir betrachten nun die Abbildung

$$\eta : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{R}_{\log}, \quad w \mapsto [f_w]_{e^w}.$$

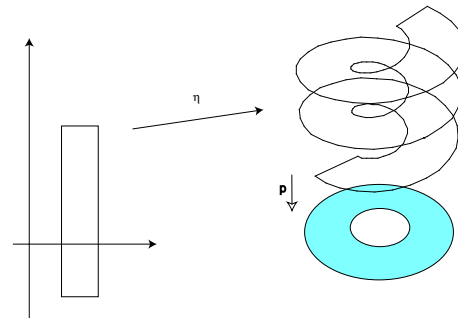
Dabei sei  $f_w$  “die” auf einer Umgebung von  $e^w$  definierte lokale Inverse der Exponentialfunktion mit  $f_w(e^w) = w$ . Offenbar ist  $\eta$  wohldefiniert und eine Bijektion, die es erlaubt,  $\mathcal{R}_{\log}$  mit  $\mathbb{C}$  zu identifizieren. Bezeichnet  $\mathcal{F}_{\log} : \mathcal{R}_{\log} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $[f]_z \mapsto f(z)$  die vollständige analytische Funktion zum komplexen Logarithmus, so folgt

$$\mathcal{F}_{\log}(\eta(w)) = \mathcal{F}_{\log}([f_w]_{e^w}) = f_w(e^w) = w.$$

Das hilft, sich  $\mathcal{R}_{\log}$  vorzustellen, wenn man noch beachtet, dass für die Fußpunktabbildung  $p : \mathcal{R}_{\log} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  gilt

$$p \circ \eta(w) = e^w.$$

Die Projektion  $p$  wickelt also  $\mathcal{R}_{\log}$  auf die punktierte Ebene genauso auf, wie die Exponentialfunktion das mit  $\mathbb{C}$  macht.



□

**Beispiel 139 (Die Riemannsche Fläche der Wurzel).** Die Funktion  $z \mapsto z^2$  hat auf einer Umgebung von 1 ein lokales Inverses, dessen Funktionskeim in  $1^2 = 1$  wir mit  $\sqrt{\phantom{x}}$  bezeichnen. Das Argument aus dem vorigen Beispiel zeigt, dass

$$f(z)^2 = z$$

für alle  $\phi = [f]_z \in \mathcal{R}_{\sqrt{\phantom{x}}}$ . Also ist  $f$  eine lokale Quadratwurzel, deren Vorzeichen vom bei der analytischen Fortsetzung benutzten Weg abhängt. Überlegen Sie, dass  $\mathcal{R}_{\sqrt{\phantom{x}}}$  die Keime *aller* lokalen Quadratwurzeln enthält. Beachten Sie auch, dass  $z \mapsto z^2$  in 0 nicht lokal invertierbar ist, so dass  $\mathcal{R}_{\sqrt{\phantom{x}}}$  keinen Keim in 0 enthält.

Wir definieren eine Abbildung

$$\eta : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{R}_{\sqrt{\cdot}}, w \mapsto \phi_w.$$

Dabei soll  $\phi_w$  der Keim eines lokalen Inversen der Quadratfunktion im Fußpunkt  $w^2$  sein, für den  $\phi_w(w) = w$ . Das liefert wie im vorangehenden Beispiel eine Bijektion, und es gilt

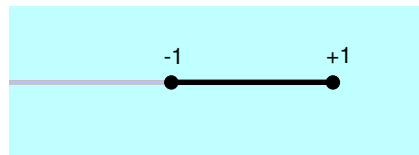
$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\sqrt{\cdot}}(\eta(w)) &= w, \\ p \circ \eta(w) &= w^2. \end{aligned}$$

□

**Beispiel 140.** Auf der Menge  $\{z \mid \operatorname{Re}(z) > 1 \text{ oder } \operatorname{Im}(z) \neq 0\}$  ist durch

$$\sqrt{z^2 - 1} = e^{\frac{1}{2} \log(z-1)} e^{\frac{1}{2} \log(z+1)}$$

eine holomorphe Funktion definiert, und wir setzen deren Keim in irgendeinem Punkt (z.B. 2) analytisch fort. Bei Überschreiten des Strahls  $\{z \mid z = x < -1\}$  springt in beiden Exponenten der halbe Logarithmus um  $\pi i$ , d.h. beide Faktoren der rechten Seite erben ein Minuszeichen: Die Funktion läßt sich auf dem Strahl holomorph ergänzen. Es bleibt nur die abgeschlossene Strecke zwischen  $-1$  und  $+1$  auf der reellen Achse als Lücke im Definitionsbereich.



Bei analytischer Fortsetzung über diese Lücke “wechselt die Wurzel das Vorzeichen”. Die Riemannsche Fläche ist in diesem Fall nicht mehr so einfach zu parametrisieren, sie “besteht” aus zwei zwischen  $-1$  und  $+1$  geschlitzten komplexen Ebenen, bei denen die gegenüberliegenden Ränder der Schlitzte verklebt sind.

□

### 8.3 Die Garbe $\mathcal{O}_G$

- Die Garbe der Keime holomorpher Funktionen
- Die Topologie der Riemannschen Fläche

In diesem Abschnitt sei  $G$  ein Gebiet.

**Definition 141.** (i) Wir nennen die Menge

$$\mathcal{O}_G := \{ \phi = [f]_z \mid z \in G \text{ und } \phi \text{ Keim einer holomorphen Funktion in } z \}$$

die *Garbe der Keime holomorpher Funktionen auf  $G$*  und die Abbildung

$$p : \mathcal{O}_G \rightarrow G, \quad [f]_z \mapsto z$$

die *Fußpunktabbildung* oder *-projektion* der Garbe.

(ii) Für ein Gebiet  $D \subset G$  und holomorphes  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$  setzen wir

$$N(g, D) := \{ [g]_z \mid z \in D \} \subset \mathcal{O}_G$$

und damit für  $\phi \in \mathcal{O}_G$

$$\mathcal{N}_\phi := \{ N(g, D) \mid z := p(\phi) \in D \text{ und } [g]_z = \phi \}.$$

**Lemma 142.** *Es gilt*

(i) Für  $N(g, D) \in \mathcal{N}_\phi$  ist  $\phi \in N(g, D)$ .

(ii) Für alle  $N_1 \in \mathcal{N}_{\phi_1}$ ,  $N_2 \in \mathcal{N}_{\phi_2}$ , und  $\phi_3 \in N_1 \cap N_2$  gibt es ein  $N_3 \in \mathcal{N}_{\phi_3}$  mit

$$N_3 \subset N_1 \cap N_2.$$

(iii) Zu jedem  $\phi \in N(g, D) \subset \mathcal{O}_G$  ist  $N(g, D) \in \mathcal{N}_\phi$ .

(iv) Zu allen  $\phi_1 \neq \phi_2$  gibt es  $N_1 \in \mathcal{N}_{\phi_1}$ ,  $N_2 \in \mathcal{N}_{\phi_2}$  mit

$$N_1 \cap N_2 = \emptyset.$$

Die Eigenschaften (i), (ii) bedeuten, dass die Familie  $(\mathcal{N}_\phi)_{\phi \in \mathcal{O}_G}$  eine Umgebungsbasis bilden.

*Beweis.* (i) und (iii) sind trivial.

Zu (ii). Ist  $N_j = N(g_j, D_j)$ ,  $j = 1, 2$  und  $\phi \in N_1 \cap N_2$ , so ist  $z := p(\phi) \in D_1 \cap D_2$  und  $[g_1]_z = \phi = [g_2]_z$ . Also ist  $g_1 = g_2$  auf der Zusammenhangskomponente  $D_3$  von  $D_1 \cap D_2$  in der  $z$  liegt und  $N_3 := N(g_1, D_3)$  erfüllt die Behauptung.

Zu (iv). Ist  $p(\phi_1) \neq p(\phi_2)$ , so wählen wir Repräsentanten  $(f_1, D_1)$  für  $\phi_1$  und  $(f_2, D_2)$  für  $\phi_2$  mit  $\overline{D_1} \cap \overline{D_2} = \emptyset$  und setzen  $N_j := N(f_j, D_j)$ .

Ist aber  $p(\phi_1) = p(\phi_2)$ , und sind  $(f_j, D_j)$  für  $j = 1, 2$  Repräsentanten von den verschiedenen Keimen  $\phi_j$ , so können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $D_1 = D_2 =: D$  ein (zusammenhängendes!) Gebiet ist. Wir setzen  $N_j := (f_j|_D, D)$ . Dann ist offenbar  $N_j \in \mathcal{N}_{\phi_j}$  und es gilt  $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ . Sonst hätten nämlich  $f_1$  und  $f_2$  in einem  $z \in D$  denselben Keim und wären nach dem Identitätssatz auf  $D$  gleich. Widerspruch!  $\square$

**Satz 143 (Topologie von  $\mathcal{O}_G$ ).** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet. Wir nennen  $U \subset \mathcal{O}_G$  offen, wenn es zu jedem  $\phi \in U$  ein  $N \in \mathcal{N}_\phi$  gibt, so dass  $N \subset U$ . Dann gilt:

- (i) Die Mengen  $N \in \mathcal{N}_\phi$  sind offen.
- (ii) Die offenen Mengen in  $\mathcal{O}_G$  bilden eine hausdorffsche Topologie.
- (iii) Die Fußpunktabbildung  $p : \mathcal{O}_G \rightarrow G$  ist stetig bezüglich dieser Topologie und ein lokaler Homöomorphismus.
- (iv) Die Abbildung  $\mathcal{F} : \mathcal{O}_G \rightarrow \mathbb{C}, [f]_z \mapsto f(z)$  ist stetig.

*Beweis.* Zu (i). Die  $N(g, D)$  sind offen nach Teil (iii) des Lemmas.

Zu (ii). Es ist klar, dass die leere Menge und  $\mathcal{O}_G$  sowie die Vereinigung beliebiger Familien offener Mengen offen sind. Sind  $U, V \subset \mathcal{O}_G$  offene Mengen und ist  $\phi \in U \cap V$ , so gibt es  $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_\phi$  mit  $N_1 \subset U, N_2 \subset V$ . Nach Teil (iv) des Lemmas gibt es dann ein  $N_3 \in \mathcal{N}_\phi$  mit  $N_3 \subset N_1 \cap N_2 \subset U \cap V$ . Also ist der Durchschnitt von je zwei offenen Mengen wieder offen. Damit sind die Axiome einer Topologie erfüllt. Die Hausdorff-Eigenschaft folgt aus Teil (iii) des Lemmas.

Zu (iii). Für jedes Funktionselement  $(g, D)$  und offenes  $H \subset G$  ist

$$p^{-1}(H) = \{[g]_z \mid z \in H\} = N(g|_{D \cap H}, D \cap H).$$

Daher ist  $p$  stetig. Für  $D \subset G$  offenbar  $p|_{N(g, D)}$  offenbar injektiv, also bijektiv auf  $D$ . Weil  $p(N(g, D)) = D$ , bildet  $p$  offene Mengen auf offene Mengen ab, und  $p|_{N(g, D)} : N(g, D) \rightarrow D$  ist ein Homöomorphismus.

Zu (iv). Sei  $V \subset \mathbb{C}$  offen. Für jedes Funktionselement  $(g, D)$  ist

$$N(g, D) \cap \mathcal{F}^{-1}(V) = \{[g]_z \mid g(z) \in V\} = N(g, g^{-1}(V)).$$

Damit ist  $\mathcal{F}^{-1}(V)$  als Vereinigung offener Mengen offen. □

**Bemerkung.** Das Gebiet  $G$  spielt in den obigen Betrachtungen eine Nebenrolle. Man könnte einfach den Fall  $G = \mathbb{C}$  und  $p : \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$  betrachten. Für ein Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  ist dann  $\mathcal{O}_G = p^{-1}(G)$  eine offene Teilmenge von  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ , die *Einschränkung* der Garbe  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$  auf  $G$ .

**Satz 144 (Analytische Fortsetzung und Kurven in  $\mathcal{O}_G$ ).** (i) Ist  $\hat{c} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$  eine stetige Kurve, so ist  $(\hat{c}(t))_{t \in [0, 1]}$  die analytische Fortsetzung von  $\hat{c}(0)$  längs  $c := p \circ \hat{c}$ .

(ii) Ist umgekehrt  $(\phi_t)_{t \in [0, 1]}$  die analytische Fortsetzung eines Keims  $\phi_0$  längs der Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ , so definiert  $\hat{c}(t) = \phi_t$  eine stetige Kurve in  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$  mit  $p \circ \hat{c} = c$  und  $\hat{c}(0) = \phi_0$ .

*Beweis.* Zu (i).  $\hat{c}(t)$  ist ein Keim an der Stelle  $c(t) = p(\hat{c}(t))$ . Ist  $\hat{c}(t) \in N(g, D)$ , so gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass  $\hat{c}(s) \in N(g, D)$  für alle  $s \in [0, 1]$  mit  $|s - t| < \delta$ . Das bedeutet aber  $\hat{c}(s) = [g]_{c(s)}$ , und das ist genau die Bedingung für die analytische Fortsetzung.

Zu (ii). Zu zeigen ist nur, dass  $\hat{c}$  stetig ist. Zu  $t \in [0, 1]$  gibt es ein  $\delta > 0$  und ein Funktionselement  $(g, D)$ , so dass  $c(s) \in D$  und  $\phi_s = [g]_{c(s)}$  für alle  $s \in [0, 1]$  mit  $|s - t| < \delta$ . Das bedeutet aber  $\hat{c}(t) = (p|_{N(g, D)})^{-1}(c(s))$  und damit die Stetigkeit von  $\hat{c}$ . □

Weil  $\mathcal{O}_G$  nach Satz 143 lokal homöomorph zu  $\mathbb{C}$  ist, ist es lokal wegzusammenhängend. Daher sind die Wegzusammenhangskomponenten von  $\mathcal{O}_G$  auch die Zusammenhangskomponenten. Der letzten beiden Sätze liefern daher als Folgerung

**Satz 145.** *Die Riemannsche Fläche des Keims  $\phi$  ist die  $\phi$  enthaltende Zusammenhangskomponente von  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ . Die vollständige analytische Funktion  $\mathcal{F}_{\phi} : \mathcal{R}_{\phi} \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig.*

Die Geschichte ist hier noch lange nicht zuende. Die Riemannschen Flächen haben nicht nur eine Topologie, sondern die Struktur einer analytischen Mannigfaltigkeit, und die vollständige analytische Funktion ist darauf holomorph. Weiter ist es interessant, Riemannsche Flächen durch sogenannte Verzweigungspunkte zu vervollständigen, indem man zum Beispiel die Abbildung  $\eta : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{R}_{\sqrt{\cdot}}$  ergänzt durch  $\eta(0) := [0]_0$ . Erzählt werden solche Fortsetzungen der Geschichte in Vorlesungen über Riemannsche Flächen.

## 9 Umlaufzahl und Homologie

- Definition der Umlaufzahl eines Zyklus
- Wann ist ein 1-Zyklus nullhomolog? Das Homologiekriterium von Artin
- Die Umlaufzahlversion der Cauchyschen Integralformel

Ein *1-Zyklus* war eine Verallgemeinerung einer geschlossenen Kurve, nämlich eine 1-Kette, deren Rand = 0 ist. Das bedeutet, dass jeder Punkt von  $\mathbb{C}$  gleich oft als Anfangspunkt wie als Endpunkt einer Kurve in der Kette auftritt, wobei die durch die Koeffizienten der Linearkombination gegebenen Multiplizitäten berücksichtigt werden müssen. Wir betrachten auch *stetige 1-Zyklen*, d.h. Linearkombinationen stetiger Kurven mit Rand = 0. Das Integral von *holomorphen* Funktionen über stetige 1-Zyklen ist dann definiert.

Für eine 1- oder 2-Kette  $C = \sum m_k c_k$  mit paarweise verschiedenen  $c_k$  definieren wir den Träger von  $C$  als die Menge

$$|C| := \bigcup \text{Bild } c_k,$$

wobei die Vereinigung über alle  $k$  gebildet wird, für die  $m_k \neq 0$  und  $c_k$  nicht konstant ist.

**Definition 146 (Umlaufzahl).** Für einen stetigen 1-Zyklus  $c$  in  $\mathbb{C}$  und  $z_0 \notin |c|$  definieren wir die Umlaufzahl als

$$\text{Uml}(c, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{z - z_0}.$$

**Beispiel 147.** Für den  $n$ -fach durchlaufenen Kreis  $c(t) = a + re^{2\pi i n t}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , ist

$$\text{Uml}(c, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{r 2\pi i n e^{2\pi i n t}}{r e^{2\pi i n t}} dt = n.$$

Für ein Rechteck  $R$  gilt

$$\text{Uml}(\partial R, z_0) = \begin{cases} 1, & \text{falls } z_0 \text{ innerer Punkt von } R, \\ 0, & \text{falls } z_0 \notin R. \end{cases}$$

vgl. Beispiel 65 bzw. den Cauchyschen Integralsatz. □

### Satz 148 (Umlaufzahl).

(i) Die Umlaufzahl  $\text{Uml}(c, z_0)$  eines stetigen 1-Zyklus ist ganzzahlig.

(ii) Ist  $c$  ein stetiger 1-Zyklus und liegen  $z_0$  und  $z_1$  in derselben Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{C} \setminus |c|$ , so gilt

$$\text{Uml}(c, z_0) = \text{Uml}(c, z_1).$$

(iii) Sind  $c$  und  $\tilde{c}$  in  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  homotope geschlossene Kurven, so gilt

$$\text{Uml}(\tilde{c}, z_0) = \text{Uml}(c, z_0).$$

(iv) Sind die stetigen 1-Zyklen  $c$  und  $\tilde{c}$  in  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  (stetig) homolog, so ist

$$\text{Uml}(\tilde{c}, z_0) = \text{Uml}(c, z_0).$$

*Beweis. Zu (i).* Sei zunächst  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetig differenzierbare Kurve, die  $z_0$  nicht trifft. Wir betrachten die Funktion

$$h(t) := (c(t) - z_0) \exp \left( - \int_{c|_{[0,t]}} \frac{dz}{z - z_0} \right) = (c(t) - z_0) \exp \left( - \int_0^t \frac{\dot{c}(\tau) d\tau}{c(\tau) - z_0} \right).$$

Die Ableitung ist

$$\dot{h}(t) = \left( \dot{c}(t) - (c(t) - z_0) \frac{\dot{c}(t)}{c(t) - z_0} \right) \exp \left( - \int_0^t \frac{\dot{c}(t) dt}{c(t) - z_0} \right) = 0.$$

Also ist  $h$  konstant vom Wert  $h(0) = c(0) - z_0$ . Daher ist

$$\exp \left( \int_c \frac{dz}{z - z_0} \right) = \frac{c(1) - z_0}{c(0) - z_0}.$$

Nach dem Beispiel 136 - vgl. auch Übungen - und dem Monodromiesatz 135 gilt das auch für stetige Kurven.

Ist nun  $c = \sum m_k c_k$  ein stetiger 1-Zyklus, so ist

$$\exp \left( \int_c \frac{dz}{z - z_0} \right) = \prod \left( \frac{c_k(1) - z_0}{c_k(0) - z_0} \right)^{m_k}$$

Weil in einem Zyklus jeder Punkt sooft als Endpunkt wie als Anfangspunkt einer Kurve vorkommt, stehen im Zähler und Nenner des Produktes dieselben Faktoren, es ist also = 1 und

$$\int_c \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

*Zu (ii).* Das Umlaufintegral ist stetig in  $z_0$  auf dem Komplement von  $|c|$  und deshalb nach (i) auf den Zusammenhangskomponenten konstant.

*Zu (iii).* Monodromiesatz.

*Zu (iv).* Cauchyscher Integralsatz für stetige Ketten, vgl. Anhang 16.1. □

**Satz 149 (Artinsches Homologiekriterium).** *Ein 1-Zyklus  $c$  ist in  $G$  nullhomolog genau dann, wenn  $\text{Uml}(c, a) = 0$  für jedes  $a$  im Komplement von  $G$ .*

Wenn  $c$  nullhomolog in  $G$  und  $a \notin G$  ist, ist  $c$  erst recht nullhomolog in  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ . Dann ist aber nach dem Cauchyschen Integralsatz  $\text{Uml}(c, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{z-a} = 0$ .

Wir bereiten den Beweis der Umkehrung durch drei Hilfssätze vor, von denen zumindest der erste auch sonst von Interesse ist. Für die Beweise erinnern wir daran, dass für ein singuläres Quadrat  $C : [0, 1]^2 \rightarrow G$  gilt:

$$\partial C = \oplus C(1, t) \ominus C(0, t) \oplus C(t, 1) \oplus C(t, 0).$$

Wir schreiben

$$c_1 \underset{G}{\sim} c_2,$$

wenn  $c_1$  und  $c_2$  in  $G$  homolog sind.

**Lemma 150.** *Sei  $c : [0, 1] \rightarrow G$  eine Kurve. Dann gilt*

(i) Für  $c^{inv}(t) := c(1-t)$  ist

$$\ominus c^{inv} \underset{G}{\sim} c$$

(ii) Für stetiges  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  mit  $\phi(0) = 0, \phi(1) = 1$  und  $c^\phi(t) = c(\phi(t))$  ist

$$c^\phi \underset{G}{\sim} c.$$

(iii) Für  $0 < \alpha < 1$  und

$$c_1(t) = c(t\alpha), \quad c_2(t) = c((1-t)\alpha + t)$$

gilt

$$c_1 \oplus c_2 \underset{G}{\sim} c.$$

*Im Kurzfassung: Orientierungserhaltende Umparametrisierung oder Unterteilung ändert die Homologiekategorie nicht, Umkehrung der Orientierung kehrt das Vorzeichen der Homologiekategorie um.*

*Beweis.* Rechnen Sie nach:

(i) Für  $C(s, t) = c((1-s)t)$  ist  $\partial C = \ominus c^{inv} \ominus c$ ,

(ii) Für  $C(s, t) = c((1-s)t + s\phi(t))$  ist  $\partial C = c^\phi \ominus c$ ,

(iii) Für  $C(s, t) = c(s + \alpha t(1-s))$  ist  $\partial C = c \ominus (c_1 \oplus c_2)$ .

□

Unter einem *linearen Kantenweg* wollen wir eine Kurve der Form  $c(t) = a + tb, 0 \leq t \leq 1$  verstehen, bei dem  $b$  reell oder rein-imaginär ist.

**Lemma 151.** Sei  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Kurve und  $R$  ein offenes Rechteck, welches  $c([0, 1])$  enthält.

Wir setzen

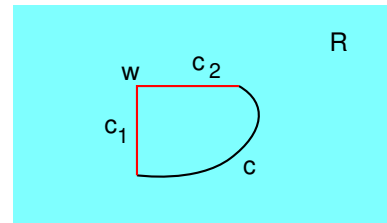
$$w := \operatorname{Re} c(0) + i \operatorname{Im} c(1)$$

und definieren zwei lineare Kantenwege

$$c_1(t) := (1-t)c(0) + tw \quad \text{und} \quad c_2(t) := (1-t)w + tc(1),$$

vgl. Abbildung. Dann gilt

$$c_1 \oplus c_2 \underset{R}{\sim} c.$$



$c$  ist also in  $R$  homolog zur Summe zweier linearer Kantenwege.

*Beweis.* Setze

$$C(s, t) := (1-s)c(t) + sc_2(t).$$

Weil  $R$  konvex ist, ist  $C([0, 1]) \subset R$ , und wir finden

$$\partial C = c_2 \ominus c \ominus \text{const} \oplus c_1.$$

□

**Lemma 152.** Ist  $c$  eine 1-Kette in  $G$ , so gibt es lineare Kantenwege  $c_1, \dots, c_n$  und Koeffizienten  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$ , so dass

$$c \underset{G}{\sim} m_1 c_1 \oplus \dots \oplus m_n c_n.$$

Jede 1-Kette in  $G$  ist homolog zu einer 1-Kette aus linearen Kantenwegen.

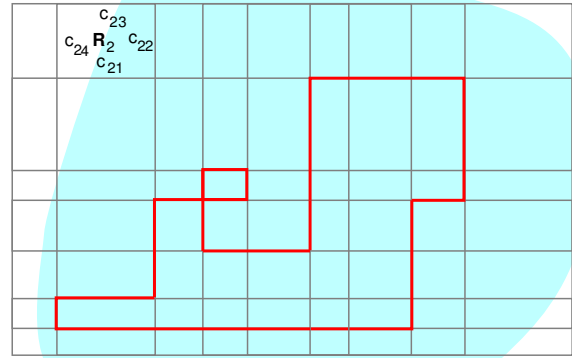
*Beweis.* Es genügt, das für eine Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow G$  zu zeigen. In diesem Fall besitzt  $c([0, 1])$  eine Überdeckung durch offene Rechtecke, die in  $G$  enthalten sind. Nach dem Lemma von Lebesgue gibt es dann eine Unterteilung  $0 = t_0 < \dots < t_m = 1$ , so dass jedes  $c([t_{k-1}, t_k])$  in einem der Rechtecke liegt. Aus Lemma 150 (iii) folgt durch Induktion

$$c \underset{G}{\sim} \tilde{c}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{c}_m$$

mit  $\tilde{c}_j(t) = c((1-t)t_{j-1} + tt_j)$ . Nach Lemma 151 ist jedes  $\tilde{c}_j$  homolog zur Summe zweier linearer Kantenwege.  $\square$

*Beweis des Artinschen Kriteriums.* Nach Lemma 152 ist  $c$  in  $G$  homolog zu einem Zyklus aus Kantenwegen, der dann um alle  $a \notin G$  dieselbe Umlaufzahl wie  $c$  hat. Also können wir o.E. annehmen, dass  $c$  nur aus nicht-trivialen linearen Kantenwegen besteht.

Wir betrachten ein abgeschlossenes Rechteck  $R$ , das  $c$  im Innern enthält und unterteilen dieses in kleine Rechtecke durch die achsenparallelen Geraden durch die Anfangs- und Endpunkte der in  $c$  vorkommenden Kantenweg. Nach Lemma 150 (iii) können wir annehmen, dass jeder Kantenweg in  $c$  eine volle Seite eines der kleinen Rechtecke ist. Wir bezeichnen diese Rechtecke und gleichermaßen die durch sie gegebenen singulären Quadrate mit  $R_j, 1 \leq j \leq n$  und deren Seiten mit  $c_{jk}, 1 \leq k \leq 4$ , so dass



$$\partial R_j = {}^1 R_j \ominus {}_1 R_j \oplus {}^2 R_j \oplus {}_2 R_j = c_{j1} \oplus c_{j2} \oplus c_{j3} \oplus c_{j4},$$

vgl. Abbildung. Wir wählen die Bezeichnungen so, dass alle  $c_{jk}$  positives Vorzeichen haben. Dann haben wir nach Lemma 150 (i) mit gewissen Koeffizienten  $m_{jk} \in \mathbb{Z}$

$$c \underset{G}{\sim} \sum_{\substack{j=1, \dots, n \\ k=1, \dots, 4}} m_{jk} c_{jk} =: \tilde{c}.$$

Es genügt also zu zeigen, dass  $\tilde{c}$  nullhomolog in  $G$  ist:

$$\tilde{c} \underset{G}{\sim} 0. \tag{44}$$

Wir wählen aus dem Inneren von jedem  $R_j$  einen Punkt  $a_j$  und definieren

$$C^* := \sum_{j=1}^n \text{Uml}(\tilde{c}, a_j) R_j, \quad c^* := \partial C^*. \tag{45}$$

Wir behaupten

$$c^* = \tilde{c}, \quad (46)$$

$$C^* \text{ ist 2-Kette in } G. \quad (47)$$

Damit ist der Satz dann bewiesen. Zunächst ist für alle  $i$

$$\text{Uml}(c^*, a_i) = \sum_j \text{Uml}(\tilde{c}, a_j) \underbrace{\text{Uml}(\partial R_j, a_i)}_{=\delta_{ij}} = \text{Uml}(\tilde{c}, a_i). \quad (48)$$

Das gilt auch, wenn  $a_i = a$  im Komplement von  $R$  liegt:

$$\text{Uml}(c^*, a) = 0 = \text{Uml}(\tilde{c}, a) \text{ für alle } a \notin R. \quad (49)$$

Wir nehmen nun an, dass  $c^* \ominus \tilde{c}$  einen Kantenweg  $c_{jk}$  mit Koeffizient  $m \neq 0$  enthält. Dieser Weg kommt in  $\partial R_j$  mit Koeffizient 1 und deshalb in

$$c^\# := c^* \ominus \tilde{c} \ominus m \partial R_j$$

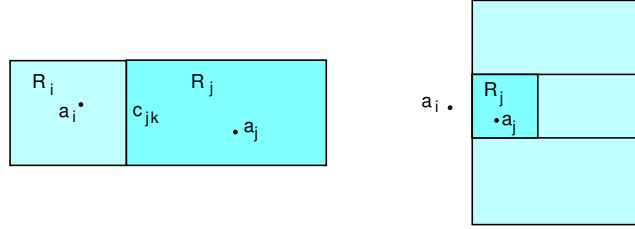
mit Koeffizient 0, also gar nicht vor.

Nach (48), (49) ist

$$\text{Uml}(c^\#, a_i) = -m \text{Uml}(\partial R_j, a_i) = -m \delta_{ij} \quad (50)$$

für  $i \in \{1, \dots, n\}$  oder  $a_i \notin R$ .

Nun ist  $c_{jk}$  entweder gemeinsame Kante von  $R_j$  und einem  $R_i$  oder es liegt auf dem Rand von  $R$ .



Im ersten Fall ist das Innere von  $R_j \cup R_i$  zusammenhängend im Komplement von  $|c^\#|$ , und deshalb liefert (50)

$$-m = \text{Uml}(c^\#, a_j) = \text{Uml}(c^\#, a_i) = 0, \quad (51)$$

also einen Widerspruch.

Liegt  $c_{jk}$  auf dem Rand von  $R$ , so gilt dasselbe Argument mit einem  $a \notin R$  an Stelle von  $a_i$ .

Also kommt in  $c^* \ominus \tilde{c}$  keine Kante  $c_{jk}$  mit Koeffizient  $\neq 0$  vor, und (46) ist bewiesen.

Enthält  $R_j$  einen Punkt  $a$  von  $\mathbb{C} \setminus G$ , so ist  $\text{Uml}(c, a) = 0$  und damit  $\text{Uml}(c, b) = 0$  für alle Punkte  $b$  in einer Umgebung von  $a$ , also auch für innere Punkte von  $R_j$ . Dann gilt das für alle inneren Punkte von  $R_j$ , insbesondere ist  $\text{Uml}(\tilde{c}, a_j) = \text{Uml}(c, a_j) = 0$ . Also kommt  $R_j$  in  $C^*$  nicht vor. Daraus folgt (47).  $\square$

**Definition 153.** Seien  $B \subset \mathbb{C}$  kompakt und  $c$  ein 1-Zyklus in  $\mathbb{C}$ . Wir sagen,  $B$  wird von  $c$  einfach berandet, wenn gilt

$$|c| \subset \partial B,$$

$$\text{Uml}(c, z) = 1 \text{ für alle } z \in \overset{\circ}{B},$$

$$\text{Uml}(c, z) = 0 \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \setminus B.$$

Liegt  $B$  in der offenen Menge  $G$ , so ist insbesondere nach dem Artinschen Kriterium also  $c \underset{G}{\sim} 0$ .

Einfache Beispiele bieten die offensichtlichen Randzyklen von Kreisen, Rechtecken oder (ungelochten) Kreisringen.

**Beispiel 154.** Sei  $B \subset \mathbb{C}$  ein kompakter Bereich, der von dem 1-Zyklus  $c$  einfach berandet wird. Seien  $K_1, \dots, K_n \subset B$  paarweise disjunkte kompakte Kreisscheiben im Inneren  $\overset{\circ}{B}$  von  $B$  mit Mittelpunkten  $z_1, \dots, z_n$ . Dann wird  $B \setminus \bigcup_{i=1}^n \overset{\circ}{K}_i$  von

$$c^* := c \ominus \partial K_1 \ominus \dots \ominus \partial K_n$$

einfach berandet. Beachten Sie dazu, dass

$$\text{Uml}(\partial K_i, a) = \delta_{ij} \text{Uml}(c, a) \text{ f\"ur alle } a \in \overset{\circ}{K}_j.$$

Liegt  $B$  in einem Gebiet  $G$  so folgt

$$c \underset{G \setminus \{z_1, \dots, z_n\}}{\sim} \partial K_1 \oplus \dots \oplus \partial K_n.$$

Ist etwa  $B$  ein kompakter Kreisring im Gebiet  $G$ , ist  $c = \partial B$  und  $K$  ein kompakter Kreis im Inneren von  $B$  mit Mittelpunkt  $z_0$ , so folgt  $c \underset{G \setminus \{z_0\}}{\sim} \partial K$ . F\"ur jede holomorphe Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  ist daher

$$\int_{\partial B} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = \int_{\partial K} \frac{f(z)dz}{z - z_0}.$$

Vergleiche dazu die Argumentation im Beweis der Cauchyformel f\"ur Kreisringe 105.

□

**Satz 155 (Umlaufzahlversion der Cauchyschen Integralformel).** Die Funktion  $f$  sei holomorph im Gebiet  $G$  und der 1-Zyklus  $c$  sei nullhomolog in  $G$ . Dann gilt f\"ur jedes  $z_0 \in G \setminus |c|$

$$\text{Uml}(c, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)dz}{z - z_0}.$$

Wird insbesondere die kompakte Menge  $B \subset G$  von  $c$  einfach berandet, so gilt f\"ur jedes  $z_0 \in \overset{\circ}{B}$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)dz}{z - z_0}.$$

*Beweis.* Sei  $K \subset G \setminus |c|$  eine Kreisscheibe um  $z_0$  und  $n := \text{Uml}(c, z_0)$ . Dann gilt

$$\text{Uml}(c \ominus n\partial K, a) = 0$$

f\"ur  $a = z_0$  und ebenso f\"ur  $a \notin G$ . Daher ist  $c \ominus n\partial K$  nach dem Satz von Artin in  $G \setminus \{z_0\}$  nullhomolog und

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{n\partial K} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = n f(z_0).$$

□

## 10 Residuensatz

- Integration um isolierte Singularitäten: das Residuum
- Der Residuensatz
- Nullstellen und Polstellen zählen
- Anzahl der Nullstellen und Hund an kurzer Leine: Satz von Rouché
- Reihen von Potenzen reziproker natürlicher Zahlen und Bernoullizahlen
- Auswertung reeller Integrale mit dem Residuensatz

**Definition 156 (Residuum).** Hat  $f$  in  $z_0$  eine isolierte Singularität, so ist es in einer gelochten Kreisscheibe  $\{z \mid 0 < |z - z_0| < R\}$  in eine Laurentreihe  $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$  entwickelbar. Der Koeffizient  $a_{-1}$  heißt *das Residuum* von  $f$  in  $z_0$ . Er wird mit  $\text{Res}(f, z_0)$  bezeichnet.

Für  $0 < r < R$  gilt also nach Satz 106

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz,$$

und diese Formel erklärt, warum gerade  $a_{-1}$  interessant ist.

**Lemma 157.** Seien  $G \subset \mathbb{C}$  offen,  $\Sigma \subset G$  eine Menge ohne Häufungspunkt in  $G$  und  $c$  ein in  $G$  nullhomologer 1-Zyklus in  $G \setminus \Sigma$ . Dann ist  $\text{Uml}(c, z) = 0$  für alle bis auf höchstens endlich viele Punkte von  $\Sigma$ .

*Beweis.* Weil  $\frac{1}{z-z_0}$  auf jeder Kreisscheibe im Komplement von  $z_0$  holomorph ist, ist die Umlaufzahl  $\text{Uml}(c, z_0) = 0$  für  $|z_0| > \max\{|z| \mid z \in |c|\}$ . Die Menge

$$\Sigma' := \{z \in \Sigma \mid \text{Uml}(c, z) \neq 0\}$$

liegt also in einer kompakten Kreisscheibe. Wäre  $\Sigma'$  eine unendliche Menge, so hätte sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt  $z_*$ , der nach Voraussetzung aber nicht in  $G$  liegt. Nach dem Artin-Kriterium ist  $\text{Uml}(c, z_*) = 0$ . Dann ist aber  $\text{Uml}(c, z) = 0$  für alle Punkte  $z$  in einer Umgebung von  $z_*$ . Widerspruch!  $\square$

**Satz 158 (Residuensatz).** Sei  $f$  im Gebiet  $G$  holomorph bis auf eine Menge  $\Sigma$  von isolierten Singularitäten, und sei  $c$  ein in  $G$  nullhomologer 1-Zyklus in  $G \setminus \Sigma$ . Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) dz = \sum_{z \in \Sigma} \text{Uml}(c, z) \text{Res}(f, z),$$

wobei die Summe nach Lemma 157 endlich ist.

Wird insbesondere die kompakte Menge  $B \subset G$  von  $c$  einfach berandet, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) dz = \sum_{z \in \Sigma \cap B} \text{Res}(f, z),$$

*Beweis.* Sei  $\Sigma' := \{z_1, \dots, z_n\}$  die Menge der Singularitäten mit Umlaufzahl  $\neq 0$ . Wir wählen um diese  $z_k$  paarweise disjunkte kompakte Kreisscheiben  $K_k \subset G$ , die jeweils nur die eine Singularität  $z_k$  enthalten, und betrachten

$$c^* := c \ominus \sum_{k=1}^n \text{Uml}(c, z_k) \partial K_k.$$

Dann gilt:

$$\text{Uml}(c^*, a) = \begin{cases} 0 & \text{für } a \notin G, \\ 0 & \text{für } a \in \Sigma', \\ 0 & \text{für } a \in \Sigma \setminus \Sigma'. \end{cases}$$

Nach dem Artinschen Kriterium ist deshalb  $c^*$  nullhomolog in  $G \setminus \Sigma$ , und weil  $f$  dort holomorph ist, folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c^*} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) dz - \sum_{k=1}^n \text{Uml}(c, z_k) \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_k} f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) dz - \sum_{k=1}^n \text{Uml}(c, z_k) \text{Res}(f, z_k). \end{aligned}$$

□

Eine Anwendung des Residuensatzes ist die Berechnung von Integralen, vgl. das explizite Beispiel 164 unten. Dafür ist die effektive Berechnung des Residuums wichtig. Häufig kann man dazu die mehr oder weniger explizite Laurententwicklung benutzen. Einen wichtigen Spezialfall liefert das folgende

**Beispiel 159.** Seien  $g, h : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $z_0$  eine einfache Nullstelle von  $h$ , also  $h(z) = (z - z_0)\tilde{h}(z)$  mit holomorphem  $h(z)$  und  $\tilde{h}(z_0) = h'(z_0) \neq 0$ . Also hat  $\frac{g}{h}$  um  $z_0$  eine Taylorentwicklung

$$\frac{g(z)}{\tilde{h}(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} + a_1(z - z_0) + \dots$$

und  $\frac{g}{h}$  hat um  $z_0$  die Laurententwicklung

$$\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}(z - z_0)^{-1} + a_1(z - z_0)^0 + \dots$$

Es folgt

$$\boxed{\text{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}}. \quad (52)$$

□

**Beispiel 160.** Ist  $f(z) = (z - z_0)^m h(z)$  für ein  $m \in \mathbb{Z}$  und eine holomorphe Funktion  $h(z)$  mit  $h(z_0) \neq 0$ , so ist also  $m = \text{Ord}(f, z_0)$  die Null- oder (negative) Polstellenordnung von  $f$  in  $z_0$ . Wir finden

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z - z_0)^{m-1}h(z) + (z - z_0)^m h'(z)}{(z - z_0)^m h(z)} = \frac{mh(z) + (z - z_0)h'(z)}{(z - z_0)h(z)},$$

und nach dem letzten Beispiel ist

$$\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = m.$$

□

**Satz 161 (Anzahl der Nullstellen und Polstellen).** Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  meromorph mit Polstellenmenge  $\Sigma_\infty$  und Nullstellenmenge  $\Sigma_0$ . Sei  $c = \sum m_k c_k$  mit Kurven  $c_k$  ein in  $G$  nullhomologer 1-Zyklus in  $G \setminus (\Sigma_\infty \cup \Sigma_0)$ . Wir definieren den Bildzyklus von  $c$  unter  $f$  als

$$f(c) := \sum m_k (f \circ c_k).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{z \in \Sigma_0} \text{Uml}(c, z) \text{Nullstellenordnung von } f \text{ in } z \\ &\quad - \sum_{z \in \Sigma_\infty} \text{Uml}(c, z) \text{Polstellenordnung von } f \text{ in } z \\ &= \text{Uml}(f(c), 0). \end{aligned}$$

Dabei sind die auftretenden Summen nach Lemma 157 endlich.

Das Integral  $\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  heißt auch *das Null- und Polstellen zählende Integral*. Am klarsten wird das, wenn  $c$  den kompakten Bereich  $B \subset G$  einfach berandet. Dann wird

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{Anzahl der Nullstellen} - \text{Anzahl der Polstellen von } f \text{ in } B,$$

jeweils gezählt mit Vielfachheit.

*Beweis des Satzes.* Das erste Gleichheitszeichen folgt aus dem Residuensatz. Für das zweite beachte:

$$\begin{aligned} \text{Uml}(f(c), 0) &= \sum_k \frac{m_k}{2\pi i} \int_{f \circ c_k} \frac{dz}{z} = \sum_k \frac{m_k}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\frac{d}{dt}(f \circ c_k)(t) dt}{(f \circ c_k)(t)}. \\ &= \sum_k \frac{m_k}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f'(c_k(t))}{f(c_k(t))} \dot{c}_k(t) dt. = \sum_k \frac{m_k}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \end{aligned}$$

□

**Satz 162 (Rouché).** Seien  $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph im Gebiet  $G$  und  $c$  ein in  $G$  nullhomologer 1-Zyklus. Es gelte

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \text{ für alle } z \in |c| \quad (53)$$

Dann haben  $f$  und  $g$  keine Nullstellen auf dem Träger  $|c|$ , und es gilt

$$\sum_{f(z)=0} \text{Uml}(c, z) \text{Ord}(f, z) = \sum_{g(z)=0} \text{Uml}(c, z) \text{Ord}(g, z).$$

Dabei sind die auftretenden Summen nach Lemma 157 endlich.

Berandet  $c$  den kompakten Bereich  $B \subset G$  einfach, so besagt der Satz, dass  $f$  und  $g$  im Inneren von  $B$  die gleiche Anzahl von Nullstellen (gezählt mit Vielfachheiten) haben.

*Beweis.* Aus (53) folgt unmittelbar, dass  $|c|$  keine Nullstelle von  $f$  oder  $g$  enthält. Aus

Satz 161 folgt

$$\sum_{f(z)=0} \text{Uml}(c, z) \text{Ord}(f, z) - \sum_{g(z)=0} \text{Uml}(c, z) \text{Ord}(g, z) = \text{Uml}(f(c), 0) - \text{Uml}(g(c), 0).$$

Sei  $c = \sum m_k c_k$  mit  $m_k \neq 0$  und nicht-konstanten Kurven  $c_k$ . Definiere

$$C_k(s, t) := s f(c_k(t)) + (1 - s) g(c_k(t))$$

Wegen (53) ist das ein singuläres Quadrat in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Der Rand ist

$$\partial C_k = (f \circ c_k) \ominus (g \circ c_k) \ominus \lambda(g(c_k(1)), f(c_k(1)) \oplus \lambda(g(c_k(0)), f(c_k(0))),$$

wobei  $\lambda(a, b)$  den linear parametrisierten Weg von  $a$  nach  $b$  bezeichnet. Die Strecken zwischen Endpunkten haben ein  $\ominus$ , die zwischen Anfangspunkten ein  $\oplus$ . Wir setzen

$$C := \sum m_k C_k.$$

Weil  $c$  ein Zyklus ist, kommt jeder Punkt gleich oft als Anfangs- wie als Endpunkt einer Kurve vor. Deshalb heben sich in  $\partial C$  die  $\lambda$ -Terme heraus und

$$\partial C = \sum m_k (f \circ c_k) \ominus \sum m_k (g \circ c_k) = f(c) \ominus g(c).$$

Nach Satz 148 ist daher

$$\text{Uml}(f(c), 0) = \text{Uml}(g(c), 0)$$

und der Satz bewiesen. □

**Beispiel 163.** Die Bernoullizahlen  $B_k$  waren definiert durch

$$\frac{1}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^{k-1},$$

vgl. Beispiel 109. Wir wollen

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} = \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} |B_{2m}|.} \quad (54)$$

beweisen<sup>6</sup>. Mit den früher berechneten Bernoullizahlen  $B_{2m}$  ergibt sich insbesondere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Wir betrachten neben der Funktion  $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$  die Funktion  $f_m(z) := z^{-2m} f(z)$ . Die isolierten Singularitäten dieser Funktion sind die Punkte  $z_k = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ . Das Residuum in 0 läßt sich direkt aus der Laurentreihe (41) ablesen:

$$\text{Res}(f_m, 0) = \frac{B_{2m}}{(2m)!}.$$

Beispiel 159 liefert die Residuen in den anderen Punkten:

$$\text{Res}(f_m, 2k\pi i) = \frac{(2k\pi i)^{-2m}}{e^{2k\pi i}} = \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m} k^{2m}}.$$

<sup>6</sup>Für  $s \in \mathbb{C}$  mit Realteil  $> 1$  konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$  und definiert eine holomorphe Funktion, die *Riemannsche Zetafunktion*  $\zeta(s)$ . Wir wollen offenbar  $\zeta(2m)$  berechnen, allerdings ohne die Zetafunktion zu benutzen. Die Formel (54) stammt bereits von Euler.

Mit dem Residuensatz zeigen wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^{+n} \operatorname{Res}(f_m, 2k\pi i) = 0. \quad (55)$$

Daraus folgt dann

$$\operatorname{Res}(f_m, 0) = - \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Res}(f_m, 2k\pi i) + \operatorname{Res}(f_m, -2k\pi i)),$$

also

$$\frac{B_{2m}}{(2m)!} = (-1)^{m+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2\pi)^{2m} k^{2m}}$$

und daraus (54).

Nun zum Beweis von (55).

Weil die Exponentialfunktion periodisch ist, nimmt die Funktion  $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$  im Streifen

$$S := \{z \mid 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 2\pi\}$$

ihre sämtlichen Werte an.

Für  $\operatorname{Re}(z) \geq 1$  ist

$$|e^z - 1| \geq |e^z| - 1 = e^{\operatorname{Re}(z)} - 1 \geq e - 1$$

und deshalb  $|f(z)| \leq \frac{1}{e-1}$ .

Für  $\operatorname{Re}(z) \leq -1$  ist

$$|e^z - 1| \geq 1 - |e^z| = 1 - e^{\operatorname{Re}(z)} \geq 1 - e^{-1}$$

und deshalb  $|f(z)| \leq \frac{1}{1-e^{-1}}$ .

Schließlich nimmt die stetige Funktion  $|f(z)|$  im (rot gefärbten) kompakten Bereich

$$S \cap \{z \mid |\operatorname{Re}(z)| \leq 1, |z| \geq 1, |z - 2\pi i| \geq 1\}$$

ihre Maximum an.

Insgesamt ist  $|f(z)|$  auf dem Komplement  $B$  der offenen Kreise vom Radius 1 um die Singularitäten  $2k\pi i$  also durch eine Konstante  $M$  beschränkt.

Der Kreis

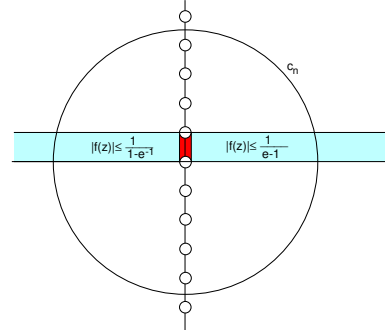
$$c_n(t) = (2n+1)\pi e^{2\pi i t}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

verläuft ganz in  $B$ , und aus dem Residuensatz folgt:

$$\left| \sum_{k=-n}^{+n} \operatorname{Res}(f_m, 2k\pi i) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{c_n} f_m(z) dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{((2n+1)\pi)^{2m}} 2\pi(2n+1)\pi.$$

Das geht für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null und liefert (55). □

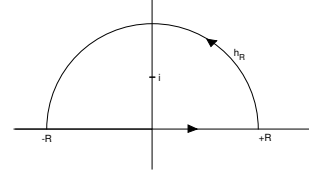
Der Residuensatz ist hilfreich bei der Berechnung gewisser uneigentlicher reeller Integrale. Dazu gibt es eine ganze Industrie. Wir beschränken uns hier auf ein Beispiel:



**Beispiel 164.** Nach Analysis existiert

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt = \operatorname{Re} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{1+t^2} dt \right).$$

Wir integrieren zur Berechnung  $f(z) := \frac{e^{iz}}{1+z^2}$  über die in der Abbildung skizzierte Kurve  $c_R$  bestehend aus dem Intervall  $[-R, R]$  und dem Halbkreis  $h_R(t) := Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$  vom Radius  $R$  um 0 in der oberen Halbebene.



Für  $R > 1$  schließt diese Kurve als einzige isolierte Singularität von  $f$  den Punkt  $z = i$  ein, und es ist

$$\operatorname{Res}(f(z), i) = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Der Residuensatz liefert also

$$\int_{c_R} f(z) dz = 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$

Andrerseits ist

$$\operatorname{Re} \int_{c_R} f(z) dz = \int_{-R}^{+R} \frac{\cos t}{1+t^2} dt + \operatorname{Re} \int_{h_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz$$

Auf dem Halbkreis ist

$$\left| \frac{e^{iz}}{1+z^2} \right| = \frac{e^{-\operatorname{Im}(z)}}{|1+z^2|} \leq \frac{1}{R^2-1}$$

und daher

$$\left| \int_{h_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz \right| \leq \frac{1}{R^2-1} 2\pi R \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty.$$

Es folgt

$$\frac{\pi}{e} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt.$$

□

Ich gebe zum Schluss noch ein Beispiel, das in der Ingenieurmathematik eine wichtige Rolle spielt.

Bei Stabilitätsfragen in der Regelungstheorie ist es wichtig zu wissen, wann alle Nullstellen eines Polynoms

$$p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$$

mit reellen Koeffizienten *negativen Realteil* haben. Man nennt  $p(z)$  dann auch *stabil*.

Wir setzen o.E.  $a_n > 0$  und  $n > 0$  voraus und betrachten die sogenannte *Nyquistkurve*

$$\nu(t) := p(it), \quad 0 \leq t < \infty.$$

Wir nehmen an, dass

$$\nu(t) \neq 0 \quad \text{für alle } t \geq 0. \tag{56}$$

Mit dem Satz 50 schreiben wir

$$\nu(t) = r(t)e^{i\phi(t)}, \quad r(t) = |\nu(t)|.$$

Wir nehmen weiter an, dass

$$\nu(0) = a_0 > 0, \tag{57}$$

so dass die Nyquistkurve also auf der positiven reellen Achse beginnt. Deshalb können wir  $\phi$  so wählen, dass

$$\phi(0) = 0.$$

Für großes  $t$  ist  $\nu(t) \approx a_n t^n i^n = a_n t^n e^{i\frac{n\pi}{2}}$ , und daher

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \frac{n}{2}\pi + 2k\pi$$

für ein  $k \in \mathbb{Z}$ . Wir nehmen schließlich an, dass nach der Normierung  $\phi(0) = 0$  gilt

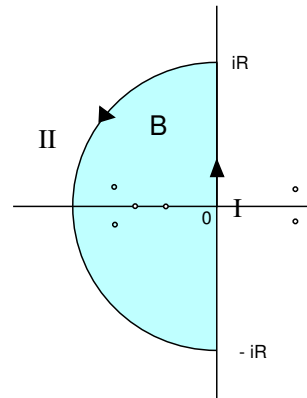
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \frac{n}{2}\pi. \tag{58}$$

Das Nyquistkriterium besagt, dass  $p(z)$  genau dann stabil ist, wenn (56) - (58) gelten.

Die Bedingungen sind hinreichend für Stabilität.

Weil die Nyquistkurve nicht durch 0 geht, liegen keine Nullstellen von  $p(z)$  auf der imaginären Achse. Wir wählen nun einen Halbkreis  $B$  in der linken Halbebene mit Zentrum im Nullpunkt und mit einem so großen Radius  $R$ , dass alle "linken" Nullstellen in seinem Inneren liegen. Nach dem Satz über die Anzahl der Null- und Polstellen gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = \text{Anzahl linke Nullstellen} \tag{59}$$



Wir wollen zeigen, dass alle Nullstellen links liegen, dass die Anzahl der linken Nullstellen also  $= n$  ist. Wir berechnen dazu das Integral noch einmal durch „direkte“ Integration über das Stück auf der imaginären Achse und über den Kreisbogen.

Integral über I. Zwei Vorbemerkungen: Weil  $p$  ein reelles Polynom ist, ist  $\overline{p(it)} = p(-it)$ , und wenn wir die Nyquistkurve  $\nu(t) = r(t)e^{i\phi(t)}$  auch für negatives  $t$  betrachten

$$r(-t)e^{i\phi(-t)} = r(t)e^{-i\phi(t)}.$$

Wir erhalten  $r(-t) = r(t)$  und  $\phi(-t) = -\phi(t) + 2k\pi$ . Aus  $\phi(0) = 0$  folgt  $\phi(-t) = -\phi(t)$ .

Zum anderen gilt

$$\frac{d\nu(t)}{dt} = (\dot{r}(t) + ir(t)\dot{\phi}(t))e^{i\phi(t)}.$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_I \frac{p'(z)}{p(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R \frac{p'(it)}{p(it)} i dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R \frac{\frac{d\nu(t)}{dt}}{\nu(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R \left( \frac{\dot{r}(t)}{r(t)} + i\dot{\phi}(t) \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \ln r(t) \Big|_{-R}^{+R} + \frac{1}{2\pi} \phi(t) \Big|_{-R}^{+R} = 0 + \frac{\phi(R)}{\pi}. \end{aligned}$$

Für  $R \rightarrow \infty$  geht das gegen  $\frac{n}{2}$ .

Integral über II. Hier verwenden wir die Partialbruchzerlegung

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - z_k},$$

wobei  $p(z) = a_n(z - z_1) \dots (z - z_n)$ . Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{II} \frac{p'(z)}{p(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{Re^{it} - z_k} iRe^{it} dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{ie^{it}}{e^{it} - \frac{z_k}{R}} dt \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = \frac{n}{2\pi} \left( \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Insgesamt ist daher

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n.$$

Aus (59) folgt daher, dass alle Nullstellen links von der imaginären Achse liegen.

Die Bedingungen sind notwendig für Stabilität. Geht  $\nu$  durch 0, so hat  $p$  eine Nullstelle auf der reellen Achse und ist nicht stabil.

Ist  $a_0 = 0$ , so ist  $p(0) = 0$ , also  $p$  nicht stabil.

Ist  $a_0 < 0$ , so hat  $p$ , weil  $p(t) \approx a_n t^n > 0$  für große  $t$ , das reelle Polynom  $p(t)$  eine positive reelle Nullstelle und ist nicht stabil.

Schließlich zeigt das Argument im obigen Beweis, dass

$$\text{Anzahl der linken Nullstellen} - \frac{n}{2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\phi(t)}{\pi},$$

und daraus folgt (58).

**Beispiel 165.** Wir betrachten ein Polynom

$$p(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$$

mit

$$a, b, c, d > 0 \text{ und } bc - ad > 0. \quad (60)$$

Ein Polynom mit diesen Eigenschaften beschreibt zum Beispiel den Strom in einem einfachen Netzwerk, kommt also in der Realität vor...

Wir zeigen, dass jedes  $p(z)$  mit den Bedingungen (60) die Voraussetzungen des Nyquistkriteriums erfüllt.

Dazu schreiben wir  $\nu(t) = p(it) = x(t) + iy(t)$  mit

$$x(t) = d - bt^2, \quad y(t) = ct - at^3. \quad (61)$$

Bedingungen (56) und (57). Aus  $\nu(t) = 0$  folgt  $t^2 = d/b$  und

$$0 = t(c - at^2) = \frac{t}{b}(bc - ad)$$

und daraus  $t = 0$ . Aber  $\nu(0) = d > 0$ .

Bedingung (58). Weil

$$y(t) = 0 \iff t = 0 \text{ oder } t^2 = \frac{a}{c}$$

und weil

$$d - b\frac{a}{c} = \frac{1}{a}(ad - bc) < 0,$$

trifft die Nyquistkurve die positive reelle Achse nur einmal, nämlich für  $t = 0$ . Für sehr kleine positive  $t$  ist  $y(t) > 0$ , also  $\phi(t) > 0$ , und daher liegen die Werte von  $\phi(t)$  für  $t > 0$  im Intervall  $]0, 2\pi[$ . Es folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} = 3\frac{\pi}{2}.$$

□

*When boarding the aircraft, all Poles to the left for reasons of stability.*

## 11 Folgen holomorpher Funktionen

Dieser Abschnitt dient der etwas technischen Vorbereitung auf den Riemannschen Abbildungssatz und die Sätze von Mittag-Leffler und Weierstraß.

### 11.1 Kompakte Konvergenz

- Kompakte=lokal gleichmäßige Konvergenz
- Blätterzahl im Limes
- Bolzano-Weierstraß für Funktionenfolgen: Der Satz von Montel

**Satz 166 (und Definition: Kompakte Konvergenz).** Eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Funktionen auf einer offenen Menge  $G \subset \mathbb{C}$  heißt kompakt konvergent gegen  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , wenn eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen gilt

- (i)  $(f_n)$  konvergiert auf jeder kompakten Teilmenge  $K \subset G$  gleichmäßig gegen  $f$ .
- (ii)  $(f_n)$  konvergiert lokal gleichmäßig gegen  $f$ , d.h. jeder Punkt von  $G$  besitzt eine Umgebung, auf der  $(f_n)$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

*Beweis.* Zu (i)  $\implies$  (ii). Um jeden Punkt von  $G$  gibt es eine in  $G$  enthaltene kompakte Kreisscheibe. Diese ist eine Umgebung des Punktes, auf der die Folge gleichmäßig konvergiert.

Zu (ii)  $\implies$  (i). Jedes kompakte  $K \subset G$  läßt sich durch endlich viele offene Mengen  $U_1, \dots, U_p$  überdecken, auf denen  $(f_n)$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Zu gegebenem  $\epsilon > 0$  gibt es also Zahlen  $N_1, \dots, N_p$ , so dass  $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$  für alle  $k \in \{1, \dots, p\}$ ,  $n \geq N_k$  und alle  $z \in U_k$ . Wähle  $N := \max(N_1, \dots, N_p)$ . Dann gilt  $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$  für alle  $n \geq N$  und alle  $z \in K$ .  $\square$

**Beispiel 167.** Sei  $(f_n : G \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $G$  kompakt konvergent gegen  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Nach dem Schrankensatz ist für jede 1-Kette  $c$  in  $G$

$$\left| \int_c f_n(z) dz - \int_c f(z) dz \right| \leq L(c) \sup_{z \in |c|} |f_n(z) - f(z)|,$$

und darum folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c f_n(z) dz = \int_c f(z) dz.$$

$\square$

**Satz 168 (von Weierstraß über kompakte Konvergenz).** Die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  holomorpher Funktionen auf der offenen Menge  $G \subset \mathbb{C}$  sei kompakt konvergent gegen  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann ist  $f$  holomorph und  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist kompakt konvergent gegen  $f'$ .

*Beweis.* Nach Analysis ist  $f$  stetig und für jedes (kompakte) Dreieck  $\Delta \subset G$  folgt aus dem vorstehenden Beispiel und dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial \Delta} f_n(z) dz = 0.$$

Nach dem Satz von Morera ist  $f$  daher holomorph.

Die Behauptung über  $(f'_n)$  folgt so: Seien  $z_0 \in G$  und  $r > 0$ , so dass

$$\{z \mid |z - z_0| \leq 2r\} \subset G.$$

Dann gilt für alle  $z \in U_r(z_0) := \{z \mid |z - z_0| < r\}$

$$|f'(z) - f'_n(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0|=2r} \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\max_{|z - z_0|=2r} |f(z) - f_n(z)|}{r^2} 2\pi(2r).$$

Aus der kompakten Konvergenz von  $(f_n)$  folgt die gleichmäßige Konvergenz von  $(f'_n)$  auf  $U_r(z_0)$ , also die lokal gleichmäßige Konvergenz der Ableitungsfolge.  $\square$

Ist  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $a \in \mathbb{C}$ , so heißt

$$\sum_{f(z)=a} \text{Ord}(f - a, z) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$

also die Anzahl der Nullstellen von  $f(z) - a$ , die *Anzahl der  $a$ -Stellen von  $f$* .

**Satz 169 (von Hurwitz über die Blätterzahl der Grenzfunktion).** Seien  $a \in \mathbb{C}$  und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine auf dem Gebiet  $G$  kompakt gegen eine Funktion  $f$  konvergierende Folge holomorpher Funktionen. Für jedes  $f_n$  sei die Anzahl der  $a$ -Stellen höchstens  $m$ . Dann ist die Anzahl der  $a$ -Stellen von  $f$  auch höchstens  $m$ , oder  $f$  ist konstant vom Wert  $a$ .

*Beweis.* O.E sei  $a = 0$  und  $f$  nicht konstant. Wäre der Satz falsch, so gäbe es dann paarweise verschiedene Nullstellen  $z_1, \dots, z_p$  von  $f$  in  $G$  mit

$$\sum_{j=1}^p \text{Ord}(f, z_j) \geq m + 1.$$

Weil die Nullstellen isoliert sind, gibt es paarweise disjunkte kompakte Kreise  $K_j$  in  $G$  um die  $z_j$ , die jeweils nur die Nullstelle  $z_j$  enthalten. Sei  $\epsilon > 0$  kleiner als  $\min\{|f(z)| \mid z \in \bigcup \partial K_j\}$ . Beachte, dass das Minimum nicht  $= 0$  ist.

Wegen der kompakten Konvergenz gibt es ein  $n$  mit

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon < |f(z)| \text{ für alle } z \in \bigcup \partial K_j.$$

Nach dem Satz von Rouché hat dann  $f_n$  in  $\bigcup \overset{\circ}{K}_j$  genauso viele Nullstellen wie  $f$ , also mehr als  $m$ . Widerspruch!  $\square$

**Korollar 170.** Der Grenzwert einer kompakt konvergenten Folge injektiver holomorpher Funktionen ist konstant oder ebenfalls injektiv.

Die hier auftretenden *injektiven* holomorphen Funktionen heißen in der Sprache der klassischen Funktionentheorie auch *schlichte* holomorphe Funktionen.

**Definition 171.** Eine Folge  $(f_n : G \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$  von Funktionen heißt *lokal beschränkt*, wenn es zu jedem  $z_0 \in G$  eine Umgebung  $U$  von  $z_0$  in  $G$  und ein  $M \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $|f_n(z)| \leq M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $z \in U$ .

**Lemma 172.** Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf der offenen Menge  $G$ . Dann besitzt jeder Punkt in  $G$  eine Umgebung  $U$  und ein  $M \in \mathbb{R}$  so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  und für alle  $z, z' \in U$  gilt

$$|f_n(z) - f_n(z')| \leq M|z - z'|.$$

Man sagt  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei lokal gleichgradig Lipschitz-stetig.

*Beweis.* Wir wählen zu  $z_0 \in G$  ein  $r > 0$  und ein  $C \in \mathbb{R}$ , so dass für alle  $z$  und  $n$

$$|z - z_0| \leq 2r \implies z \in G \text{ und } |f_n(z)| < C.$$

Nach der Cauchyschen Integralformel hat man dann für  $z, z' \in U_r(z_0) = \{z \mid |z - z_0| < r\}$  und beliebiges  $n$

$$f_n(z) - f_n(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = 2r} \left( \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z'} \right) d\zeta = \frac{z - z'}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = 2r} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z')} d\zeta$$

und

$$|f_n(z) - f_n(z')| \leq \frac{|z - z'|}{2\pi} \frac{C}{r^2} 4\pi r = \frac{2C}{r} |z - z'|.$$

□

**Lemma 173.** Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf  $G$ , die auf einer in  $G$  dichten Teilmenge  $A$  punktweise konvergiert. Dann ist die Folge sogar kompakt konvergent auf  $G$ .

*Beweis.* Sei  $z_0 \in G$ . Nach dem letzten Lemma gibt es dazu  $M, r > 0$ , so dass  $U_{2r}(z_0) \subset G$  und für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $z, z' \in U_{2r}(z_0)$

$$|f_n(z) - f_n(z')| \leq M|z - z'|.$$

Wir wollen zeigen, dass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $B = \overline{U_r(z_0)}$  gleichmäßig konvergiert. Dann folgt aus Satz 166 die Behauptung.

Sei also  $\epsilon > 0$  und dazu  $\delta$  so gewählt, dass  $0 < \delta < \min\left(\frac{\epsilon}{M}, r\right)$ . Dann ist  $(U_\delta(a))_{a \in A}$  eine offene Überdeckung von  $B$ , und die Kreisscheiben, welche  $B$  treffen, liegen in  $U_{3r}(z_0)$ . Weil  $B$  kompakt ist, gibt es also  $a_1, \dots, a_k \in A$  mit  $B \subset U_\delta(a_1) \cup \dots \cup U_\delta(a_k) \subset U_{3r}(z_0)$ . Wähle  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass

$$|f_n(a_j) - f_m(a_j)| < \epsilon \text{ für alle } j \in \{1, \dots, k\} \text{ und alle } m, n \geq n_0.$$

Zu jedem  $z \in B$  gibt es dann ein  $j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $z \in U_\delta(a_j)$ , und für  $m, n \geq n_0$  gilt

$$\begin{aligned} |f_m(z) - f_n(z)| &\leq |f_m(z) - f_m(a_j)| + |f_m(a_j) - f_n(a_j)| + |f_n(a_j) - f_n(z)| \\ &\leq M \frac{\epsilon}{M} + \epsilon + M \frac{\epsilon}{M} = 3\epsilon. \end{aligned}$$

□

**Satz 174 (Montel).** Jede lokal beschränkte Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  holomorpher Funktionen auf der offenen Menge  $G$  besitzt eine kompakt konvergente Teilfolge.

*Beweis.* Sei  $A = \{a_0, a_1, \dots\}$  eine abzählbare dichte Teilmenge von  $G$ . Weil die Folge  $(f_n(a_0))$  beschränkt ist, besitzt  $(f_n)$  eine Teilfolge  $(f_{0n})$ , für die  $(f_{0n}(a_0))$  konvergiert. Daraus könne wir eine Teilfolge  $(f_{1n})$  auswählen, für die  $(f_{1n}(a_1))$  konvergiert, und schließlich erhalten wir auf diese Weise für jedes  $k$  eine Teilfolge  $(f_{kn})$ , die an allen Stellen  $a_0, \dots, a_k$  konvergiert. Aber dann konvergiert die Diagonalfolge  $(f_{nn})$  in allen  $a_j \in A$ , und ist daher nach dem letzten Lemmma kompakt konvergent auf  $G$ .  $\square$

Mit Jänich kann man diesen Satz den *Bolzano-Weierstraß der Funktionentheorie* nennen.

## 11.2 Unendliche Produkte

- Unendliche Produkte sind etwas komplizierter zu handhaben als unendliche Reihen.
- Der Wunsch, eine möglichst durchsichtige Beziehung zwischen unendlichen Produkten und Reihen zu haben, führt zu einer zunächst überraschenden Definition für die Konvergenz von Produkten.

**Definition 175 (Unendliches Produkt).** Für eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  komplexer Zahlen definiert man das *unendliche Produkt*  $\prod_{k=0}^{\infty} a_k$  als die Folge der Partialprodukte:

$$\prod_{k=0}^{\infty} a_k = \left( \prod_{k=0}^n a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Man möchte unendliche Produkte gern in möglichst enger Analogie zu den unendlichen Reihen behandeln. Zum Beispiel möchte man “ $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 1$ ” analog zu “ $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ ” als notwendiges Kriterium für die Konvergenz eines unendlichen Produktes haben. Aber ein Faktor  $a_k = 0$  macht alle folgenden Partialprodukte zu 0. Deshalb definiert man die Konvergenz etwas vorsichtiger:

**Definition 176 (Konvergente Produkte).** Das unendliche Produkt  $\prod_{k=0}^{\infty} a_k$  heißt konvergent gegen  $b \in \mathbb{C}$ , wenn gilt

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n a_k = b$  und
- (ii) es gibt  $k_0 \in \mathbb{N}$ , für das  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=k_0}^n a_k$  existiert und  $\neq 0$  ist.

Insbesondere sind dann also höchstens endlich viele Faktoren = 0.

**Beispiel 177.** Die Produkte

$$0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots$$

sind nach dieser Definition *nicht* konvergent!

□

Das oben formulierte notwendige Konvergenzkriterium ist mit dieser Definition erfüllt:

**Lemma 178.** Ist  $\prod_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergent, so folgt  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 1$ .

*Beweis.* Für  $n > k_0$  ist

$$a_n = \frac{\prod_{k=k_0}^n a_k}{\prod_{k=k_0}^{n-1} a_k},$$

und Zähler und Nenner haben denselben Grenzwert  $\neq 0$ . Also ist  $\lim a_n = 1$ . □

Ein überzeugenderes Argument für die Forderung (ii) in der Konvergenz-Definition ist das folgende Kriterium, dass ohne (ii) falsch wird.

**Satz 179 (Logarithmus-Kriterium).** *Im unendlichen Produkt  $\prod_{k=0}^{\infty} a_k$  sei kein Faktor  $= 0$  oder negativ-reell. Dann ist das Produkt genau dann konvergent, wenn die mit dem Hauptwertlogarithmus gebildete Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \log(a_k)$$

*konvergiert.*

*Beweis.* Ist die Reihe konvergent, so wegen der Stetigkeit der Exponentialabbildung auch die Folge der Partialprodukte

$$P_n := \prod_{k=0}^n a_k = e^{\sum_{k=0}^n \log(a_k)}.$$

Damit gilt (i) der Definition, aber wegen  $\lim P_n = e^{\sum_{k=0}^{\infty} \log(a_k)} \neq 0$  auch (ii).

Die umgekehrte Richtung ist komplizierter zu beweisen, weil

$$\sum_{k=0}^n \log(a_k) \stackrel{???}{=} \log\left(\prod_{k=0}^n a_k\right)$$

höchstens modulo  $2\pi i$  richtig ist, und auch das nur, wenn keines der Produkte rechts negativ-reell ist.<sup>7</sup>

Wir nehmen an, dass  $P_n \rightarrow P \neq 0$  und schreiben  $P = |P|e^{i\phi}$ . Wir wählen  $\phi_n$  so, dass

$$P_n = |P_n|e^{i\phi_n} \text{ mit } \phi - \pi < \phi_n \leq \phi + \pi.$$

Also

$$\phi_n \rightarrow \phi.$$

Aus

$$S_n := \sum_{k=0}^n \log a_k = \log |P_n| + i\phi_n + 2\pi i k_n \text{ mit } k_n \in \mathbb{Z}. \quad (62)$$

folgt

$$\begin{aligned} 2\pi i(k_{n+1} - k_n) &= S_{n+1} - S_n - \log |P_{n+1}| + \log |P_n| - i(\phi_{n+1} - \phi_n) \\ &= \underbrace{\log a_{n+1}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\log |P_{n+1}| + \log |P_n|}_{\rightarrow 0} - \underbrace{i(\phi_{n+1} - \phi_n)}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

Dann ist aber  $k_n = k_{n+1}$  für alle hinreichend großen  $n$ , und aus (62) folgt die Konvergenz von  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  $\square$

<sup>7</sup> Zum Beispiel ist  $\log \frac{i-1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi i}{4}$  und deshalb  $2 \log \frac{i-1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi i}{2} \neq -\frac{\pi i}{2} = \log(-i) = \log\left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)^2$ .

Im folgenden brauchen wir eine Verallgemeinerung dieses Kriteriums auf die kompakte Konvergenz von Produkten holomorpher Funktionen.

**Satz 180.** Sei  $(f_k : G \rightarrow \mathbb{C})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge holomorpher Funktionen mit Werten im Schlitzgebiet  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \text{ oder } \operatorname{Im} z \neq 0\}$ . Dann ist das Produkt  $\prod_{k=0}^{\infty} f_k$  genau dann kompakt konvergent, wenn die mit dem Hauptwertlogarithmus gebildete Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \log(f_k)$$

kompakt konvergiert.

*Beweis.* Wir zeigen nur die Richtung “ $\Leftarrow$ ”, die wir im folgenden auch nur benötigen.

Sei  $S_n := \sum_{k=0}^n \log(f_k)$  und  $S := \lim S_n$ . Sei  $K \subset G$  kompakt. Weil  $S$  als kompakter Limes holomorpher Funktionen stetig ist, ist  $S(K)$  kompakt. Zu  $\epsilon = 1$  gibt es nach Voraussetzung ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|S_n(z) - S(z)| \leq 1$  für alle  $z \in K$  und  $n \geq n_0$ . Also gibt es ein Kompaktum  $\tilde{K} \subset \mathbb{C}$ , welches  $S(K)$  und alle  $S_n(K)$  für  $n \geq n_0$  enthält. Die Exponentialfunktion ist auf dem Kompaktum  $\tilde{K}$  gleichmäßig stetig. Also gibt es zu  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit  $|\exp(v) - \exp(w)| < \epsilon$  für alle  $v, w \in \tilde{K}$  mit  $|v - w| < \delta$ . Weiter gibt es dazu ein  $n_1 \geq n_0$  mit  $|S_n(z) - S(z)| < \delta$  für alle  $z \in K$  und  $n \geq n_1$ . Für diese ist dann aber

$$|\exp(S_n(z)) - \exp(S(z))| < \epsilon.$$

Weil  $\exp(S_n) = \prod_{k=0}^n f_k$ , ist das Produkt auf  $K$  gleichmäßig konvergent.  $\square$

**Beispiel 181.** In dem Kriterium genügt es, wenn von einem geeigneten  $k_0$  an alle Hauptwerte  $\log f_k$  definiert sind und man die Summe  $\sum_{k=k_0}^{\infty} \log f_k$  betrachtet. Wir wollen das Produkt

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) \quad (63)$$

auf Konvergenz untersuchen. Wir wählen  $r > 0$  und wenden für  $z$  mit  $|z| \leq r$  das obige Kriterium mit  $k \geq k_0 > 2r$  an. Dann hat  $1 - \frac{z^2}{k^2}$  positiven Realteil und mit der Logarithmusreihe finden wir

$$\begin{aligned} \left| \log \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) \right| &= \left| \frac{z^2}{k^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{z^2}{k^2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{z^2}{k^2}\right)^3 + \dots \right| \\ &= \frac{|z|^2}{k^2} \left| 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{z^2}{k^2}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{z^2}{k^2}\right)^2 + \dots \right| \\ &\leq \frac{r^2}{k^2} \left| 1 + \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots \right| = \frac{4r^2}{3} \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Die Reihe der Logarithmen ist also auf  $|z| \leq r$  gleichmäßig konvergent. Nach dem Satz gilt das dann auch für das Produkt, so dass (63) eine ganze Funktion definiert.

Mit fast demselben Argument erhält man auch die kompakte Konvergenz des Produktes

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \quad (64)$$

auf ganz  $\mathbb{C}$ . Wir werden die Grenzwerte von (63) und (64) in den nächsten Abschnitten bestimmen.

Dagegen ist  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{k})$  divergent: Für  $k > 2|z|$  folgt nämlich aus der Logarithmusreihe

$$\begin{aligned} \left| \log \left( 1 + \frac{z}{k} \right) \right| &= \left| \frac{z}{k} - \frac{1}{2} \left( \frac{z}{k} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{z}{k} \right)^3 - \dots \right| \\ &\geq \left| \frac{z}{k} \right| - \frac{1}{2} \left| \frac{z}{k} \right|^2 \underbrace{\left| 1 + \frac{2z}{3k} + \frac{2}{4} \left( \frac{z}{k} \right)^2 + \dots \right|}_{\leq \sum 2^{-k} = 2} \geq \frac{1}{2} \frac{|z|}{k}. \end{aligned}$$

Deshalb ist  $\sum \log \left( 1 + \frac{z}{k} \right)$  und nach dem Logarithmus-Kriterium auch das Produkt divergent.

□

## 12 Partialbruchzerlegung und Produktdarstellung

### 12.1 Partialbruchzerlegung des Cotangens

- Rationale Funktionen gestatten eine Partialbruchzerlegung.
- Meromorphe Funktionen gestatten ebenfalls eine (i.a. unendliche) Partialbruchzerlegung. Das folgt aus dem Satz von Mittag-Leffler, den wir im Abschnitt 12.4 beweisen.
- In diesem Abschnitt behandeln wir die Partialbruchzerlegung am Beispiel einer konkreten Funktion.

Eine (ausgekürzte) rationale Funktion  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  mit paarweise verschiedenen *einfachen* Nullstellen  $z_1, \dots, z_n$  des Nenners hat eine Partialbruchzerlegung

$$f(z) = g(z) + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{z - z_k}, \quad (65)$$

wobei  $g(z)$  ein Polynom ist, und die  $\frac{a_k}{z - z_k}$  gerade die Hauptteile der Laurententwicklung um die einfachen Pole  $z_k$  sind.

Die Funktion

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

ist meromorph auf  $\mathbb{C}$  mit einfachen Polen in den Nullstellen des Nenners, also in den Punkten von  $\mathbb{Z}$ . Für  $n \in \mathbb{Z}$  ist

$$\operatorname{Res} \left( \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}, n \right) = \frac{\pi \cos(\pi n)}{\pi \cos(\pi n)} = 1.$$

Der Hauptteil in  $n$  ist also  $\frac{1}{z - n}$ . Aber die Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z - n}$$

ist divergent. Wir versuchen deshalb an den Summanden Korrekturen  $p_n(z)$  anzubringen, die holomorph sind und deshalb den Hauptteil erhalten, die andererseits aber die Reihe konvergent machen. Im Vergleich mit (65) geht das "zu Lasten" der Funktion  $g(z)$ , aber das macht nichts: Wir erhalten dann eine "Partialbruchzerlegung"

$$\pi \cot(\pi z) = g(z) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{z - n} + p_n(z) \right).$$

Wir betrachten  $z$  in einer festen kompakten Kreisscheibe  $\{z \mid |z| \leq r\}$ . Für die Konvergenz müssen wir nur Summanden mit  $|n| \geq 2r$  betrachten. Dafür ist die Taylorentwicklung von  $\frac{1}{z - n}$  um 0 gegeben durch die geometrische Reihe

$$\frac{1}{z - n} = -\frac{1}{n} \frac{1}{1 - \frac{z}{n}} = -\frac{1}{n} - \frac{z}{n^2} - \dots$$

und es gilt

$$\left| \frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right| = \left| \frac{z}{n(z - n)} \right| = \frac{|z|}{n^2} \frac{1}{|1 - \frac{z}{n}|} \leq \frac{2r}{n^2}.$$

Daher sind die Reihen

$$\sum_{n \geq 2r} \left( \frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right), \quad \sum_{n \leq -2r} \left( \frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right)$$

auf  $|z| \leq r$  gleichmäßig konvergent und

$$h(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

ist kompakt konvergent<sup>8</sup> auf dem Komplement von  $\mathbb{Z}$ . Die Differenz

$$g(z) = \pi \cot(\pi z) - h(z)$$

hat hebbare Singularitäten in  $\mathbb{Z}$  und liefert nach deren Heben eine ganze Funktion, die wir bestimmen wollen. Nach Satz 168 dürfen wir die Reihe gliedweise differenzieren. Wir erhalten wieder eine ganze(!) Funktion

$$g'(z) = -\pi^2 \frac{1}{\sin^2(\pi z)} + \frac{1}{z^2} + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z-n)^2} = -\pi^2 \frac{1}{\sin^2(\pi z)} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Sowohl der  $\sin(\pi z)$  wie die Reihe haben die Periode 1. Der Wertevorrat von  $g'(z)$  wird also im Streifen  $\{z \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$  angenommen. Wir zeigen zunächst, dass  $g'$  dort beschränkt ist. Das ist klar auf der kompakten Menge  $\{x + iy \mid 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ .

Sei  $r \geq 1$ . Für reelle  $x, y$  mit  $0 \leq x \leq 1, |y| \geq r$  ist

$$|\sin(\pi(x + iy))| = \frac{1}{2} |e^{i\pi x} e^{-\pi y} - e^{-i\pi x} e^{\pi y}| \geq \frac{1}{2} |e^{\pi y} - e^{-\pi y}| \geq |\sinh(\pi r)|.$$

Deshalb ist der Sinus-Term auf  $\{x + iy \mid 0 \leq x \leq 1, |y| \geq r\}$  beschränkt durch  $\frac{\pi^2}{\sinh^2(\pi r)}$ .

Dort gilt weiter

$$|(x + iy - n)^2| \geq \begin{cases} n^2 + r^2 & \text{für } n \leq 0, \\ (n-1)^2 + r^2 & \text{für } n > 0. \end{cases}$$

also

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \right| \leq \sum_0^{\infty} \frac{1}{n^2 + r^2} + \sum_1^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2 + r^2} < \infty.$$

Für  $r = 1$  zeigen die vorstehenden Abschätzungen die Beschränktheit von  $g'$  auf dem Streifen  $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ . Wegen der Periodizität in  $x$ -Richtung ist die ganze Funktion  $g'$  also beschränkt und nach Liouville (Korollar 73) konstant. Für  $r \rightarrow \infty$  geht der Sinus-Term gegen 0, und weil die Reihen für  $r \geq 1$  offenbar gleichmäßig konvergieren, gehen auch sie für  $r \rightarrow \infty$  gegen 0. Also ist  $g' = 0$ , und wir erhalten

$$\boxed{\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}} \quad (66)$$

und

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) + \text{const.}$$

Aber

$$\sum_{n \neq 0} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z}{n(z-n)} - \frac{z}{n(z+n)} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

<sup>8</sup>Die kompakte Konvergenz der Reihe für  $n \in \mathbb{Z}$  bedeutet wie bei den Laurentreihen, dass die Reihen über  $n \geq 0$  und  $n < 0$  beide kompakt konvergieren.

ist wie auch  $\frac{1}{z}$  und  $\pi \cot(\pi z)$  eine ungerade Funktion. Daher ist die Konstante = 0 und die Partialbruchzerlegung

$$\boxed{\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.} \quad (67)$$

Für  $z = \frac{1}{2}$  ergibt sich aus (66)

$$\boxed{\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Vergleichen Sie auch Beispiel 163.

## 12.2 Produktdarstellung des Sinus

- Polynome gestatten eine Zerlegung in Linearfaktoren.
- Holomorphe Funktionen gestatten ebenfalls eine Linearfaktorzerlegung. Das folgt aus dem Weierstraßschen Produktsatz, den wir im Abschnitt 12.5 beweisen.
- Hier identifizieren wir als konkretes Beispiel mit Hilfe der Cotangenzzerlegung die Funktion aus Beispiel 181 als die Produktdarstellung des Sinus.

Wir haben im Beispiel 181 gezeigt, dass

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

auf  $\mathbb{C}$  kompakt konvergiert, also eine ganze Funktion  $f$  definiert. Wir bilden für die Partialprodukte die logarithmische Ableitung und erhalten aus Satz 168 und (67)

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2z}{k^2 - z^2} = \pi \cot(\pi z) - \frac{1}{z}.$$

Andererseits gilt für die nach Heben der Singularität in 0 auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorphe Funktion  $g(z) := \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{\pi^2 z \cos(\pi z) - \pi \sin(\pi z)}{\pi^2 z^2} \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} = \pi \cot(\pi z) - \frac{1}{z}.$$

Zwei in einem Gebiet holomorphe Funktionen mit gleicher logarithmischer Ableitung unterscheiden sich aber nur um eine multiplikative Konstante, und weil  $f(0) = 1 = g(0)$  folgt

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

oder die Produktformel von Euler (1734)

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right).$$

Für  $z = \frac{1}{2}$  finden wir

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)(2k+1)}{2k \cdot 2k},$$

also das sogenannte *Wallissche Produkt*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \dots$$

### 12.3 Die Gammafunktion

- Hier wenden wir die Methoden und Ergebnisse der beiden letzten Abschnitte an, um eine Produktdarstellung für die Gammafunktion herzuleiten, die auf Weierstraß zurückgeht.
- Als Belohnung erhalten wir eine enge Beziehung zwischen Gammafunktion und Sinus.

Wir haben im Beispiel 181 festgestellt, dass die dort angewendete Methode problemlos auch die kompakte Konvergenz des Produktes

$$H(z) := z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \quad (68)$$

gegen eine ganze Funktion  $H$  liefert, die offenbar genau die Punkte  $-n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  als Nullstellen besitzt, und zwar als einfache.

Es gilt

$$\begin{aligned} H(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}{n!} e^{-z \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}{n! n^z} e^{z(\log n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k})} \end{aligned} \quad (69)$$

Für  $z = 1$  finden wir

$$H(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} e^{\log n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}},$$

und weil das konvergiert, konvergiert auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \log n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) =: -\gamma.$$

Die Zahl

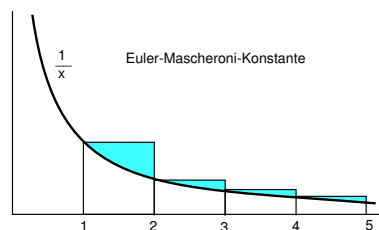
$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\log n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) = 0.577\dots$$

heißt die *Euler-Mascheroni-Konstante*. Bis heute ist nicht bekannt, ob sie rational oder irrational ist.

Weil  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{n+1}{n} = 0$ , gilt auch

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\log(n+1) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right),$$

und damit läßt sich die Konstante wie nebenstehend geometrisch veranschaulichen.



Wir erhalten

$$e^\gamma H(1) = 1. \quad (70)$$

Mit (69) finden wir

$$e^{\gamma z} H(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}{n! n^z} \quad (71)$$

und daraus

$$\begin{aligned}
 e^{\gamma(z+1)}H(z+1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(z+1)(z+2)\dots(z+n+1)}{n!n^{(z+1)}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)(z+2)\dots(z+n+1)}{(n+1)!(n+1)^z} \frac{(n+1)^{(z+1)}}{zn^{(z+1)}} \\
 &= \frac{1}{z} e^{\gamma z} H(z)
 \end{aligned} \tag{72}$$

**Definition 182.** Die *Gammafunktion*

$$\Gamma(z) := \frac{1}{e^{\gamma z} H(z)}$$

ist meromorph auf  $\mathbb{C}$  und holomorph bis auf einfache Pole in den nicht-positiven ganzen Zahlen  $n \in -\mathbb{N}$ . Offenbar ist  $\Gamma(x)$  reell für reelles  $x \notin -\mathbb{N}$ .

Aus (71) ergibt sich

**Satz 183 (Gaußsche Produktdarstellung).**

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

Aus (70) und (72) folgt

**Satz 184 (Funktionalgleichung).** *Es gilt  $\Gamma(1) = 1$  und*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

*für alle  $z \notin -\mathbb{N}$ . Insbesondere ist für  $n \in \mathbb{N}$*

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Die Gammafunktion hat einfache Pole in  $-\mathbb{N}$ . Die Funktion  $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$  hat einfache Pole in  $\mathbb{Z}$  – genauso wie die Funktion  $\frac{1}{\sin(\pi z)}$ . Der Vergleich mit Beispiel 181 unterstreicht die Beziehung zwischen diesen beiden Funktionen. Genauer gilt:

**Satz 185 (Eulerscher Ergänzungssatz).** *Für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  gilt*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned}
 \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \Gamma(z)(-z\Gamma(-z)) \\
 &= \frac{-z}{H(z)H(-z)} = \frac{-z}{-z^2 \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \left(1 - \frac{z}{k}\right)} \\
 &= \frac{\pi}{\pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.
 \end{aligned}$$

□

Zeigen Sie durch  $n$ -malige partielle Integration, dass für  $x \geq 1$

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Mit Hilfe von  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$  zeigt man, dass die linke Seite gegen  $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$  konvergiert, während der Grenzwert der rechten Seite ja  $\Gamma(x)$  liefert. Schließlich zeigt man, dass

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

für  $\operatorname{Re}(z) > 0$  konvergiert und eine holomorphe Funktion definiert, die nach dem Vorstehenden auf  $[1, \infty[$  mit  $\Gamma$  übereinstimmt, nach dem Identitätssatz dann also auch auf  $\operatorname{Re}(z) > 0$  mit  $\Gamma$  übereinstimmt. Vgl. *Fischer/Lieb: Funktionentheorie* p. 186.

## 12.4 Satz von Mittag-Leffler

- Man kann die Polstellen einer meromorphen Funktion und die Hauptteile in diesen Polen weitgehend willkürlich vorschreiben.
- Als Konsequenz erhält man eine Partialbruchzerlegung für meromorphe Funktionen, die die Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen verallgemeinert.

Zur Erinnerung: Eine Folge (in  $\mathbb{C}$ ) hat keinen Häufungspunkt genau dann, wenn sie keine konvergente Teilfolge besitzt.

**Satz 186 (Mittag-Leffler).** Gegeben seien eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise verschiedener Punkte in  $\mathbb{C}$  ohne Häufungspunkt und eine Folge von Polynomen  $(P_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$  mit konstantem Term  $= 0$ . Dann gibt es eine auf  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion  $f$ , deren Pole gerade die  $a_n$  und deren entsprechende Hauptteile gerade die  $h_n(z) = P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$  sind. Genauer gibt es eine Folge von Polynomen  $(p_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ , so dass die Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (h_n(z) - p_n(z)) \quad (73)$$

auf dem Komplement der Folge  $(a_n)$  kompakt konvergent gegen eine solche meromorphe Funktion  $f$  ist. Die  $p_n(z)$  nennt man auch konvergenz-erzeugende Summanden.

Bemerkung. In dem Satz läßt sich  $\mathbb{C}$  durch ein beliebiges Gebiet ersetzen, der Beweis wird dann aber schwieriger, vgl. Behnke/Sommer.

*Beweis.* Hätte man nur endlich viele  $a_n$ , so würde  $\sum h_n$  das Gewünschte leisten. Oder auch  $\sum (h_n - p_n)$  mit beliebigen Polynomen  $p_n$ . Im Fall einer unendlichen Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wird die Reihe im allgemeinen nicht konvergieren, aber wir können die  $p_n(z)$  so geschickt wählen, dass das passiert:

Die  $h_n$  sind holomorph für  $|z| < |a_n|$ . Daher können wir zu jedem  $a_n \neq 0$  ein Taylorpolynom  $p_n$  von  $h_n$  um 0 so wählen, dass  $|h_n(z) - p_n(z)| < \frac{1}{2^n}$  für  $|z| \leq |a_n|/2$ .

Wir wählen ein  $r > 0$  und bezeichnen mit  $D_r := \{z \mid |z| \leq r\}$  die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius  $r$ . Weil die  $a_n$  keinen Häufungspunkt haben, ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ , und es gibt ein  $n_0$  mit  $|a_n|/2 \geq r$  für alle  $n \geq n_0$ .

Dann ist aber die Reihe  $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  auf der Kreisscheibe  $D_r$  eine konvergente Majorante für  $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} (h_n(z) - p_n(z))$ , und die letztere Reihe konvergiert dort gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion. Aber dann definiert

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (h_n(z) - p_n(z))$$

eine auf  $D_r$  meromorphe Funktion. Sie hat in  $D_r$  die endlich vielen Pole  $a_n$  mit  $|a_n| \leq r$  und den Hauptteilen  $h_n$ . Das gilt nun aber für jedes  $r > 0$ , und deshalb ist (73) eine auf ganz  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion mit den richtigen Polen und Hauptteilen.  $\square$

**Korollar 187.** Jede auf  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion  $f$  mit den paarweise verschiedenen Polen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und entsprechenden Hauptteilen  $h_n$  gestattet eine "Partialbruchzerlegung" der Form

$$f(z) := g(z) + \sum_{n=0}^{\infty} (h_n(z) - p_n(z))$$

mit Polynomen  $p_n(z)$  und einer ganzen Funktion  $g(z)$ .

*Beweis.* Die Pole einer auf  $\mathbb{C}$  meromorphen Funktion sind isoliert, und in jedem Kompaktum liegen nur endlich viele. Also können wir sie durchnummerieren als eine Folge ohne Häufungspunkt. Nach dem Satz gibt es also eine meromorphe Funktion  $\tilde{f}$  mit denselben Polen und Hauptteilen wie  $f$  in der Form (73). Aber  $f - \tilde{f}$  hat dann in den  $a_n$  hebbare Singularitäten und definiert eine ganze Funktion  $g$ .  $\square$

## 12.5 Weierstraßscher Produktsatz

- Man kann die Nullstellen einer holomorphen Funktion samt ihren Ordnungen weitgehend willkürlich vorschreiben.
- Als Konsequenz erhält man eine Verallgemeinerung der Linearfaktorzerlegung von Polynomen auf holomorphe Funktionen.
- Als Anwendung bestimmen wir den Körper der auf  $\mathbb{C}$  meromorphen Funktionen.

**Satz 188 (Weierstraß).** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$  ohne Häufungspunkt. Dann gibt es eine ganze Funktion  $f$ , die genau an den Stellen  $a_n$  verschwindet, und zwar sooft, wie  $a_n$  in der Folge vorkommt.

Genauer läßt sich eine solche Funktion darstellen in der Form

$$f(z) = z^m \prod_{a_n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{p_n(z/a_n)} \quad (74)$$

mit  $m := \#\{n \mid a_n = 0\}$  und mit Polynomen  $p_n(z)$  der Form

$$p_n(z) = \sum_{k=1}^{k_n} \frac{z^k}{k}. \quad (75)$$

Die  $e^{p_n(z/a_n)}$  heißen auch konvergenz-erzeugende Faktoren.

Bemerkung. In dem Satz läßt sich  $\mathbb{C}$  durch ein beliebiges Gebiet ersetzen, der Beweis wird dann aber schwieriger, vgl. *Behnke/Sommer*.

*Beweis.* Die Logarithmus-Hauptwertfunktion  $\log$  ist auf  $\{z \mid |z-1| < 1\}$  holomorph und  $\log(1-z)$  daher auf der kompakten Kreisscheibe  $\{z \mid |z| \leq \frac{1}{2}\}$  gleichmäßig durch seine Taylorreihe  $-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$  approximierbar. Wir wählen eine Folge  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  natürlicher Zahlen, so dass

$$\left| \log(1-z) + \sum_{k=1}^{k_n} \frac{z^k}{k} \right| < \frac{1}{2^n} \quad \text{für } |z| < \frac{1}{2}$$

und definieren  $p_n$  durch (75).

Wir wählen ein  $r > 0$ . Weil die Folge  $(a_n)$  keinen Häufungspunkt hat, gibt es ein  $n_0$  mit  $|a_n| \geq 2r$  für alle  $n \geq n_0$ .

Dann ist die Reihe  $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  auf  $U_r(0)$  eine konvergente Majorante für

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left( \log \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + p_n \left(\frac{z}{a_n}\right) \right),$$

und die letztere Reihe konvergiert gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion. Nach dem Logarithmuskriterium konvergiert deshalb das Produkt

$$\prod_{n=n_0+1}^{\infty} e^{(\log(1-\frac{z}{a_n})+p_n(\frac{z}{a_n}))} = \prod_{n=n_0+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{p_n(\frac{z}{a_n})}$$

auf  $U_r(0)$  gleichmäßig gegen eine nirgends verschwindende holomorphe Funktion. Aber dann definiert

$$z^m \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{p_n \left(\frac{z}{a_n}\right)}$$

auf  $U_r(0)$  eine holomorphe Funktion, die genau in den  $a_n \in U_r(0)$  verschwindet und zwar mit den richtigen Vielfachheiten. Weil  $r > 0$  beliebig war, folgt daraus die Behauptung.  $\square$

**Korollar 189.** *Ist  $g$  eine ganze Funktion mit den mit Vielfachheiten gezählten Nullstellen  $a_n$ , und ist  $a_n$  eine unendliche Folge, so besitzt  $g$  eine Darstellung der Form  $g = fe^h$  mit  $f$  wie in (74) und einer ganzen Funktion  $h$ .*

*Beweis.* Nach dem Identitätssatz haben die Nullstellen keinen Häufungspunkt. Und weil nach Korollar 77 jede ganze Funktion ohne Nullstellen von der Form  $e^h$  mit ganzem  $h$  ist, folgt die Behauptung.  $\square$

**Korollar 190.** *Jede auf ganz  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion ist der Quotient zweier ganzer Funktionen, d.h. der Körper der meromorphen Funktionen auf  $\mathbb{C}$  ist der Quotientenkörper des Ringes der ganzen Funktionen.*

*Beweis.* Ist  $f$  meromorph auf  $\mathbb{C}$  mit den Polen  $b_n$  der Ordnung  $m_n$ , so wählen wir eine ganze Funktion  $h$  mit den Nullstellen  $b_n$  der Vielfachheit  $m_n$ . Dann lassen sich die Singularitäten von  $fh$  heben, also ist  $g = fh$  eine ganze Funktion und  $f = g/h$ .  $\square$

## 13 Riemannscher Abbildungssatz

- Wann sind zwei Gebiete biholomorph äquivalent? Ein Satz, der nach Felix Klein “zu den tiefsten und größten Erkenntnissen zu zählen ist, die in der Mathematik je erwachsen sind”, gibt für eine wichtige Klasse von Gebieten darüber Auskunft.

**Definition 191.** Zwei Gebiete der komplexen Ebene heißen *biholomorph äquivalent* oder *konform äquivalent*, wenn es zwischen ihnen eine holomorphe bijektive Abbildung gibt. Beachten Sie: Ist  $f$  holomorph um  $z_0$  und  $f'(z_0) = 0$ , so hat  $f(z) - f(z_0)$  in  $z_0$  eine Nullstelle mindestens zweiter Ordnung. Deshalb ist  $f$  nach dem Nullstellensatz 82 auf keiner Umgebung von  $z_0$  injektiv. Anders als im Reellen ist also die Inverse einer bijektiven holomorphen Abbildung stets wieder holomorph.

**Beispiel 192.** Die Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D}$  und die obere Halbebene sind biholomorph äquivalent, zum Beispiel unter der Möbiustransformation  $\frac{z+i}{iz+1}$ . Hingegen sind  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{D}$  nicht biholomorph äquivalent, denn jede holomorphe Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  ist nach dem Satz von Liouville 73 konstant. □

**Satz 193 (Riemannscher Abbildungssatz).** Jedes nicht-leere einfach zusammenhängende Gebiet  $G \neq \mathbb{C}$  in  $\mathbb{C}$  ist biholomorph äquivalent zur Kreisscheibe  $\mathbb{D}$ .

*Beweis:*

1. Schritt Wir zeigen, dass  $G$  biholomorph äquivalent zu einem beschränkten Gebiet ist. (Wenn  $G$  beschränkt ist, kann man sich diesen Schritt sparen.)

Sei o.E.  $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Wir wählen ein  $z_0 \in G$  und bei  $z_0$  eine lokale Stammfunktion von  $\frac{1}{z}$ , also einen lokalen Logarithmus. Dessen Keim läßt sich nach **Lemma 120** längs jeder Kurve in  $G$  analytisch fortsetzen, und weil  $G$  einfach zusammenhängend ist, ist die Fortsetzung nach dem **Monodromiesatz 135** wegunabhängig. Man erhält eine Logarithmusfunktion  $\lambda : G \rightarrow \mathbb{C}$ , für die  $e^{\lambda(z)} = z$ . Die holomorphe Funktion

$$w(z) := e^{\frac{1}{2}\lambda(z)}$$

ist dann eine Quadratwurzel auf  $G$  und wegen  $w^2(z) = z$  injektiv. Nach dem **Nullstellensatz 82** hat  $w'$  keine Nullstelle, also ist  $w$  eine biholomorphe Abbildung von  $G$  auf ein Gebiet  $w(G)$ .

Sind  $z, \tilde{z} \in G$  mit  $w(\tilde{z}) = -w(z)$ , so folgt  $z = w(z)^2 = (-w(z))^2 = w(\tilde{z})^2 = \tilde{z}$ , also  $w(z) = -w(z) = 0$  im Widerspruch zur Definition von  $w$ . Das Gebiet  $w(G)$  enthält also keine “Spiegelpunkte”. Hat man deshalb eine kompakte Kreisscheibe in  $w(G)$ , so enthält die an 0 gespiegelte Kreisscheibe  $K$  keine Punkte von  $w(G)$ , und die Inversion an  $\partial K$  bildet  $w(G)$  biholomorph in diese Kreisscheibe, also auf ein beschränktes Gebiet ab.

2. Schritt Wir zeigen ein Surjektivitätskriterium.

Sei  $G$  einfach zusammenhängend mit  $0 \in G \subset \mathbb{D}$  und sei

$$f \in \mathcal{F} := \{f : G \rightarrow \mathbb{D} \mid f \text{ injektiv und holomorph mit } f(0) = 0\}.$$

Ist  $f(G) \neq \mathbb{D}$ , so gibt es  $F \in \mathcal{F}$  mit

$$|F'(0)| > |f'(0)|.$$

Sei also  $z_0 \in \mathbb{D} \setminus f(G)$ . Sei

$$\phi_0(z) := \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}.$$

$\phi_0$  ist nach **Satz 31** eine biholomorphe Abbildung der Kreisscheibe  $\mathbb{D}$  auf sich. Also ist dann  $\phi_0 \circ f : G \rightarrow \mathbb{D}$  eine biholomorphe Abbildung von  $G$  auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $\tilde{G} = \phi_0(f(G)) \subset \mathbb{D}$ , welches  $0 = \phi_0(z_0)$  nicht enthält. Also gibt es wie im ersten Teil des Beweises eine injektive Funktion  $w : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $w(z)^2 = z$ . Offenbar ist  $w(\tilde{G}) \subset \mathbb{D}$ . Wir setzen  $z_1 := w(\phi_0(f(0))) = w(\phi_0(0))$  und

$$\phi_1(z) := \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}.$$

Das ist eine biholomorphe Abbildung von  $\mathbb{D}$  auf sich mit  $\phi_1(z_1) = 0$ . Damit definieren wir

$$F(z) := \phi_1 \circ w \circ \phi_0 \circ f.$$

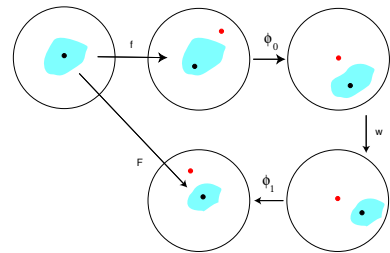
Offenbar ist  $F : G \rightarrow \mathbb{D}$  injektiv mit  $F(0) = 0$ . Für die holomorphe Abbildung  $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  mit

$$h(z) := \phi_0^{-1}(\phi_1^{-1}(z)^2)$$

gilt  $h(0) = \phi_0^{-1}(z_1^2) = \phi_0^{-1}(w(\phi_0(0))^2) = \phi_0^{-1}(\phi_0(0)) = 0$  und  $h \circ F = f$ .

Weiter ist  $h$  keine Möbiustransformation, sonst wäre auch  $\phi_0 \circ h \circ \phi_1$ , also die Quadrat-Abbildung, eine solche. Insbesondere ist  $h$  keine Drehung um 0. Deshalb ist nach dem **Schwarzischen Lemma (Satz 86)**  $|h'(0)| < 1$  und

$$|f'(0)| = |h'(0)F'(0)| < |F'(0)|.$$



**3. Schritt** Nach dem ersten Schritt können wir  $G$  als beschränkt annehmen und nach Translation und Streckung sogar  $0 \in G \subset \mathbb{D}$ . Die Menge  $\mathcal{F}$  der injektiven holomorphen Funktionen  $\mathbb{D} \supset G \rightarrow \mathbb{D}$  mit  $0 \in G$  als Fixpunkt enthält  $f(z) = z$ , ist also nicht leer. Wir konstruieren in dieser Menge ein Element mit maximalem Betrag der Ableitung in 0. Nach dem 2. Schritt ist diese Abbildung dann surjektiv auf  $\mathbb{D}$ .

Ist  $\epsilon > 0$  mit  $\overline{U_\epsilon(0)} \subset G$ , so gilt für alle  $f \in \mathcal{F}$  nach **Korollar 70 zur Cauchyschen Integralformel**

$$|f'(0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\epsilon} \frac{f(z)dz}{(z-0)^2} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\epsilon^2} 2\pi\epsilon = \frac{1}{\epsilon}.$$

Also ist

$$s_0 := \sup \{ |f'(0)| \mid f \in \mathcal{F} \} \leq \frac{1}{\epsilon} < \infty.$$

Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{F}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f'_n(0)| = s_0$ . Die Folge ist durch 1 beschränkt, und deshalb gibt es nach dem **Satz 174 von Montel** eine kompakt konvergente Teilfolge. Deren Grenzfunktion  $f$  ist nach dem **Satz 168 über kompakte Konvergenz** holomorph mit  $|f'(0)| = s_0$  und natürlich  $f(0) = 0$ . Weil  $f'(0) \neq 0$ , ist  $f$  nicht konstant und deshalb nach **Korollar 170 zum Satz von Hurwitz** wie die  $f_n$  eine injektive Funktion. Schließlich ist  $f(G) \subset \mathbb{D}$  und nach dem **Satz 83 von der Gebietstreue** daher  $f(G) = \mathbb{D}$ . Nach dem 2. Schritt folgt  $f(G) = \mathbb{D}$ .

## Bemerkungen zum Riemannsches Abbildungssatz.

1. Riemann verwendet im Beweis des Satzes in seiner Dissertation von 1851 ein Variationsprinzip, das sogenannte Dirichletprinzip, und setzt dabei die Existenz einer Extremalen als offensichtlich voraus - was sie aber nicht ist, wie später Weierstraß gezeigt hat. Aber Gauß als Gutachter der Dissertation hat die Lücke auch nicht moniert. Repariert wurde Riemanns Beweis 1901 von Hilbert. Damals begann eine lange Arbeit an dem Problem, an der sich vor allem Schwarz, Carathéodory, Koebe, Fejèr und Riesz mit immer neuen Beweisideen und Verbesserungen beteiligten, bis Carathéodory 1928 den hier vorgestellten ganz kurzen, wenn auch sehr gehaltvollen Beweis veröffentlichte. Zur Geschichte vergleiche das im Literaturverzeichnis angegebene Buch von *Felix Klein* und *R. Remmert: Funktionentheorie II*.
2. Hörer der Vorlesung im Sommer 2006 haben angemerkt: "Einem so schönen Beweis wie dem für den Riemannsches Abbildungssatz kann man doch mal ein Kästchen spendieren, oder?". Dem bin ich hier nachgekommen. Außerdem habe ich durch Fettdruck der Verweise deutlich gemacht, wieviele von den Ergebnissen dieses Semesters in den Beweis einfließen.
3. Der schöne Beweis ist allerdings nicht konstruktiv. Man möchte aber gern vor allem die Umkehrabbildung explizit haben, um zum Beispiel eine auf  $\mathbb{D}$  oder der dazu möbiusäquivalenten oberen Halbebene gegebene Textur winkeltreu auf ein Gebiet abzubilden. Wenn das Gebiet von Polygonzügen berandet ist, gibt es dafür ein nach Schwarz und Christoffel benanntes klassisches Verfahren, das allerdings wegen der dabei (oft nur schwer) auszuwertenden Kurvenintegrale mühsam anzuwenden war. Inzwischen gibt es dafür aber sehr gute Softwarepakete.

Zu Abschluss betrachten wir eine biholomorphe Abbildung  $f$  vom Inneren eines achsenparalleles Rechtecks

$$R := \{x + iy \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$$

auf die obere Halbebene, wie sie nach dem Riemannsches Satz ja existiert. Wir wollen annehmen, dass sich  $f$  auf den Rand des Rechtecks zu einer stetigen Abbildung nach  $\hat{\mathbb{C}}$  fortsetzen läßt und diesen in die reelle Gerade abbildet, wobei zum Beispiel die Ecke  $(0, 0)$  im Punkt  $\infty$  landet. Die Funktion  $f : R \rightarrow \{z \mid \text{Im}(z) \geq 0\}$  läßt sich dann mit Hilfe des Schwarzsches Spiegelungsprinzips (Satz 85) zu einer auf ganz  $\mathbb{C}$  definierten meromorphen Funktion fortsetzen, für die nach Konstruktion

$$f(z + 2ak + 2ibl) = f(z) \text{ für alle } k, l \in \mathbb{Z}$$

gilt. Die Funktion hat also Pole in allen Punkten  $2ak + 2ibl$  und die Perioden  $2a$  und  $2ib$ , sie ist eine sogenannte *doppelt-periodische Funktion*. Mit diesen werden wir uns im nächsten Abschnitte beschäftigen.

## 14 Elliptische Funktionen

In diesem Abschnitt folgen wir sehr eng dem Kapitel über elliptische Funktionen im Buch *Fischer/Lieb: Funktionentheorie, Vieweg, 4. Auflage 1985*. Die Theorie der Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion findet man eingehender und sehr schön lesbar in *Freitag/Busam: Funktionentheorie, Springer, 2. Auflage*.

Wir betrachten meromorphe Funktionen auf  $\mathbb{C}$  als Abbildungen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  in die Riemannsche Zahlenkugel, so dass sie also wirklich auf ganz  $\mathbb{C}$  definiert sind. Viele Beispiele, die wir kennen, sind periodisch: Es gibt ein (nicht-triviales)  $\omega \in \mathbb{C}$  mit

$$f(z + \omega) = f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Gibt es meromorphe Funktionen mit mehreren Perioden? Natürlich: mit  $\omega$  ist auch jedes  $n\omega, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  eine Periode. Aber gibt es nicht-konstante Funktionen mit Perioden  $\omega_1, \omega_2$ , die über  $\mathbb{Z}$  linear unabhängig sind? Die Betrachtungen am Ende des letzten Kapitels enthielten ja eine unbewiesene Annahme über das Randverhalten der Abbildung.

Wir werden sehen, dass über  $\mathbb{Z}$  linear unabhängige Perioden  $\omega_1$  und  $\omega_2$  sogar über  $\mathbb{R}$  linear unabhängig sind. Funktionen, die mit solchen Perioden doppelt-periodisch sind, heißen *elliptische Funktionen*. Inspektion der uns bisher geläufigen meromorphen Funktionen liefert allerdings keine nicht-trivialen Beispiele. Elliptische Funktionen, die es, wie wir sehen werden, wirklich gibt, sind also eine ganz neue Klasse von Funktionen.

- Wir beginnen mit der Untersuchung möglicher Periodenmengen.
- Dann wollen die Eigenschaften elliptischer Funktionen studieren,
- insbesondere die der sogenannten Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion, die uns ein explizites Beispiel liefert.
- Dann werden wir zeigen, dass sich alle elliptischen Funktionen mit festen Perioden durch die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion ausdrücken lassen, womit diese Funktion ihre zentrale Rolle in der Theorie legitimiert.
- Zum Schluss werden wir den mysteriösen Namen *elliptische Funktionen* erklären und noch einmal auf die biholomorphe Äquivalenz zwischen Rechteck und oberer Halbebene zurückkommen.

### 14.1 Periodische Funktionen und Periodengitter

Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  eine meromorphe Funktion. Dann nennen wir

$$\Lambda(f) := \{\omega \in \mathbb{C} \mid f(z + \omega) = f(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{C}\}$$

die *Periodenmenge* von  $f$ .

**Satz 194.** Die Periodenmenge einer nicht-konstanten meromorphen Funktion  $f$  ist eine diskrete Untergruppe von  $(\mathbb{C}, +)$ .

*Beweis.* Es ist klar, dass

$$\omega_1, \omega_2 \in \Lambda(f) \implies n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \in \Lambda(f) \text{ für alle } n_1, n_2 \in \mathbb{Z}.$$

Also ist  $\Lambda(f)$  eine Untergruppe. Wäre  $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine gegen  $a \in \mathbb{C}$  konvergente Folge in  $\Lambda(f) \setminus \{a\}$ , und  $f$  in  $z_0$  holomorph, so wäre  $f(z_0 + \omega_k) = f(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_0 + \omega_k) = f(z_0 + a)$  und  $f$  nach dem Identitätssatz konstant.  $\square$

**Satz 195 (von Abel: Klassifikation diskreter Untergruppen von  $\mathbb{C}$ ).** *Es gibt drei Typen diskreter Untergruppen  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  und entsprechend drei Typen  $\Lambda$ -periodischer meromorpher Funktionen auf  $\mathbb{C}$ :*

(i)  $\Lambda = \{0\}$ .

(ii) Es gibt  $\omega_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit

$$\Lambda = \{n_1 \omega_1 \mid n_1 \in \mathbb{Z}\}.$$

(iii) Es gibt  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit

$$\Lambda = \{n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

und

$$\omega_1 / \omega_2 \notin \mathbb{R}.$$

In diesem Fall heißt  $\Lambda$  ein Gitter.  $\omega_1$  und  $\omega_2$  sind linear unabhängig über  $\mathbb{R}$ . Sie heißen Erzeugende von  $\Lambda$  oder, wenn  $\Lambda = \Lambda(f)$  eine Periodengruppe ist, auch Hauptperioden. Sie sind durch  $\Lambda$  nicht eindeutig bestimmt.

Da wir den Satz im weiteren nicht benötigen, verzichten wir auf den Beweis. Vgl. Skriptum Bobenko.

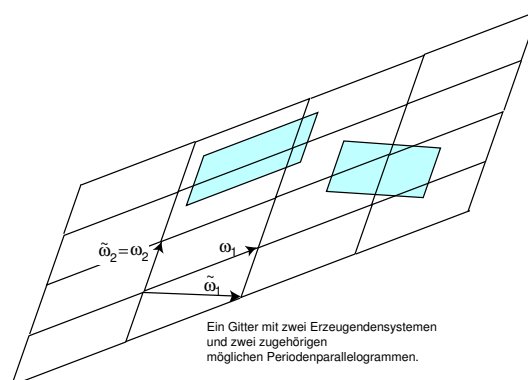
**Definition 196.** (i) Eine auf  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion, heißt *doppelt-periodisch* oder eine *elliptische Funktion*, wenn  $\Lambda(f)$  ein Gitter ist.

(ii) Eine *elliptische Funktion zu einem Gitter  $\Lambda$*  ist eine elliptische Funktion mit  $\Lambda \subset \Lambda(f)$ .

(iii) Ist  $f$  eine elliptische Funktion zum Gitter  $\Lambda$  mit Erzeugenden  $\omega_1, \omega_2$  und  $z_0 \in \mathbb{C}$ , so heißt

$$\{z_0 + s\omega_1 + t\omega_2 \mid 0 \leq s, t \leq 1\}$$

ein (*abgeschlossenes*) *Periodenparallelogramm* von  $f$ . Entsprechend definiert man offene oder halboffene Periodenparallelogramme. Wir werden das abgeschlossenen Periodenparallelogramm mit der offensichtlichen Parametrisierung auch als singuläres Quadrat auffassen.



**Bemerkung: Der Periodentorus.** Ist  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  ein Gitter, so definiert

$$z \sim z' \iff z - z' \in \Lambda$$

eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{C}$ . Die Restklassenmenge  $\mathbb{C}/\Lambda$  ist die Quotientengruppe von  $\mathbb{C}$  nach der Untergruppe  $\Lambda$ . Ein abgeschlossenes Periodenparallelogramm enthält Repräsentanten aus jeder Äquivalenzklasse, und nur die auf dem Rand gegenüberliegenden Punkte liegen in derselben Klasse. Daher kann man sich  $\mathbb{C}/\Lambda$  vorstellen als Periodenparallelogramm, bei dem die gegenüberliegenden Ränder identifiziert oder verklebt sind, also als einen Torus, den *Periodentorus*. Eine elliptische Funktion  $f$  mit  $\Lambda$  als Gitter definiert eine Abbildung  $\hat{f}: \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ . Der Periodentorus trägt eine durch das Gitter gegebene kanonische komplexe Struktur, und elliptische Funktionen lassen sich deshalb interpretieren als holomorphe Abbildungen eines Torus in die Riemannsche Zahlenkugel. Wir werden die elliptische Funktion  $f$  in unserer Vorstellung meistens mit  $\hat{f}$  identifizieren. Das ist insbesondere hilfreich, wenn man zum Beispiel über die Anzahl der Pole einer elliptischen Funktion sprechen möchte. Die ist entweder 0 oder  $\infty$ , aber eigentlich möchte man wissen, wieviele inäquivalente Pole es gibt. Dann kann man sprechen über

- die Anzahl der Pole in einem halboffenen Periodenparallelogramm,
- die Anzahl der Pole auf dem Periodentorus oder
- die Anzahl der Pole modulo  $\Lambda$  oder, ganz kurz,
- die Anzahl der Pole von  $f$ ,

wobei man immer dieselbe Zahl meint. Wenn wir sagen

*Seien  $z_1, \dots, z_n$  die verschiedenen Pole von  $f$ ,*

so meinen wir, dass diese Punkte ein vollständiges Repräsentantensystem für die modulo  $\Lambda$  verschiedenen Pole bilden.

**Satz 197.** *Die Menge  $K(\Lambda)$  der elliptischen Funktionen zu einem gegebenen Periodengitter  $\Lambda$  bildet einen Unterkörper vom Körper aller meromorphen Funktionen auf  $\mathbb{C}$ . Er enthält die Konstanten und ist abgeschlossen gegenüber Differentiation.*

*Beweis.* Klar, weil die Periodizität bei den algebraischen Operationen und bei Differentiation erhalten bleibt. □

Wir zeigen nun drei fundamentale Sätze über elliptische Funktionen, die Liouville 1847 in seinen Vorlesungen gezeigt hat. Den ersten kennen Sie in einer etwas anderen Variante schon unter diesem Namen:

**Satz 198 (Erster Liouvillescher Satz).** *Jede holomorphe elliptische Funktion ist konstant.*

*Beweis.* Eine solche Funktion nimmt auf einem kompakten Periodenparallelogramm alle ihre Werte an, ist also beschränkt und nach dem “alten” Satz von Liouville konstant. □

**Satz 199 (Zweiter Liouvillescher Satz: Residuensumme elliptischer Funktionen).**

Eine elliptische Funktion hat (modulo  $\Lambda$ ) höchstens endlich viele Pole. Sind  $z_1, \dots, z_n$  die verschiedenen Pole von  $f$ , so gilt

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k) = 0.$$

Die Anzahl der mit Vielfachheiten gezählten Pole, also  $\sum_{k=1}^n |\operatorname{Ord}(f, z_k)|$ , heißt die Ordnung  $\operatorname{Ord}(f)$  der elliptischen Funktion.

*Beweis.* Die Pole einer meromorphen Funktion sind isoliert, also liegen in jedem kompakten Periodenparallelogramm höchstens endlich viele. Darum kann man auch das Parallelogramm so verschieben, dass kein Pol auf dem Rand liegt. Dann ist

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k) &= \int_{\partial P} f(z) dz \\ &= \int_{1P} f(z) dz - \int_{1P} f(z) dz - \int_{2P} f(z) dz + \int_{2P} f(z) dz. \end{aligned}$$

Wegen der Periodizität hat  $f$  aber auf gegenüberliegenden Seiten des Periodenparallelogramms dieselben Werte und die rechte Integralsumme ist 0.  $\square$

Unter der *Anzahl der  $w$ -Stellen* einer meromorphen Funktion  $f(z)$  versteht man die Anzahl der Nullstellen der Funktion  $f(z) - w$ , jeweils gezählt mit der entsprechenden Ordnung.

**Korollar 200 (Dritter Liouvillescher Satz).** Die Anzahl der  $w$ -Stellen einer nicht-konstanten elliptischen Funktion  $f$  der Ordnung  $m := \operatorname{Ord}(f)$  ist für jedes  $w \in \hat{\mathbb{C}}$  gleich  $m$ , d.h.  $f$  nimmt auf dem Periodentorus jeden Wert von  $\hat{\mathbb{C}}$  genau  $m$ -mal an.

*Beweis.* Sei  $w \in \mathbb{C}$ . Die Funktion  $\frac{(f(z)-w)'}{f(z)-w}$  ist ebenfalls elliptisch zum Gitter  $\Lambda$ , also gilt für ein Periodenparallelogramm, dessen Rand keine ihrer Pole enthält, von  $f(z) - w$  enthält

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{z_k \text{ Pol in } \overset{\circ}{P}} \operatorname{Res} \left( \frac{(f(z)-w)'}{f(z)-w}, z_k \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P} \frac{(f(z)-w)'}{f(z)-w} dz \\ &= \text{Anzahl der } w\text{-Stellen} - \text{Anzahl der Pole von } f \text{ in } \overset{\circ}{P}. \end{aligned}$$

$\square$

**Korollar 201.** Es gibt keine elliptische Funktion mit genau einem einfachen Pol auf dem Periodentorus.

*Beweis.* Sonst wäre die Residuensumme nicht 0.  $\square$

## 14.2 Die Weierstraßsche $\wp$ -Funktion

Die “einfachsten” elliptischen Funktionen haben nach dem letzten Satz entweder einen Pol der Ordnung 2 mit verschwindendem Residuum oder zwei einfache Pole mit entgegengesetztem Residuum.

**Satz 202 (und Definition: Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion).** Sei  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  ein Gitter. Wir setzen

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum' \left( \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

wobei  $\sum'$  die Summation über alle Gitterpunkte  $\omega \in \Lambda \setminus \{0\}$  bedeutet.

Dann ist  $\wp$  eine elliptische Funktion zum Gitter  $\Lambda$  mit genau einem Pol, und zwar von der Ordnung 2.

$\wp$  heißt die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion (zum Gitter  $\Lambda$ ).

*Beweis.* Zur Konvergenz. Die unendliche Reihe in der Definition ist keine ganz gewöhnliche, weil  $\Lambda$  zwar abzählbar, aber nicht kanonisch linear geordnet ist. Wir zeigen für eine bestimmte Abzählung die absolute und kompakte Konvergenz. Nach dem Umordnungssatz ist dann  $\sum'$  für jede gewählte Abzählung kompakt konvergent gegen dieselbe Grenzwertfunktion.

Zunächst ist für  $R > 0$ ,  $|z| \leq R$  und  $|\omega| \geq 2R$

$$|z - \omega| \geq |\omega| - |z| \geq \frac{|\omega|}{2},$$

und deshalb

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \left| \frac{z(2\omega - z)}{\omega^2(z-\omega)^2} \right| \leq \frac{R \cdot 3|\omega|}{|\omega|^2 \frac{|\omega|^2}{4}} = \frac{12R}{|\omega|^3}$$

Wenn wir also zeigen können, dass für eine und dann für jede Abzählung von  $\Lambda \setminus \{0\}$

$$\sum' \frac{1}{|\omega|^3} < \infty, \tag{76}$$

dann ist die Summe in der Definition von  $\wp$  kompakt konvergent auf  $\mathbb{C} \setminus \Lambda$  und  $\wp$  eine meromorphe Funktion mit Polen genau in den Punkten von  $\Lambda$ .

Beweis von (76). Wir betrachten zunächst den Spezialfall

$$\Lambda = \mathbb{Z}^2 = \{n_1 + in_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Dann ist

$$\sum' \frac{1}{|\omega|^3} = \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}^3}$$

Auf dem Rand des Quadrates  $Q_n$  mit den Ecken  $(\pm n, \pm n)$  liegen genau  $8n$  Gitterpunkte, und für jedes  $\omega$  davon ist  $|\omega| \geq n$ . Also ist

$$\sum_{\omega \in \Lambda \cap \partial Q_n} \frac{1}{|\omega|^3} \leq \frac{8n}{n^3}.$$

Aus der Konvergenz von  $\sum \frac{1}{n^2}$  folgt (76).

Ist nun

$$\Lambda = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\},$$

ein beliebiges Gitter mit Erzeugenden  $\omega_1, \omega_2$ , so betrachten wir den  $\mathbb{R}$ -linearen Isomorphismus  $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\phi(x + iy) := x\omega_1 + y\omega_2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dafür gilt

$$|x + iy| = |\phi^{-1}(x\omega_1 + y\omega_2)| \leq c|x\omega_1 + y\omega_2|,$$

wobei  $c := \|\phi^{-1}\|$  die Operatornorm von  $\phi^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist. Also ist

$$\frac{1}{|n_1\omega_1 + n_2\omega_2|^3} \leq \frac{c^3}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}^3}.$$

Damit ist (76) auch für beliebiges Gitter bewiesen.

Zur Periodizität. Aus der Definition ist klar, dass  $\wp$  eine gerade Funktion ist. Wegen der Abspaltung des  $(\omega = 0)$ -Terms ist die Periodizität hingegen nicht so offensichtlich. Die Ableitung von  $\wp$  ist

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^3},$$

wobei die Summe jetzt über alle  $\omega \in \Lambda$  geht!  $\wp'$  ist daher offensichtlich  $\Lambda$ -periodisch, und wir wollen das auf  $\wp$  übertragen. Wegen

$$\frac{d}{dz}(\wp(z + \omega) - \wp(z)) = \wp'(z + \omega) - \wp'(z)$$

ist  $\wp(\omega + z) - \wp(z)$  konstant und (setze  $z = -\frac{\omega}{2}$ )

$$\wp(\omega + z) - \wp(z) = \wp\left(\frac{\omega}{2}\right) - \wp\left(-\frac{\omega}{2}\right).$$

Weil aber  $\wp$  gerade ist, folgt  $\wp(\omega + z) = \wp(z)$ .

Zu den Polstellen. Wegen der  $\Lambda$ -Periodizität von  $\wp$  ist  $z = 0$  die einzige Polstelle modulo  $\Lambda$ . Diese ist offensichtlich von der Ordnung 2, und das Residuum ist 0 (was wir aber schon wußten).  $\square$

**Laurententwicklung um den Pol.** Für  $|z| < |\omega|$  ist (wegen  $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum kx^{k-1}$ )

$$\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2} \sum_{k=2}^{\infty} k \frac{z^{k-1}}{\omega^{k-1}}$$

und deshalb erhält man

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega} \left( \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\omega^{k+1}} z^{k-1} \right) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=2}^{\infty} k \left( \sum_{\omega} \frac{1}{\omega^{k+1}} \right) z^{k-1}.$$

Die Summen  $\sum_{\omega} \frac{1}{\omega^{k+1}}$  verschwinden für gerades  $k$ , weil mit  $\omega \in \Lambda$  auch  $-\omega \in \Lambda$ . Wir erhalten

**Satz 203.** Die Laurententwicklung von  $\wp$  in  $0 < |z| < \min\{|\omega| \mid \omega \in \Lambda \setminus \{0\}\}$  ist

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) G_{2k+2} z^{2k}$$

mit

$$G_{2k+2} = \sum' \frac{1}{\omega^{2k+2}}.$$

Die  $G_{2k+2}$  heißen Eisensteinreihen.

Gliedweise Differentiation liefert

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + \dots$$

Berechnen wir nun die ersten Terme von Cauchyprodukten, so finden wir

$$\begin{aligned} \wp(z) &= \frac{1}{z^2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \dots \\ \wp(z)^3 &= \frac{1}{z^6} + \frac{9G_4}{z^2} + 15G_6 + \dots \\ \wp'(z)^2 &= \frac{4}{z^6} - \frac{24G_4}{z^2} - 80G_6 + \dots \end{aligned}$$

Wir betrachten nun eine Linearkombination dieser Funktionen, die so gemacht ist, dass sich die Hauptteile kompensieren und der konstante Term verschwindet:

$$f(z) := \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4\wp(z) + 140G_6.$$

Das ist dann eine elliptische Funktion mit 0 als einzigem möglichen Pol, in dem aber der Hauptteil verschwindet. Also ist 0 eine hebbare Singularität und  $f$  konstant mit  $f(0) = 0$ . Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

**Satz 204 (Differentialgleichung der  $\wp$ -Funktion).** *Es gilt*

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3 \tag{77}$$

mit

$$g_2 = 60 \sum' \frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 = 140 \sum' \frac{1}{\omega^6}.$$

Bestimmt die Differentialgleichung, d.h. bestimmen  $g_2, g_3$  die  $\wp$ -Funktion eindeutig? Offenbar nicht, denn für jedes  $a \in \mathbb{C}$  ist auch  $f(z) := \wp(z + a)$  eine Lösung. Das ist aber die einzige Freiheit, die bleibt. Zwei Funktionen, die auf einem Gebiet  $G$  die Differentialgleichung erfüllen, unterscheiden sich nur um eine Translation des Arguments.

**Eine weitere Herleitung der Differentialgleichung für  $\wp$ .** Da die Funktion  $\wp$  von der Ordnung 2 ist, nimmt sie jeden Wert genau zweimal an. Die Punkte, wo sie einen Wert mit Vielfachheit 2 annimmt, sind genau die Nullstellen der Funktion  $\wp'$ .

**Lemma 205.** *Ist  $f$  eine gerade elliptische Funktion zum Gitter  $\Lambda$ , so gilt für alle  $\omega \in \Lambda$  und  $z \in \mathbb{C}$*

$$f\left(\frac{\omega}{2} + z\right) = f\left(\frac{\omega}{2} - z\right).$$

*Ist  $\frac{\omega}{2}$  kein Pol von  $f$ , so gilt deshalb*

$$f'\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0.$$

*Beweis.*

$$f\left(\frac{\omega}{2} + z\right) = f\left(-\frac{\omega}{2} - z\right) = f\left(-\frac{\omega}{2} + \omega - z\right) = f\left(\frac{\omega}{2} - z\right).$$

□

Weil  $\wp'$  modulo  $\Lambda$  nur in 0 einen Pol hat, und der die Ordnung 3 hat, hat  $\wp'$  modulo  $\Lambda$  genau drei Nullstellen. Ist  $\omega_1, \omega_2$  ein Erzeugendensystem, so sind das nach dem Lemma also

$$\frac{\omega_1}{2}, \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \frac{\omega_2}{2}.$$

Die entsprechenden doppelt angenommenen Werte von  $\wp$ , also

$$e_1 := \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 := \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right), \quad e_3 := \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \quad (78)$$

heißen auch die *Halbwerte* von  $\wp$ . Sie sind paarweise verschieden, weil  $\wp$  ja keinen Wert viermal annimmt.

Die Funktion

$$\begin{aligned} f(z) &= \wp'(z)^2 - 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3) \\ &= \left(\frac{4}{z^6} + \dots\right) - 4\left(\frac{1}{z^6} - \frac{e_1 + e_2 + e_3}{z^4} + \dots\right) \end{aligned}$$

ist elliptisch. Sie hat höchstens in 0 einen Pol, und zwar von der Ordnung höchstens 4. Andererseits hat sie in  $\frac{\omega_1}{2}$ ,  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  und  $\frac{\omega_2}{2}$  jeweils eine mindestens doppelte Nullstelle, ist also nach dem Korollar 200 konstant, natürlich mit Wert 0. Daraus folgt

**Satz 206.** *Mit den Werten  $e_1, e_2, e_3$  aus (78) gilt*

$$\wp'(z)^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)$$

Der Vergleich mit Satz 204 liefert für das für die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion charakteristische Polynom

$$4x^3 - g_2x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

folgende Identitäten:

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= 0, \\ 4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) &= -g_2, \\ 4e_1e_2e_3 &= g_3. \end{aligned}$$

Daraus findet man durch elementares Rechnen

$$\begin{aligned} g_2^3 - 27g_3^2 &= 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 \neq 0, \\ \frac{3}{2}g_2 &= (e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2. \end{aligned}$$

Die Frage, ob die sogenannte “Diskriminanten-Ungleichung”  $g_2^3 \neq 27g_3^2$  auch hinreichend dafür sei, dass es ein Gitter mit den Gitterinvarianten  $g_2, g_3$  und damit eine  $\wp$ -Funktion gibt, die die Differentialgleichung (77) löst, ist eine Variante des sogenannten *Jacobischen Problems*. Die Antwort ist “JA” (Hurwitz 1903), vgl. *K. Lamotke, Riemannsche Flächen, Springer 2005, Abschnitt 2.2.7*.

### 14.3 Der Körper der elliptischen Funktionen

Die Ableitung einer nicht-konstanten elliptischen Funktion der Ordnung  $m$  hat auf dem Periodentorus nur endlich viele Nullstellen, also werden fast alle Werte  $c \in \mathbb{C}$  an genau  $m$  verschiedenen Punkten angenommen. Sei  $c$  ein solcher Wert und  $f(a) = c$ . Wir setzen weiter zunächst voraus, dass

$$f \text{ gerade}$$

ist. Dann ist auch  $f(-a) = c$ . Wären  $a$  und  $-a$  äquivalent modulo  $\Lambda$ , so wäre  $2a \in \Lambda$  und  $f'(a) = 0$  nach Lemma 205. Das steht aber im Widerspruch zur Wahl von  $c$  und damit von  $a$ . Also sind  $a$  und  $-a$  nicht äquivalent modulo  $\Lambda$ . Daher wird der Wert  $c$  modulo  $\Lambda$  an genau  $m = 2n$  Punkten  $a_1, \dots, a_n$  und  $-a_1, \dots, -a_n$  angenommen. Sei nun  $d \in \mathbb{C}$  ein weiterer Wert, der an  $2n$  verschiedenen Stellen  $b_1, \dots, b_n$  und  $-b_1, \dots, -b_n$  angenommen wird. Dann ist

$$F(z) := \frac{f(z) - c}{f(z) - d}$$

eine elliptische Funktion mit Nullstellen erster Ordnung in den  $a_k, -a_k$  und Polen erster Ordnung in den  $b_k, -b_k$ .

Andererseits hat die Funktion  $h_k(z) = \wp(z) - \wp(a_k)$  Nullstellen in  $a_k$  und  $-a_k$ , und weil  $\wp$  von der Ordnung 2 ist, sind das alle Nullstellen. Analoges gilt für die  $b_k$  und deshalb hat die elliptische Funktion

$$G(z) = \frac{(\wp(z) - \wp(a_1)) \dots (\wp(z) - \wp(a_n))}{(\wp(z) - \wp(b_1)) \dots (\wp(z) - \wp(b_n))}$$

einfache Nullstellen in den  $a_k, -a_k$  und Pole erster Ordnung in den  $b_k, -b_k$ . Dann ist aber  $F/G$  eine holomorphe elliptische Funktion und damit konstant vom Wert  $A$ . Auflösen von

$$\frac{f(z) - c}{f(z) - d} = A \frac{(\wp(z) - \wp(a_1)) \dots (\wp(z) - \wp(a_n))}{(\wp(z) - \wp(b_1)) \dots (\wp(z) - \wp(b_n))}$$

nach  $f(z)$  liefert: Jede gerade elliptische Funktion zum Gitter  $\Lambda$  ist eine rationale Funktion in  $\wp$ .

**Satz 207.** (i) Jede elliptische Funktion ist eine rationale Funktion von  $\wp$  und  $\wp'$  zum selben Gitter.

(ii) Wir bezeichnen mit  $\mathbb{C}(s)$  den Körper der rationalen Funktionen in einer Variablen  $s$  über  $\mathbb{C}$  und mit  $\mathbb{C}(s)[t]$  den Polynomring über  $\mathbb{C}(s)$ . Sei  $K(\Lambda)$  der Körper der elliptischen Funktionen zum Gitter  $\Lambda$  und seien  $g_2, g_3$  dazu definiert wie im Satz 204. Dann gilt

$$K(\Lambda) \cong \mathbb{C}(s)[t]/(t^2 - 4s^3 + g_2s + g_3).$$

*Beweis.* Zu (i). Das ist für gerade elliptische Funktionen oben bereits erledigt. Ist  $f$  eine ungerade elliptische Funktion zum Gitter  $\Lambda$ , so ist  $f/\wp'$  eine gerade elliptische Funktion, also  $f(z) = R(\wp(z))\wp'(z)$  für eine rationale Funktion  $R$ . Und weil sich jede elliptische Funktion als Summe einer geraden und einer ungeraden schreiben läßt, folgt (i).

Zu (ii). Wir betrachten den Ringhomomorphismus

$$\phi : \mathbb{C}(s)[t] \rightarrow K(\Lambda)$$

mit

$$\phi(s) = \wp, \quad \phi(t) = \wp'.$$

Nach dem Beweis zu (i) ist  $\phi$  surjektiv und nach Satz 206 ist  $t^2 - 4s^3 + g_2s + g_3$  im Kern. Offenbar ist das aber auch ein nicht-triviales Polynom kleinsten Grades im Kern  $\subset \mathbb{C}(s)[t]$ , weil  $\wp'$  ungerade und daher sicher kein Polynom in  $\wp$  ist. Weil Polynome über Körpern Hauptidealringe sind, ist der Kern das von  $t^2 - 4s^3 + g_2s + g_3$  erzeugte Ideal, und die Behauptung folgt aus dem Homomorphiesatz.  $\square$

Im Körper der elliptischen Funktionen gibt es neben  $\wp$  viele andere schöne Exemplare, zum Beispiel eine ganze Kollektion von nach Jacobi benannten Funktionen. Auf diese stößt man bei anderen Zugängen zum Thema.

## 14.4 $\wp$ -Funktion und elliptische Integrale

Integrale der Form

$$\int R(x, \sqrt{P(x)}) dx$$

mit einer rationalen Funktion  $R$  in zwei Variablen und einem Polynom  $P(x)$  vom Grad  $\leq 2$  lassen sich (nach Substitution) mit elementaren Funktionen lösen. Zum Beispiel ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \text{const.} \quad (79)$$

Wenn aber  $P$  vom Grad 3 oder 4 ist, klappt das nicht mehr. Solche Integrale treten auf bei der Umfangsberechnung der Ellipse und haben daher den Namen *elliptische Integrale* bekommen:

$$\frac{1}{4}L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \stackrel{x=\tan(t/2)}{=} \int_0^1 \frac{\sqrt{4a^2 x^2 + b^2(1-x^2)^2}}{(1+x^2)^2} dx.$$

Die Stammfunktionen sind in diesem Fall "völlig neue" Funktionen, nämlich, in schöner Analogie zur Gleichung (79), die Umkehrfunktionen von (aufs Reelle eingeschränkten) elliptischen Funktionen.

Wir demonstrieren das an einem

**Beispiel 208.** Sei  $\Lambda = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$  ein achsenparalleles Rechteckgitter mit positiven reellen  $\omega_1$  und  $\omega_2 \in i\mathbb{R}$  und  $\wp$  die zugehörige Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion. Dann ist  $\Lambda$  invariant unter der Konjugation, und  $\wp$  ist auf der reellen Achse reell. Ebenso sind die zugehörigen Werte  $g_2, g_3$  reell. Nach Lemma 205 ist  $\wp$  auf dem Intervall  $]0, \omega_1[$  symmetrisch bezüglich des Mittelpunktes  $\rho_1 := \frac{\omega_1}{2}$  und als Funktion der Ordnung 2 deshalb auf  $]0, \rho_1[$  injektiv. Das letztere Intervall wird damit streng monoton fallend auf  $[e_1, +\infty[$  abgebildet. Die Umkehrfunktion

$$f : [e_1, \infty[ \rightarrow ]0, \rho_1[$$

ist differenzierbar auf  $]e_1, \infty[$ , und dort gilt nach Satz 204

$$f'(y) = \frac{1}{\wp'(f(y))} = \frac{1}{-\sqrt{4\wp(f(y))^3 - g_2\wp(f(y)) - g_3}} = \frac{-1}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}}.$$

Beachten Sie dabei, dass wegen der Monotonie von  $\wp$  die Ableitung  $\wp'$  auf  $]e_1, \infty[$  negativ ist.

Die Umkehrfunktion  $f$  der Einschränkung von  $\wp$  ist also die eindeutig bestimmte Stammfunktion zu  $\frac{-1}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}}$  mit  $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = 0$ .

Das elliptische Integral

$$\rho_1 + \int_{e_1}^x \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}}$$

ist die Umkehrfunktion der auf  $]0, \rho_1[$  eingeschränkten Weierstraßfunktion. □

Dieses Beispiel ist kein Zufall: Jedes elliptische Integral  $\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$  besitzt eine Umkehrfunktion, die sich zu einer elliptischen Funktion fortsetzen läßt. Vergleichen Sie dazu das erste Kapitel von *H.E. Rauch/A. Lebowitz: Elliptic Functions, Theta functions, and Riemann Surfaces*.

## 14.5 $\wp$ -Funktion und Abbildungssatz

Sei wieder wie im letzten Beispiel  $\Lambda = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$  ein achsenparalleles Rechteckgitter mit positiven reellen  $\omega_1$  und  $\wp$  die zugehörige Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion.

Dann ist  $\Lambda$  invariant unter Konjugation und deshalb

$$\wp(\bar{z}) = \overline{\wp(z)}.$$

Weil  $\wp$  überdies gerade ist, folgt für reelles  $t$

$$\wp(it) = \overline{\wp(-it)} = \overline{\wp(it)},$$

so dass  $\wp$  auch auf der imaginären Achse reell ist.

Ebenso finden wir

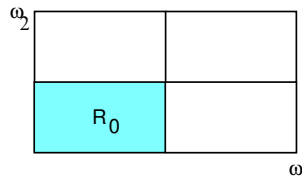
$$\overline{\wp\left(\frac{\omega_1}{2} + it\right)} = \wp\left(\frac{\omega_1}{2} - it\right) \stackrel{\text{Lemma 205}}{=} \wp\left(\frac{\omega_1}{2} + it\right)$$

Also ist  $\wp$  auch auf der imaginären “Halbachse” und ebenso auf der reellen “Halbachse” reell. Mit anderen Worten: Der Rand vom Viertelrechteck

$$R_0 := \left\{ x + iy \mid 0 \leq x \leq \frac{\omega_1}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\omega_2}{2} \right\}$$

wird in die reelle Achse abgebildet. In den Ecken  $\neq 0$  des Viertelrechtecks liegen die (einfachen) Nullstellen von  $\wp'$ , so dass  $\wp$  dort lokal wie die Quadratabbildung aussieht. Der rechte Winkel in der Ecke wird also zu einem gestreckten. Läuft man einmal um den Rand von  $R_0$  herum, so durchläuft der Bildpunkt also die ganze reelle Achse von  $\infty$  bis  $-\infty$ . Nach Lemma 205 mit  $\omega = \omega_1 + \omega_2$  nimmt  $\wp$  im linken halben Periodenrechteck dieselben Werte an wie im rechten, und weil  $\wp$  von der Ordnung 2 ist, nimmt es deshalb im halboffenen linken halben Periodenrechteck jeden Wert genau einmal an. Deshalb wird das Innere von  $R_0$  surjektiv auf eine Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , also auf eine offene Halbebene abgebildet, und zwar auf die untere, weil  $\wp|_{]0, \rho_1]}$  monoton fallend war.

Die Funktion  $-\wp$  liefert also die vom Riemannschen Abbildungssatz garantierte biholomorphe Abbildung eines Rechtecks auf die obere Halbebene.



## 14.6 Die Module elliptischer Funktionen

- Unsere bisher gewonnenen Kenntnisse über elliptische Funktionen erlauben es, einen flüchtigen Blick auf ein großes Gebiet der höheren klassischen Funktionentheorie zu werfen, auf die Theorie der Modulfunktionen.
- Ich teile aber nur die Fakten ohne jeden Beweis mit. Die finden Sie in allen Details in der sehr schönen Darstellung in *K. Lamotke: Riemannsche Flächen. Springer 2005*, die ich für diesen kurzen Abriss benutzt habe.

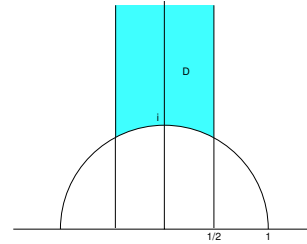
Die elliptischen Funktionen sind gegeben durch ihr Periodengitter  $\Lambda$ . Zwei Gitter, die durch Multiplikation mit einer komplexen Zahl  $\neq 0$  auseinander hervorgehen, führen zu isomorphen Funktionenkörpern, und wir nennen sie *äquivalent*. Für jede Äquivalenzklasse von Gittern findet man mindestens einen Repräsentanten von der Form  $\Lambda_\tau := \{k + l\tau \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$  mit  $\tau$  in der oberen Halbebene  $\mathbb{H}$ . Man nennt  $\tau$  den *Modul* des Gitters und zwei Module äquivalent, wenn sie äquivalente Gitter liefern.

Wir erinnern daran, dass die Möbiusautomorphismen der oberen Halbebene gegeben waren durch die reellen  $(2 \times 2)$ -Matrizen mit Determinante 1, also durch die Gruppe  $SL(2, \mathbb{R})$ , wobei

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(\tau) := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

In  $SL(2, \mathbb{R})$  gibt es die Untergruppe  $\Gamma := SL(2, \mathbb{Z}) < SL(2, \mathbb{R})$ , die sogenannte *Modulgruppe*, deren Bahnen  $\Gamma\tau = \{A(\tau) \mid A \in \Gamma\}$  gerade die Äquivalenzklassen der Module bilden:  $\tau$  ist äquivalent zu  $\tau'$  genau dann, wenn es ein  $A \in \Gamma$  gibt, für das  $\tau' = A(\tau)$ .

Der Bereich  $D := \{\tau \mid |\tau| \geq 1, |\operatorname{Im} \tau| \leq \frac{1}{2}\}$  ist ein *Fundamentbereich* für die Äquivalenzklassen: Er enthält für jede Klasse genau einen Repräsentanten, nur Randpunkte, die zur imaginären Achse spiegelbildlich liegen, repräsentieren dieselbe Klasse. Die nebenstehende "Modulfigur" ist sicher eine der bekanntesten Figuren der neueren Mathematik.



Zum Gitter  $\Lambda_\tau$  gehören die Gitterinvarianten  $g_2 := g_2(\tau)$  und  $g_3 := g_3(\tau)$ , vgl. Satz 204, und man kann zeigen, dass sie  $\tau$  eindeutig bestimmen. Betrachtet man  $\tau$  nicht als einen *Parameter*, der sagt, mit den elliptischen Funktionen zu welchen Perioden wir uns gerade beschäftigen wollen, sondern betrachtet man die Menge aller Perioden, so kann man  $\tau$  als eine *Variable* betrachten.  $g_2(\tau)$  und  $g_3(\tau)$  sowie die daraus gebildete Funktion  $J : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$

$$J(\tau) := \frac{g_2^3(\tau)}{g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau)}$$

sind dann holomorphe Funktionen auf  $\mathbb{H}$ .

Es gilt

- $J(\mathbb{H}) = \mathbb{C}$ ,
- $J(A(\tau)) = J(\tau)$  für alle  $A \in \Gamma$  und
- $\Lambda_\tau$  äquivalent zu  $\Lambda_{\tau'}$  genau dann, wenn  $J(\tau) = J(\tau')$ .

Man nennt  $J$  eine *Modulfunktion*.

## 15 Der große Satz von Picard

Nach dem Satz von Casorati-Weierstraß nimmt eine holomorphe Funktion auf jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität eine in  $\mathbb{C}$  dichte Wertemenge an.

**Beispiel 209.** Die Exponentialfunktion  $e^z$  nimmt auf jedem Streifen

$$\{x + iy \mid R \leq y < R + 2\pi\}$$

alle komplexen Wert  $\neq 0$  an. Die Funktion  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$  nimmt deshalb in jeder Umgebung

$$0 < |z| < \epsilon$$

ihrer isolierten Singularität 0 jeden komplexen Wert  $\neq 0$  an. Die Funktion  $f(z) := (1 - e^{\frac{1}{z}})^2$  läßt keinen Wert aus, sie ist surjektiv auf  $\mathbb{C}$ .

□

In diesem Fall ist die Wertemenge also nicht nur dicht in  $\mathbb{C}$ , sie verfehlt nur einen einzigen Punkt. Dass dieses nicht eine spezielle Eigenschaft der betrachteten Funktion, sondern typisch für wesentliche Singularitäten ist, ist der Inhalt des sogenannten ‘‘Großen Satzes von Picard’’:

**Satz 210 (Picard).** *Eine holomorphe Funktion nimmt auf jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität jeden Wert von  $\mathbb{C}$  mit höchstens einer Ausnahme an.*

Unter Translation und Streckung ist das äquivalent zur Aussage, dass eine holomorphe Funktion auf der punktierten Kreisscheibe  $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ , die mehr als einen Wert ausläßt, in 0 einen Pol oder eine hebbare Singularität besitzt. Nach Translation und Drehstreckung im Wertbereich ist das wiederum äquivalent zur folgenden Formulierung:

**Satz 211 (Picard, 2. Version).** *Ist  $f : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  holomorph, so ist 0 keine wesentliche Singularität,  $f$  also meromorph auf  $\mathbb{D}$ .*

In diesem Kapitel will ich einen Beweis dieses Satzes geben. Die Motivation dafür liegt weniger in der Bedeutung des Satzes selbst, der in einen sehr speziellen Themenkreis der Funktionentheorie, die sogenannte Werteverteilungstheorie gehört. Vielmehr sind die im Beweis verwendeten Methoden mit ihrer Mischung aus Funktionentheorie und Differentialgeometrie außerordentlich reizvoll.

**Beweisidee.** Der Beweis erfolgt indirekt. Wäre 0 eine wesentliche Singularität, so gäbe es nach dem Satz von Casorati-Weierstraß Nullfolgen  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{D}^*$ , für die  $(f(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(f(w_k))_{k \in \mathbb{N}}$  gegen verschiedene Punkte  $a$  und  $b$  von  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  konvergieren. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass  $|z_k| > |w_k| > |z_{k+1}|$  für alle  $k$ . Wir setzen (vgl. die Abbildung zu Satz 233)

$$A_k := \{z \mid |z_k| \geq |z| \geq |z_{k+1}|\}, \quad S_r := \{z \mid |z| = r\}.$$

Nach dem Satz über die Anzahl der Null- und Polstellen (Satz 161) gilt dann für alle  $\tilde{b}$ , die nicht auf dem  $f$ -Bild des Randes  $\partial A_k$  liegen:

$$\text{Uml}(f(\partial A_k), \tilde{b}) = \# \left( f^{-1}(\{\tilde{b}\}) \cap \overset{\circ}{A}_k \right). \quad (80)$$

Wir benutzen nun neue Metriken auf  $\mathbb{D}^*$  und  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ , die zwar die Standardtopologie und daher den in  $\mathbb{C}$  üblichen Konvergenzbegriff erzeugen, für die aber (in Verallgemeinerung des Schwarz-Pick-Lemmas) holomorphe Abbildungen kontrahierend sind.

Wir zeigen, dass bezüglich der neuen Metrik von  $\mathbb{D}^*$

$$\lim_{r \searrow 0} \text{diam } S_r = 0.$$

Weil  $f$  kontrahierend und  $\lim f(z_k) = a$ , gehen dann für  $k \rightarrow \infty$  im offensichtlichen Sinne auch die  $f(S_{|z_k|})$ , also  $f(\partial A_k)$  gegen  $a$ . Weil andererseits  $\lim f(w_k) = b \neq a$ , ist für große  $k$

$$\text{Uml}(f(\partial A_k), f(w_k)) = 0 \neq \# \left( f^{-1}(\{f(w_k)\}) \cap \overset{\circ}{A}_k \right)$$

im Widerspruch zu (80).

Das Problem ist die Konstruktion der benutzten Metriken, deren Definition und Eigenschaften uns im folgenden beschäftigen werden:

- die in der Differentialgeometrie betrachtete *innere Metrik einer Eichfunktion (oder Riemannschen Metrik)*
- und die mit Methoden der Funktionentheorie definierte *Kobayashi-Metrik*.

Die wesentliche Beziehung zwischen diesen beiden beruht auf dem ebenfalls in der Differentialgeometrie untersuchten Begriff der inneren *Krümmung*.

Meine Quelle ist die folgende Monographie

*S. Kobayashi, Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings, Marcel Dekker, New York 1970.*

## 15.1 Eichfunktionen und innere Metrik

- Eichfunktionen gewichten die Längenmessung von Kurven in  $G$ .
- Mittels der Kurvenlängen macht jede Eichfunktion  $G$  zu einem metrischen Raum, versehen mit der sogenannten inneren Metrik.
- Ein Beispiel kennen wir schon: Die hyperbolische Ebene aus Abschnitt 5

**Vorbemerkung.** Jede stetig differenzierbare Kurve kann man stetig differenzierbar so umparametrisieren, dass sie auf Umgebungen der Endpunkte des Parameterintervalles konstant ist. Die Hintereinanderschaltung zweier solcher Kurven ist dann wieder stetig differenzierbar. Also besitzt jede stückweise stetig differenzierbare Kurve, insbesondere jeder Polygonzug, eine stetig differenzierbare Umparametrisierung.

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet. Dann ist  $G$  insbesondere wegzusammenhängend, und nach der Vorbemerkung lassen sich je zwei Punkte von  $G$  durch eine stetig differenzierbare Kurve in  $G$  verbinden.

**Definition 212 (Eichfunktion).** Eine *Eichfunktion* auf  $G$  ist eine positiv-wertige zweimal stetig differenzierbare Funktion  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ . Für eine solche definieren wir

- (i) die  $g$ -Länge einer Kurve  $c : [a, b] \rightarrow G$  durch

$$L_g(c) := \int_a^b \sqrt{g(c(t))} |\dot{c}(t)| dt$$

- (ii) die zugehörige *innere Metrik*  $d_g : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$d_g(z_1, z_2) := \inf \{ L_g(c) \mid c \text{ ist eine stetig differenzierbare Kurve in } G \text{ von } z_1 \text{ nach } z_2 \}.$$

Wie im Euklidischen zeigt man, dass die Länge einer Kurve unabhängig von ihrer Parametrisierung ist. Die Bezeichnung *Eichfunktion* ist nicht üblich, aber kürzer als *konforme Metrik* oder Ähnliches.

**Beispiel 213.** Die Funktion  $g = 1$  ist eine Eichfunktion auf jedem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  und  $L_1$  ist die übliche Kurvenlänge. Für jedes konvexe Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  ist die Strecke die kürzeste Kurve zwischen zwei Punkten  $z_1, z_2 \in G$ , also  $d_1(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$ . Beweisen Sie das mit Hilfe von  $|\dot{c}| \geq \frac{\langle \dot{c}, z_2 - z_1 \rangle}{|z_2 - z_1|}$ .

□

**Satz 214.** Sei  $g$  eine Eichfunktion auf dem Gebiet  $G$ , und seien  $a \in G$  und  $r > 0$ , so dass  $K := \{z \mid |z - a| \leq r\} \subset G$ . Dann gibt es Konstanten  $m, M > 0$ , so dass gilt:

- (i) Für jede stetig differenzierbare Kurve  $c$  in  $K$  ist

$$mL_1(c) \leq L_g(c) \leq ML_1(c).$$

- (ii) Für alle  $z \in K$  ist

$$m|z - a| \leq d_g(a, z) \leq M|z - a|.$$

*Beweis.* Wir setzen  $m := \min \sqrt{g|_K}$  und  $M := \max \sqrt{g|_K}$ .

Zu (i). Monotonie des Integrals.

Zu (ii). Für jede Kurve von  $a$  nach  $z$  in  $\mathbb{C}$  gilt nach dem letzten Beispiel

$$|z - a| \leq L_1(c). \quad (81)$$

Damit folgt wegen (i)

$$m|z - a| \leq mL_1(c) \leq L_g(c) \quad \text{für jede Kurve von } a \text{ nach } z \text{ in } K. \quad (82)$$

Für jede Kurve in  $K$  von  $a$  zum Rand von  $K$  gilt nach (81), (82)

$$mr \leq mL_1(c) \leq L_g(c),$$

und deshalb ist

$$m|z - a| \leq mr \leq L_g(c) \quad \text{für jede Kurve von } a \text{ nach } z \text{ die } K \text{ verlässt.} \quad (83)$$

Aus (82), (83) folgt

$$m|z - a| \leq d_g(a, z).$$

Schließlich ist für die Strecke  $c(t) := a + t(z - a), 0 \leq t \leq 1$

$$d_g(a, z) \leq L_g(c) \leq ML_1(c) = M|z - a|.$$

□

**Satz 215 (Innere Metrik).** Die innere Metrik zu einer Eichfunktion  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Metrik, d.h. es gilt für alle  $z_1, z_2, z_3 \in G$

(i)  $d_g(z_1, z_2) \geq 0$  und Gleichheit gilt genau für  $z_1 = z_2$ ,

(ii)  $d_g(z_1, z_2) = d_g(z_2, z_1)$ ,

(iii)  $d_g(z_1, z_3) \leq d_g(z_1, z_2) + d_g(z_2, z_3)$ .

Die von  $d_g$  auf  $G$  induzierte Topologie ist die übliche.

*Beweis.* Zu (i). Offenbar ist  $d_g$  nicht-negativ. Die Definitheit folgt aus Teil (ii) des vorhergehenden Satzes.

Zu (ii). Klar.

Zu (iii). Sind  $c_1, c_2$  stetig differenzierbare Kurven von  $z_1$  nach  $z_2$  bzw. von  $z_2$  nach  $z_3$ , so gibt es nach der Vorbemerkung eine stetig differenzierbare Kurve  $c$  von  $z_1$  über  $z_2$  nach  $z_3$  mit

$$d_g(z_1, z_3) \leq L_g(c) = L_g(c_1) + L_g(c_2).$$

Durch Bildung der Infima für  $c_1$  und  $c_2$  folgt (iii)

Die Gleichheit der Topologien folgt aus (ii) des vorstehenden Satzes. □

Weil wir am Verhalten der Kurvenlänge unter holomorphen Abbildungen interessiert sind, halten wir fest

**Lemma 216.** *Sind  $f : H \rightarrow G$  holomorph,  $g$  eine Eichfunktion auf  $G$  und  $c : [a, b] \rightarrow H$  eine stetig differenzierbare Kurve, so gilt*

$$L_g(f \circ c) = \int_a^b \sqrt{(g(f(c(t))))|f'(c(t))|^2} |\dot{c}(t)| dt. \quad (84)$$

*Beweis.* Kettenregel □

**Beispiel 217 (Hyperbolische Ebene).** Im Abschnitt 5 haben wir zur Interpretation des Lemmas 87 von Schwarz und Pick im Einheitskreis  $\mathbb{D}$  die Längenmessung mit der Eichfunktion

$$\rho(z) = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2}$$

betrachtet. Die Automorphismen des Einheitskreises waren die Möbiustransformationen  $f(z) = e^{i\phi} \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}$ , und für diese galt nach Lemma 87

$$|f'(z)| = \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2},$$

also

$$\rho(f(z))|f'(z)|^2 = \frac{4}{(1 - |f(z)|^2)^2} \frac{(1 - |f(z)|^2)^2}{(1 - |z|^2)^2} = \rho(z).$$

Nach (84) erhalten diese Automorphismen also die Kurvenlänge  $L_\rho$ . Jede Kurve in  $\mathbb{D}$  kann man durch einen solchen Automorphismus in eine Kurve mit Anfangspunkt 0 überführen. Zur Bestimmung der inneren Metrik genügt daher die Berechnung von  $d_\rho(0, z)$ . Ist  $c(t) = r(t)e^{i\phi(t)}$  eine Kurve von  $0 = c(0)$  nach  $z = r(1)e^{i\phi(1)}$ , so finden wir

$$\begin{aligned} L_\rho(c) &= \int_0^1 \frac{2}{1 - r^2(t)} |(\dot{r}(t) + ir(t)\dot{\phi}(t))e^{i\phi(t)}| dt \\ &= \int_0^1 \frac{2}{1 - r^2(t)} \sqrt{\dot{r}^2(t) + r^2(t)\dot{\phi}^2(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{2}{1 - r^2(t)} \dot{r}(t) dt = \int_0^{r(1)} \frac{2}{1 - u^2} du = 2 \tanh^{-1} r(1) \end{aligned}$$

Für  $c(t) = tz = te^{i\phi(1)}$  erhält man Gleichheit, und daher ist die zugehörige innere Metrik, die *hyperbolische* oder *Poincaré-Bergmann-Metrik* gegeben

$$d_\rho(0, z) = 2 \tanh^{-1}(|z|).$$

Sind  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ , so gilt ist  $f(z) := \frac{z + z_1}{1 + \bar{z}_1 z}$  ein Möbiusautomorphismus von  $\mathbb{D}$  mit

$$f(0) = z_1, \quad f\left(\frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right) = z_2.$$

Daher gilt

$$d_\rho(z_1, z_2) = 2 \tanh^{-1} \frac{|z_2 - z_1|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|}.$$

□

## 15.2 Krümmung

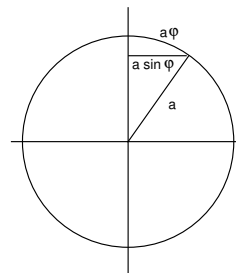
- Wir ordnen jeder Eichfunktion  $g$  eine reellwertige Krümmungsfunktion  $K_g$  auf  $G$  zu und motivieren die Definition ein bißchen.
- Für die Poincarémetrik auf  $\mathbb{D}$  ist  $K_g = -1$ .
- Die hyperbolischen Eichfunktionen, d.h. solche mit  $K_g \leq \text{const.} < 0$ , spielen im weiteren eine wichtige Rolle.
- Wir geben die Konstruktion einer hyperbolischen Eichfunktion auf  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  wieder, die für den Picard von entscheidender Bedeutung sein wird.
- Und wir zeigen in Verallgemeinerung des Lemmas von Schwarz und Pick, dass holomorphe Abbildungen von  $\mathbb{D}$  in hyperbolische Gebiete die innere Metrik kontrahieren.

**Definition 218 (Krümmung).** Die Krümmung einer Eichfunktion  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert als

$$K_g := -\frac{1}{2g} \Delta \log g \quad (85)$$

Warum nennt man das “Krümmung”?

Die Sphäre im  $\mathbb{R}^3$  ist nach unserer Anschauung um so stärker gekrümmt, je kleiner ihr Radius  $a$  ist, und ein mögliches Krümmungsmaß dafür ist  $K := a^{-2}$ , die sogenannte *Gauß-Krümmung* der Sphäre. Wenn man diese aber bestimmen will, ohne auf den äußeren Raum und damit den Radius  $a$  Bezug zu nehmen, so kann man den Umfang von Kreisen auf der Kugel­fläche in Relation zu ihrem *auf der Kugel­fläche gemessenen* Radius betrachten. Letzterer läßt sich schreiben als  $r = a\phi$ , und der *Euklidische* Radius des entsprechenden Kreises ist dann  $a \sin(\phi)$ , seine Länge also



$$L(r) = 2\pi a \sin \phi = 2\pi a \sin\left(\frac{r}{a}\right) = 2\pi a \left( \frac{r}{a} - \frac{1}{6} \frac{r^3}{a^3} \pm \dots \right) = 2\pi \left( r - \frac{a^{-2}}{6} r^3 \pm \dots \right)$$

In der Differentialgeometrie zeigt man nun: Ist  $g$  eine Eichfunktion und berechnet man den Radius wie die Länge kleiner “Kreise” bezüglich  $g$ , so gilt für kleines  $r$

$$L(r) = 2\pi \left( r - \frac{K}{6} r^3 + o(r^4) \right),$$

wobei  $K$  definiert ist wie in (85). (Einen Beweis findet man zum Beispiel in *M. Spivak: Differential Geometry, vol II, 3B-45.*)

Für die Berechnung der Krümmung von Eichfunktionen, in Polarkoordinaten  $r = |z|$  und  $\phi$ , ist es gut zu wissen, dass

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (86)$$

Damit betrachten wir noch einmal die Sphäre:

**Beispiel 219.** Die umgekehrte stereographische Projektion

$$\sigma(x, y) := \frac{a}{a^2 + r^2} (2ax, 2ay, r^2 - a^2) \text{ mit } r^2 = x^2 + y^2$$

bildet  $\mathbb{C}$  diffeomorph auf das Komplement vom Nordpol in der Sphäre vom Radius  $a$  im  $\mathbb{R}^3$  ab. Rechnen Sie nach, dass

$$\left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right\rangle = \frac{4a^4}{(a^2 + r^2)^2}, \quad \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right\rangle = 0.$$

Definiert man daher als Länge einer Kurve in  $\mathbb{C}$  die Länge der entsprechenden Kurve auf der Sphäre, so ergibt sich  $L(c) = L_g(c)$  mit der Eichfunktion

$$g(z) = \frac{4a^4}{(a^2 + |z|^2)^2}.$$

Dafür rechnet man mit Formel (86) und  $|z| = r$  nun nach:

$$\begin{aligned} \log g &= \log(4a^4) - 2 \log(a^2 + r^2), \\ \frac{\partial \log g}{\partial r} &= \frac{-4r}{a^2 + r^2}, \\ \frac{\partial^2 \log g}{\partial r^2} &= \frac{4r^2 - 4a^2}{(a^2 + r^2)^2}, \\ K &= -\frac{(a^2 + r^2)^2}{8a^4} \left( \frac{4r^2 - 4a^2}{(a^2 + r^2)^2} + \frac{-4}{a^2 + r^2} \right) = \frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

□

**Beispiel 220 (Poincarémetrik).** Für die Poincaré-Bergmann-Metrik

$$\rho(z) := \frac{4}{(1 - |z|^2)^2}$$

auf  $\mathbb{D}$  liefert die obige Rechnung mit  $a = i$ , dass  $K_\rho = -1$ . Die Krümmung ist negativ.

□

Wir wollen nun eine Verallgemeinerung des Lemmas von Schwarz-Pick beweisen und zeigen dazu zunächst

**Lemma 221.** Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $h : f(G) \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\Delta(h \circ f) = ((\Delta h) \circ f) |f'|^2.$$

*Beweis.* Wir zerlegen  $f = u + iv$  und differenzieren  $h \circ f = h(u, v)$  nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} (h \circ f)_x &= (h_u \circ f)u_x + (h_v \circ f)v_x \\ (h \circ f)_{xx} &= (h_{uu} \circ f)u_x^2 + 2(h_{uv} \circ f)u_x v_x + (h_{vv} \circ f)v_x^2 + (h_u \circ f)u_{xx} + (h_v \circ f)v_{xx} \end{aligned}$$

und entsprechend für  $(h \circ f)_{yy}$ . Aus der Holomorphie von  $f$  folgt

$$\begin{aligned} u_x v_x + u_y v_y &= v_y v_x - v_x v_y = 0, & u_{xx} + u_{yy} &= 0 = v_{xx} + v_{yy}, \\ u_x^2 + u_y^2 &= v_x^2 + v_y^2 = |f'|^2. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} (h \circ f)_{xx} + (h \circ f)_{yy} &= (h_{xx} \circ f)(u_x^2 + u_y^2) + (h_{yy} \circ f)(v_x^2 + v_y^2) \\ &\quad + (h_x \circ f)(u_{xx} + u_{yy}) + (h_y \circ f)(v_{xx} + v_{yy}) \\ &= ((\Delta h) \circ f) |f'|^2. \end{aligned}$$

□

**Satz 222 (Ahlfors).** *Ist  $g$  eine Eichfunktion auf  $G$  mit  $K_g \leq -1$ , so ist jede holomorphe Abbildung  $f : \mathbb{D} \rightarrow G$  kontrahierend bezüglich  $\rho$  und  $g$ :*

$$d_g(f(z_1), f(z_2)) \leq d_\rho(z_1, z_2) \text{ f\"ur alle } z_1, z_2.$$

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass die Länge von Kurven unter  $f$  nicht wächst. Wir betrachten also den Streckungsfaktor aus (84)

$$u := \frac{(g \circ f)|f'|^2}{\rho} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

und müssen zeigen, dass  $u \leq 1$ .

1. Fall:  $u$  nimmt auf  $\mathbb{D}$  sein Maximum an. Sei  $u$  in  $a \in \mathbb{D}$  maximal und o.E.  $u(a) > 0$ , sonst ist  $f$  konstant. Dann ist  $u \neq 0$  auf einer Umgebung von  $a$  in  $\mathbb{D}$ , und auf dieser gilt

$$\Delta \log u = \Delta \log(g \circ f) + 2\Delta \log |f'| - \Delta \log \rho = ((\Delta \log g) \circ f)|f'|^2 - 2\rho.$$

Dabei haben wir benutzt, dass  $|f'|$  als Komposition einer harmonischen und einer holomorphen Funktion harmonisch ist, also  $\Delta \log |f'| = 0$ , und dass  $K_\rho = -2g\Delta \log \rho = -1$ . Wir erhalten

$$\Delta \log u = -2(g \circ f)(K_g \circ f)|f'|^2 - 2\rho \geq 2(g \circ f)|f'|^2 - 2\rho = 2\rho(u - 1)$$

Da mit  $u$  auch  $\log u$  in  $a$  sein Maximum annimmt, sind  $\frac{\partial^2 \log u}{\partial x^2}(a)$  und  $\frac{\partial^2 \log u}{\partial y^2}(a)$  nicht-positiv, also

$$0 \geq (\Delta \log u)(a) \geq 2\rho(a)(u(a) - 1),$$

und daraus folgt die Behauptung  $u \leq 1$ .

2. Fall:  $u$  beliebig. Wir betrachten für  $0 < \tau < 1$  die holomorphe Abbildung  $f_\tau : \mathbb{D} \rightarrow G$  mit

$$f_\tau(z) := f(\tau z).$$

Für diese ist  $(g \circ f_\tau)|f'_\tau|^2$  offenbar beschränkt, und weil  $\lim_{|z| \rightarrow 1} \rho(z) = \infty$ , haben wir

$$u_\tau(z) := \frac{g(f_\tau(z))|f'_\tau(z)|^2}{\rho(z)} \rightarrow 0 \text{ für } |z| \rightarrow 1.$$

Deshalb nimmt  $u_\tau$  auf  $\mathbb{D}$  sein Maximum an, und nach dem 1. Fall ist  $u_\tau \leq 1$ . Weil aber  $\lim_{\tau \nearrow 1} u_\tau = u$  folgt auch  $u \leq 1$ . □

Im Satz von Picard geht es um holomorphe Abbildungen nach  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ . Deshalb ist es wichtig, dort eine Eichfunktion mit  $K \leq -1$  zu haben. Eine Eichfunktion mit Krümmung  $= -1$  erhält man mittels der Überlagerung  $\lambda : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  durch die Modulfunktion  $\lambda$  (vgl. Anhang 16.3), aber deren Eigenschaften sind schwierig nachzuweisen. Zum Glück haben Grauert und Reckziegel 1965 eine elementare Konstruktion für eine Eichfunktion negativer Krümmung gefunden, die wir im nächsten Beispiel wiedergeben. Zuvor ein

**Lemma 223.** *Es gelten folgende Rechenregeln*

$$\alpha K_{\alpha g} = K_g, \quad \alpha \in ]0, +\infty[, \quad (87)$$

$$g_1 g_2 K_{g_1 g_2} = g_1 K_{g_1} + g_2 K_{g_2}, \quad (88)$$

$$g^\beta K_{g^\beta} = \beta g K_g, \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (89)$$

Für  $\alpha \neq 0, \beta \in \mathbb{R}$  und  $\tilde{g}(z) := g(\alpha z + \beta)$  ist

$$K_{\tilde{g}}(z) = \alpha^2 K_g(\alpha z + \beta). \quad (90)$$

Der Beweis folgt aus der Definition mit Kopfrechnen.

**Beispiel 224 (Grauert/Reckziegel).** Wir beginnen mit der Berechnung der Krümmung zu

$$h(z) = |z|^{2\alpha-2}(1 + |z|^{2\alpha}) \quad (\alpha > 0)$$

auf  $\mathbb{C}^*$ .

Wir berechnen die  $r$ -Ableitungen

$$(\log h)_r = ((2\alpha - 2) \log r + \log(1 + r^{2\alpha}))_r = (2\alpha - 2) \frac{1}{r} + \frac{2\alpha r^{2\alpha-1}}{1 + r^{2\alpha}}$$

und

$$(\log h)_{rr} = -(2\alpha - 2) \frac{1}{r^2} + 2\alpha \frac{(2\alpha - 1)r^{2\alpha-2}(1 + r^{2\alpha}) - r^{2\alpha-1}2\alpha r^{2\alpha-1}}{(1 + r^{2\alpha})^2}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta \log h &= 2\alpha \frac{(2\alpha - 1)r^{2\alpha-2}(1 + r^{2\alpha}) - r^{2\alpha-1}2\alpha r^{2\alpha-1}}{(1 + r^{2\alpha})^2} + \frac{2\alpha r^{2\alpha-2}}{1 + r^{2\alpha}} \\ &= 2\alpha \left( \frac{(2\alpha - 1)r^{2\alpha-2}(1 + r^{2\alpha}) - 2\alpha r^{4\alpha-2} + r^{2\alpha-2}(1 + r^{2\alpha})}{(1 + r^{2\alpha})^2} \right) \\ &= 2\alpha \left( \frac{2\alpha r^{2\alpha-2}(1 + r^{2\alpha}) - 2\alpha r^{4\alpha-2}}{(1 + r^{2\alpha})^2} \right) = \frac{4\alpha^2 r^{2\alpha-2}}{(1 + r^{2\alpha})^2} \end{aligned}$$

und schließlich

$$K_h = -\frac{1}{2r^{2\alpha-2}(1 + r^{2\alpha})} \frac{4\alpha^2 r^{2\alpha-2}}{(1 + r^{2\alpha})^2} = -\frac{2\alpha^2}{(1 + r^{2\alpha})^3}. \quad (91)$$

Mit dem Lemma berechne wir daraus die Krümmung von

$$g(z) := h(2z)h(2z - 2).$$

Wir haben nach (88)

$$K_g = \frac{1}{h(2z - 2)} K_{h(2z)} + \frac{1}{h(2z)} K_{h(2z-2)},$$

und nach (90) und (91) ist

$$\begin{aligned} K_g(z) &= -8\alpha^2 \left( \frac{1}{|2z - 2|^{2\alpha-2}(1 + |2z - 2|^{2\alpha})(1 + |2z|^{2\alpha})^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{|2z|^{2\alpha-2}(1 + |2z|^{2\alpha})(1 + |2z - 2|^{2\alpha})^3} \right) =: -8\alpha^2 \left( \frac{1}{N_1(z)} + \frac{1}{N_2(z)} \right) \end{aligned}$$

Für  $\alpha < 1$  sind  $N_1$  und  $N_2$  stetig und positiv auf  $\mathbb{C}$ . Für  $|z| \gg 1$  sind beide Nenner von der Ordnung  $|z|^{2\alpha-2+2\alpha+6\alpha} = |z|^{10\alpha-2}$ . Wählen wir  $0 < \alpha < \frac{1}{5}$ , so folgt also

$$\lim_{z \rightarrow \infty} K_g(z) = -\infty$$

und daher  $\sup \{K_g(z) \mid 0 \neq z \neq 1\} < 0$ .

Durch Skalierung von  $g$  können wir dann natürlich auch eine Eichfunktion mit  $K \leq -1$  finden.

□

### 15.3 Die invariante Kobayashi-Pseudometrik

- Wir definieren auf jedem Gebiet eine nach Kobayashi benannte Pseudometrik, die auf  $\mathbb{D}$  die Poincarémetrik ist, und bezüglich der holomorphen Abbildungen kontrahierend sind.
- Für Eichfunktionen mit  $K \leq -1$  dominiert die Kobayashimetrik die innere Metrik.
- Wir beweisen damit den “kleinen Picard”: *Nicht-konstante ganze Funktionen lassen höchstens einen Wert von  $\mathbb{C}$  aus.*
- Und wir zeigen mit Blick auf die früher skizzierte “Beweisidee”, dass die Kreise  $|z| = \epsilon$  für kleines  $\epsilon$  auch bezüglich der Kobayashimetrik von  $\mathbb{D}^*$  kleinen Durchmesser haben.

**Definition 225 (Kobayashi).** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet. Für  $z_1, z_2 \in G$  definieren wir

$$k_G^0(z_1, z_2) := \inf \{ d_\rho(a, b) \mid a, b \in \mathbb{D} \text{ und } f : \mathbb{D} \rightarrow G \text{ holomorph mit } f(a) = z_1, f(b) = z_2 \}$$

und damit

$$k_G(z_1, z_2) := \inf \sum_{j=1}^k k_G^0(w_{j-1}, w_j),$$

wobei das Infimum genommen wird über alle endlichen Folgen  $w_0, \dots, w_k$  in  $G$  mit  $w_0 = z_1$  und  $w_k = z_2$ . Die Funktion heißt die *Kobayashi-Pseudometrik*.

Es ist klar, dass  $k_G$  symmetrisch und nicht-negativ ist und der Dreiecksungleichung genügt, also eine Pseudometrik ist.

**Lemma 226.** Seien  $G$  ein Gebiet,  $a \in G$  und  $r > 0$ , so dass  $K := \{z \mid |z - a| \leq 2r\} \subset G$ . Dann gilt

$$k_G(a, z) \leq \frac{4}{3r} |z - a| \quad \text{für alle } z \text{ mit } |z - a| < r.$$

*Beweis.* Betrachte  $f : \mathbb{D} \rightarrow G$  mit  $f(z) := a + 2rz$ . Dann ist  $f(0) = a$ ,  $f(\frac{z-a}{2r}) = z$  und daher für  $|z - a| < r$

$$k_G(a, z) \leq k_G^0(a, z) \leq d_\rho \left( 0, \frac{z-a}{2r} \right) = 2 \tanh^{-1} \frac{|z-a|}{2r}$$

Für  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  ist aber

$$\tanh^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \leq x(1 + x^2 + x^4 + \dots) = x \frac{1}{1-x^2} \leq \frac{4}{3}x.$$

□

Nach diesem Lemma impliziert also Konvergenz in der Standardmetrik die Konvergenz bezüglich  $k_G$ .

Andererseits gilt die Ungleichung des Lemmas im Fall  $G = \mathbb{C}$  für alle  $r > 2|z - a|$ , und damit ist

$$k_{\mathbb{C}} = 0.$$

Die Kobayashi-Pseudometrik ist also im allgemeinen keine Metrik.

**Satz 227.** Ist  $f : G \rightarrow H$  holomorph, so ist für alle  $z_1, z_2 \in G$

$$k_H(f(z_1), f(z_2)) \leq k_G(z_1, z_2).$$

*Holomorphe Abbildungen kontrahieren die Kobayashi-Pseudometrik. Biholomorphe Abbildungen zwischen Gebieten erhalten also die Kobayashi-Pseudometrik.*

*Beweis.* Trivial. □

**Satz 228.** Besitzt  $G$  eine Eichfunktion mit Krümmung  $K(g) \leq -1$ , so folgt

$$k_G \geq d_g.$$

*Insbesondere ist  $k_G$  dann eine Metrik.*

*Beweis.* Sei  $f : \mathbb{D} \rightarrow G$  holomorph mit  $f(a) = z_1, f(b) = z_2$ . Dann gilt nach Satz 222

$$d_g(z_1, z_2) = d_g(f(a), f(b)) \leq d_\rho(a, b).$$

Bildet man das Infimum über alle solche  $f$ , so folgt

$$d_g(z_1, z_2) \leq k_G^0(z_1, z_2).$$

Zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es eine Kette  $z_1 = w_0, \dots, w_k = z_2$  mit

$$k_G(z_1, z_2) + \epsilon \geq \sum k_G^0(w_{j-1}, w_j) \geq \sum d_g(w_{j-1}, w_j) \geq d_g(z_1, z_2).$$

Weil  $\epsilon > 0$  beliebig ist, folgt die Behauptung. □

**Beispiel 229.** Für die Einheitskreisscheibe ist die Kobayashi-Pseudometrik gleich der Poincaré-Metrik:

$$k_{\mathbb{D}} = d_\rho.$$

Nach dem letzten Satz ist nämlich  $k_{\mathbb{D}} \geq d_\rho$ . Andererseits liefert  $id : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  eine holomorphe Abbildung, die das Infimum realisiert. □

**Beispiel 230.** Weil jedes beschränkte Gebiet  $k_G$  biholomorph äquivalent zu einem Teilgebiet der Einheitskreisscheibe ist, ist  $k_G$  auf beschränkten Gebieten eine Metrik. □

**Satz 231 (Kleiner Picard).** Jede ganze holomorphe Abbildung

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$$

*ist konstant.*

*Beweis.* Für  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gilt

$$k_{\mathbb{C} \setminus \{0,1\}}(f(z_1), f(z_2)) \leq k_{\mathbb{C}}(z_1, z_2) = 0.$$

Weil aber  $k_{\mathbb{C} \setminus \{0,1\}}$  nach Beispiel 224 und Satz 228 eine echte Metrik ist, ist  $f$  konstant.  $\square$

**Bemerkung.** Jedes einfach-zusammenhängende Gebiet  $G \neq \mathbb{C}$  ist nach dem Riemannschen Abbildungssatz biholomorph äquivalent zu  $\mathbb{D}$ . Jedes nicht-einfach zusammenhängende Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  ist nach dem *Uniformisierungssatz* der Quotient einer holomorphen Überlagerungsabbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow G$  oder  $f : \mathbb{D} \rightarrow G$ . Der ‘‘Kleine Picard’’ impliziert, dass der erste Fall nur eintritt, wenn  $\mathbb{C} \setminus G$  einpunktig ist.

**Lemma 232 (Kobayashi-Metrik auf  $\mathbb{D}^*$ ).** *Es gilt*

$$\text{diam}_{k_{\mathbb{D}^*}}(|z| = \epsilon) \rightarrow 0 \text{ für } \epsilon \rightarrow 0.$$

*Beweis.* Für  $r > 2\pi$  ist

$$f_r(z) := e^{-(1+iz)r} = e^{-(1-y)r} e^{-ixr}$$

eine holomorphe Abbildung von  $\mathbb{D}$  nach  $\mathbb{D}^*$ . Sie bildet das Intervall  $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{r}$  der reellen Achse auf den Kreis vom Radius  $e^{-r}$  ab. Also ist

$$\text{diam}_{k_{\mathbb{D}^*}}(|z| = e^{-r}) \leq 2 \tanh^{-1} \frac{2\pi}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

$\square$

## 15.4 Der große Satz von Picard

- Wir setzen die anfangs skizzierte Beweisidee zu einem Beweis des “Großen Picard” um.

**Satz 233.** *Ist  $f : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  holomorph, so ist 0 keine wesentliche Singularität.*

*Beweis.* Wir schreiben  $G : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  und wählen  $a \in G$  und  $r > 0$ , so dass

$$B := \{w \mid |w - a| \leq 2r\} \subset G.$$

Nach Beispiel 224 gibt es auf  $G$  eine Eichfunktion  $g$  mit  $K_g \leq -1$ , und wir wählen eine solche. Dafür sei

$$0 < m \leq \sqrt{g(w)} \leq M \text{ für alle } w \in B.$$

Nach Satz 214 gilt dann  $d_g(a, w) \geq mr$  für alle  $w \in G$  mit  $|w - a| \geq r$ , d.h.

$$d_g(a, w) < mr \implies |w - a| < r \text{ für alle } w \in G. \quad (92)$$

Annahme: 0 ist eine wesentliche Singularität von  $f$ . Nach dem Satz von Casorati-Weierstrass gibt es dann eine Folge  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{D}^*$ , für die

$$\lim |z_k| = 0 \text{ und } \lim |f(z_k) - a| = 0.$$

Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$|f(z_k) - a| < r.$$

Nach Lemma 226 ist dann aber  $k_G(a, f(z_k)) \leq \frac{4}{3r} |f(z_k) - a|$ , also ohne Einschränkung

$$k_G(a, f(z_k)) < \frac{mr}{2} \text{ für alle } k. \quad (93)$$

Wir schreiben  $S_k := \{z \mid |z| = |z_k|\}$ . Nach Satz 227 und Lemma 232 können wir annehmen, dass

$$\text{diam}_{k_G} f(S_k) \leq \text{diam}_{k_{\mathbb{D}^*}} S_k < \frac{mr}{2} \text{ für alle } k. \quad (94)$$

Also für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f(S_k) &\stackrel{(93), (94)}{\subset} \{z \mid k_G(a, z) < mr\} \stackrel{\text{Satz 228}}{\subset} \{w \mid d_g(a, w) < mr\} \\ &\stackrel{(92)}{\subset} \{w \mid |w - a| < r\}. \end{aligned} \quad (95)$$

Nach dem Satz von Casorati-Weierstraß gibt es eine weitere Folge  $(\tilde{z}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{D}^*$ , für welche  $\lim |f(\tilde{z}_k) - 0| = 0$ . Nach Auswahl von Teilfolgen können wir annehmen, dass

$$|z_k| > |\tilde{z}_k| > |z_{k+1}| \text{ und } |f(\tilde{z}_k) - a| > r \text{ für alle } k.$$

Uns genügt jetzt ein solches  $k$ . Der Punkt  $\tilde{z}_k$  liegt im Innern des kompakten Kreistrings  $A$ , der von  $S_{k+1}$  und  $S_k$  einfach berandet wird. Nach dem Satz 161 über die Anzahl der Nullstellen und Polstellen angewendet auf  $g = f - f(\tilde{z}_k)$  gilt

$$1 \leq \text{Anzahl der } f(\tilde{z}_k)\text{-Stellen von } f \text{ in } \overset{\circ}{A} = \text{Uml}(f(\partial A), f(\tilde{z}_k)) = 0,$$

weil  $f(\partial A) \subset \{w \mid |w - a| < r\}$ , aber  $f(\tilde{z}_k) \notin \{w \mid |w - a| < r\}$ . Widerspruch!

□

## 16 Anhang

### 16.1 Cauchyscher Integralsatz für stetige Ketten

- Der Cauchysche Integralsatz gilt auch für 1-Zyklen, die nur *stetig* sind, Ränder von stetigen 2-Ketten also.
- Wie in der Homotopietheorie kann man also auch in der Homologietheorie generell diesen allgemeineren Fall betrachten.

Mittels analytischer Fortsetzung eines Stammfunktion-Elementes definiert man das Integral *holomorpher* Funktionen über *stetige* Kurven und damit über stetige Ketten. Damit ergibt sich die Frage, ob der Cauchysche Integralsatz nicht auch für stetige nullhomologe 1-Zyklen gilt. Zwar hatten wir den Homologiebegriff nur in der Kategorie der stetig differenzierbaren Abbildungen eingeführt, aber die Definitionen für Ketten und deren Randoperator kann man wörtlich auch für stetige Abbildungen übernehmen.

Dann gilt der

**Satz 234.** *Sei  $C$  eine stetige 2-Kette im Gebiet  $G$  und sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt*

$$\int_{\partial C} f(z) dz = 0.$$

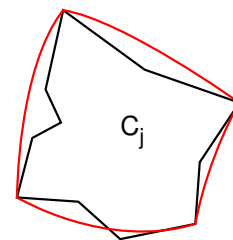
*Beweis. 1. Schritt. Es genügt, den Satz zu beweisen für den Fall, dass*

$$C = \sum_j m_j C_j,$$

*und die Seiten eines jeden singulären Quadrates  $C_j$  stetig differenzierbare Kurven sind.*

Nach dem Beispiel 136 können wir jede Seite eines jeden  $C_j$  durch eine in  $G$  dazu homotope stetig differenzierbare Kurve mit gleichem Anfangs- und gleichem Endpunkt ersetzen. Das macht aus  $\partial C$  eine stetig differenzierbare Kette  $c'$ , für die nach dem Monodromiesatz

$$\int_{c'} f(z) dz = \int_{\partial C} f(z) dz.$$



Die Homotopien zwischen den Seiten von  $C_j$  und den neuen stetig differenzierbaren Kurven liefern eine stetige Homologie zwischen den beiden und ergeben zusammen eine stetige 2-Kette  $\tilde{C}$ , so dass

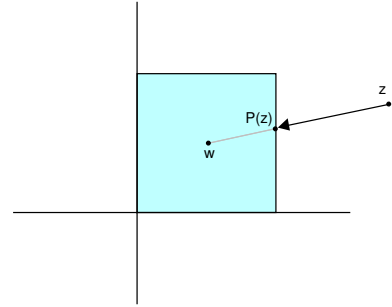
$$\partial(C + \tilde{C}) = c'.$$

2. Schritt. Wir nehmen nun an, dass in  $C = \sum_j m_j C_j$  alle  $C_j$  stetig differenzierbare Seiten haben.

Wir setzen jedes  $C_j : [0, 1]^2 \rightarrow G$  durch Zentralprojektion auf den Rand von  $[0, 1]^2$  zu einer stetigen Funktion auf  $\mathbb{R}^2$  fort:

Mit  $\|z\|_\infty := \max(|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|)$  und  $w := \frac{1+i}{2}$ , ist die Projektion gegeben durch

$$P(z) := w + \frac{z - w}{2\|z - w\|_\infty},$$



und wir setzen

$$C_j(z) := C_j(P(z)) \text{ für } z \notin [0, 1]^2.$$

Mit  $C_j$  ist auch diese Fortsetzung gleichmäßig stetig.

**3. Schritt.** Durch Glättung des fortgesetzten  $C_j$  mittels Faltung erhält man zu vorgegebenem  $\epsilon > 0$  ein stetig differenzierbares singuläres Quadrat  $C_j^*$  mit

$$|C_j^*(s, t) - C_j(s, t)| < \epsilon \text{ für alle } (s, t) \in [0, 1]^2.$$

Genauer:

Wir wählen eine stetig differenzierbare "Buckelfunktion"  $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\rho \geq 0, \quad \rho(s, t) \neq 0 \iff \|(s, t)\| < \delta, \quad \int_{\mathbb{R}^2} \rho(s, t) ds dt = 1,$$

wobei  $\delta > 0$  so gewählt ist, dass

$$\|(s, t) - (s', t')\| < \delta \implies |C_j(s, t) - C_j(s', t')| < \epsilon.$$

Wir setzen

$$C_j^*(s, t) := \int_{\mathbb{R}^2} C_j(s', t') \rho((s, t) - (s', t')) ds' dt'.$$

Dann folgt für  $(s, t) \in [0, 1]^2$

$$\begin{aligned} |C_j^*(s, t) - C_j(s, t)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} (C_j(s', t') - C_j(s, t)) \rho((s, t) - (s', t')) ds' dt' \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |C_j(s', t') - C_j(s, t)| \rho((s, t) - (s', t')) ds' dt' \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \epsilon \rho((s, t) - (s', t')) ds' dt' = \epsilon. \end{aligned}$$

**4. Schritt.** Insbesondere können wir im dritten Schritt das  $\epsilon > 0$  kleiner wählen, als der Abstand von  $C_j([0, 1]^2)$  zum Komplement von  $G$ . Dann liegt für alle  $(s, t) \in [0, 1]^2$  die Verbindungsstrecke von  $C_j(s, t)$  und  $C_j^*(s, t)$  ganz in  $G$ . Die Linearen Homotopien zwischen den stetig differenzierbaren Seiten von  $C_j$  und  $C_j^*$  liegen deshalb in  $G$  und liefern *stetig differenzierbare* 2-Ketten  $V_j$  in  $G$  mit

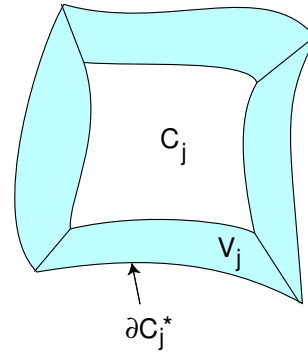
$$\partial(C_j + V_j) = \partial C_j^*.$$

Daher ist

$$C^\# := \sum_j m_j (C_j^* - V_j)$$

eine stetig differenzierbare 2-Kette mit  $\partial C^\# = \partial C$ ,  
und nach dem Cauchyschen Integralsatz für stetig  
differenzierbare Ketten gilt

$$\int_{\partial C} f(z) dz = \int_{\partial C^\#} f(z) dz = 0.$$



□

## 16.2 Fortsetzung, Homologie und Homotopie

- Die im Beispiel 128 mit anschaulichen Argumenten als nullhomolog aber nicht nullhomotop vorgestellte Kurve, genauer eine dazu homotope Kurve, wird genauer untersucht.
- Zum Beweis der Nullhomologie kann man mehr oder weniger explizit eine Fläche oder genauer eine 2-Kette in  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  konstruieren, deren Rand die Kurve ist. Der Beweis der zweiten Behauptung ist leicht mit dem Monodromiesatz aus der Theorie der Überlagerungsräume zu führen, vgl. mein Topologie-Skriptum.
- Hier wollen wir aber die Behauptungen mit den Methoden der komplexen Analysis beweisen: mit dem Artinschen Homologie-Kriterium und dem Monodromiesatz für analytische Fortsetzungen.
- Dahinter steht die explizite Darstellung der Riemannschen Fläche von  $\sqrt{1 + \sqrt{z}}$ . Die Idee, die beiden vorbereitenden technischen Lemmata und eine erste Version des Beweises stammen von **Stefan Born**.

Vorab zwei Lemmata über analytische Fortsetzungen.

**Lemma 235.** Sei  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Kurve und seien  $(f, D)$  und  $(\tilde{f}, \tilde{D})$  Funktionselemente um  $c(0)$  bzw.  $c(1)$ . Genau dann entsteht  $(\tilde{f}, \tilde{D})$  aus  $(f, D)$  durch analytische Fortsetzung längs  $c$ , wenn es eine Familie  $(f_t, D_t)_{t \in [0, 1]}$  mit folgenden Eigenschaften gibt:

(i) Für alle  $t$  ist  $(f_t, D_t)$  ein Funktionselement um  $c(t)$ .

(ii)  $(f_0, D_0) = (f, D)$

(iii)  $(f_1, D_1) = (\tilde{f}, \tilde{D})$

(iv) Zu jedem  $t \in [0, 1]$  gibt ein  $\epsilon > 0$  mit

$$\forall_{s \in [0, 1]} (|t - s| < \epsilon \implies s \in D_t \text{ und } f_s|_{D_s \cap D_t} = f_t|_{D_s \cap D_t}).$$

*Beweis.* Zu ( $\implies$ ). Sei

$$(f, D) = (f_{t_0}, D_{t_0}), \dots, (f_{t_m}, D_{t_m}) = (\tilde{f}, \tilde{D})$$

eine analytische Fortsetzung längs  $c$  mit passender Unterteilung

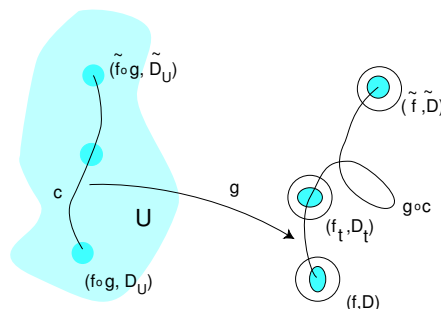
$$0 = t_0 < \dots < t_m = 1$$

Wir definieren  $f_t$  als die Taylorreihe von  $f_{t_k}$  in  $c(t)$ , wenn  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ . Dann gelten (i)-(iv).

Zu ( $\impliedby$ ). Sei  $(f_t, D_t)$  eine Familie mit (i)-(iv) und die  $D_t$  o.E. maximal gewählt. Sei  $t \in [0, 1]$  und sei  $\rho$  der Radius der Scheibe  $D_t$  um  $c(t)$ . Dann gibt es ein  $\eta_t \in ]0, \epsilon_t[$  mit  $|c(s) - c(t)| < \frac{\rho}{3}$  für alle  $s \in [0, 1]$  mit  $|s - t| < \eta_t$ . Die Potenzreihenentwicklung von  $f_s$  um  $c(s)$  ist dann die von  $f_t$  um  $c(s)$ , und sie hat einen Konvergenzradius  $\geq \frac{2}{3}\rho$ . Daraus folgt für  $s, s'$  mit  $|s - t| < \eta_t$  und  $|s' - t| < \eta_t$ , dass  $c(s') \in D_s$  und  $f_s|_{D_s \cap D_{s'}} = f_{s'}|_{D_s \cap D_{s'}}$ . Die  $U_t = \{s \in [0, 1] \mid |s - t| < \eta_t\}$  bilden eine offene Überdeckung von  $[0, 1]$ . Nach dem Lemma über die Lebesguesche Zahl gibt es daher eine Unterteilung  $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ , so dass jedes Intervall  $[t_{j-1}, t_j]$  in einem  $U_t$  liegt. Die  $(f_{t_j}, D_{t_j})$  bilden dann eine analytische Fortsetzung zwischen  $(f, D)$  und  $(\tilde{f}, \tilde{D})$ .  $\square$

**Lemma 236.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Sei  $c : [0, 1] \rightarrow U$  eine Kurve in  $U$  und  $(f, D)$  ein Funktionselement um  $g(c(0))$ . Sei  $D_U$  eine kleine Scheibe um  $c(0)$ , so dass  $g(D_U) \subset D$ . Dann ist durch  $(f \circ g, D_U)$  ein Funktionselement um  $c(0)$  gegeben.

Geht  $(\tilde{f}, \tilde{D})$  durch analytische Fortsetzung längs  $g \circ c$  aus  $(f, D)$  hervor und ist  $\tilde{D}_U$  eine Scheibe um  $c(1)$  mit  $g(\tilde{D}_U) \subset D_U$ , so geht auch  $(\tilde{f} \circ g, \tilde{D}_U)$  durch analytische Fortsetzung längs  $c$  aus  $(f \circ g, D_U)$  hervor.



*Beweis.* Ist  $(f_t, D_t)$  eine Schar von Funktionselementen, die  $(f, D)$  gemäß Lemma 235 längs  $g \circ c$  fortsetzt, so erfüllt  $(f_t \circ g, (D_U)_t)$  mit irgendwelchen Kreisen  $(D_U)_t \subset g^{-1}(D_t)$  um  $c(t)$ ,  $(D_U)_0 = D_U$  und  $(D_U)_1 = D_U$  ebenfalls die ersten drei Bedingungen des Lemmas 235. Zu prüfen bleibt nur die vierte Bedingung:

Sei  $t \in [0, 1]$ , dann gibt es ein  $\epsilon_t > 0$ , so dass für alle  $s \in U_{\epsilon_t}(t) \cap [0, 1]$  gilt:

$$g(c(s)) \in D_t \text{ und } f_s|_{D_s \cap D_t} = f_t|_{D_s \cap D_t}.$$

Da  $(D_U)_t$  eine offene Kreisscheibe um  $c(t)$  ist, gibt es ein  $\epsilon'_t \leq \epsilon_t$ , so dass  $c(s) \in (D_U)_t$  für alle  $s \in U_{\epsilon'_t} \cap [0, 1]$  gilt und wegen

$$g((D_U)_t) \subset D_t \text{ und } g((D_U)_s) \subset D_s$$

auch

$$f_s \circ g|_{(D_U)_t \cap (D_U)_s} = f_t \circ g|_{(D_U)_t \cap (D_U)_s}.$$

Also geht das Funktionselement  $(\tilde{f} \circ g, (D_U)_1)$  durch Fortsetzung längs  $c$  aus  $(f \circ g, (D_U)_0)$  hervor und wir können mit dem Lemma 236 auf die Behauptung schließen.  $\square$

Nun zu dem Beispiel. Sei

$$g(w) := (w^2 - 1)^2.$$

Wir bemerken

$$\begin{aligned} g(w) = 0 &\iff w = \pm 1, \\ g(w) = 1 &\iff w = 0 \text{ oder } w = \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

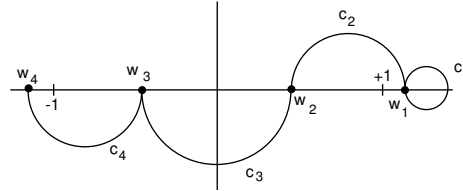
Die sämtlichen Lösungen von  $g(w) = \frac{1}{2}$  sind

$$w_1 = \sqrt{1 + \sqrt{1/2}}, w_2 = \sqrt{1 - \sqrt{1/2}}, w_3 = -\sqrt{1 - \sqrt{1/2}}, w_4 = -\sqrt{1 + \sqrt{1/2}},$$

wie denn überhaupt  $w = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$  bei geeigneter Definition der Wurzeln die lokalen Inversen zu  $g$  liefert.

Wir definieren für  $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} c_1(t) &:= \sqrt{2} + (w_1 - \sqrt{2})e^{2\pi it}, & c_2(t) &:= \frac{w_1 + w_2}{2} + \frac{w_1 - w_2}{2}e^{\pi it}, \\ c_3(t) &:= \frac{w_2 + w_3}{2} - \frac{w_2 - w_3}{2}e^{\pi it}, & c_4(t) &:= \frac{w_3 + w_4}{2} - \frac{w_3 - w_4}{2}e^{\pi it}. \end{aligned}$$

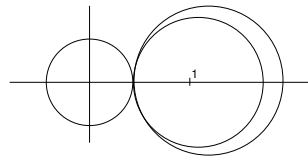


Jede Kurve  $g \circ c_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  ist im Punkt  $\frac{1}{2}$  geschlossen.

Setzen wir  $c = c_1 c_2 c_3 c_4$ , so ist also auch  $g \circ c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  in  $\frac{1}{2}$  geschlossen.

Wir wollen zeigen, dass die Kurve  $g \circ c$  in  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  zwar nullhomolog, aber nicht nullhomotop ist.

Bevor wir mit dem Beweis beginnen, veranschaulichen wir noch die Kurve  $g \circ c$ . Ihr Bild sieht so aus:



Die Kurven  $c_k$  werden für  $k = 1, \dots, 4$  auf in  $\frac{1}{2}$  beginnende, annähernd kreisförmige geschlossene Kurven abgebildet, die der Reihe nach 1 bzw. 0 im positiven und 1 bzw. 0 im negativen Sinn umlaufen, wie die Kurve im Beispiel 128. Wir machen von dieser Veranschaulichung aber im weiteren keinen Gebrauch.

$g \circ c$  ist in  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  nullhomolog. Das testen wir mit dem Kriterium von Artin. Es ist

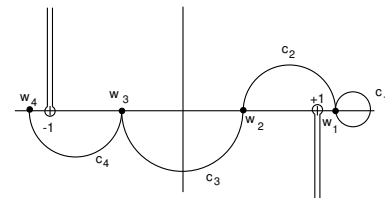
$$\text{Uml}(g \circ c, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{g \circ c} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{(g \circ c)'(t)}{g \circ c(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{4z}{z^2 - 1} dz.$$

Der letzte Integrand hat im einfach zusammenhängenden Komplement der beiden Strahlen

$$\{-1 + iy \mid y \geq 0\}, \quad \{1 + iy \mid y \leq 0\}$$

eine Stammfunktion  $F$ , die man so wählen kann, dass  $F(0) = 0$ . Dann ist  $F$  aber eine gerade Funktion und das Integral = 0 wegen  $w_4 = -w_1$ :

$$\text{Uml}(g \circ c, 0) = 0$$



Die Umlaufzahl  $\text{Uml}(g \circ c, 1) = \text{Uml}(g \circ c - 1, 0)$  berechnen wir für  $c_1$  und  $c_2 c_3 c_4$  separat. Zunächst ist

$$\text{Uml}(g \circ c_1, 1) = \text{Uml}(c_1, \sqrt{2}) \text{Ord}(g - 1, \sqrt{2}) = 1.$$

Dann finden wir wie oben

$$\begin{aligned} \text{Uml}(g \circ (c_2 c_3 c_4), 1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2 c_3 c_4} \frac{4z(z^2 - 1)}{(z^2 - 1)^2 - 1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2 c_3 c_4} \frac{2}{z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2 c_3 c_4} \frac{2z}{z^2 - 2} dz. \end{aligned}$$

Das zweite Integral gibt 0 aus dem gleichen Grund wie oben. Für erste Integral benutzen wir eine Stammfunktion  $\log r + i\phi$  von  $\frac{1}{z}$  in der längs der positiven imaginären Achse geschlitzten Ebene und erhalten wegen  $w_4 = -w_1$

$$\text{Uml}(g \circ (c_2 c_3 c_4), 1) = \frac{2}{2\pi i} (-\pi i) = -1.$$

Zusammen also

$$\text{Uml}(g \circ c, 1) = 0,$$

und  $g \circ c$  ist nach dem Artinschen Kriterium nullhomolog in  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ .

$g \circ c$  ist in  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  nicht nullhomotop. Dazu benutzen wir den Monodromiesatz, indem wir ein Funktionselement  $(f, D)$  in  $g(c(0)) = \frac{1}{2}$  angeben, dessen analytische Fortsetzung längs der geschlossenen Kurve  $g \circ c$  nicht zum Ausgangselement zurück führt.

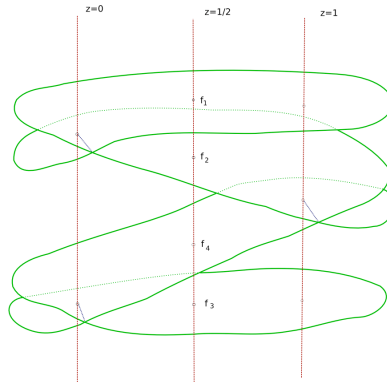
Bezeichnen wir mit  $\sqrt{z}$  die durch den Hauptzweig des Logarithmus definierte Wurzelfunktion, so ist  $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}} = w_1$  und  $(f, D) = (\sqrt{1 + \sqrt{z}}, D)$  auf der Kreisscheibe um  $\frac{1}{2}$  vom Radius  $\frac{1}{2}$  ein Funktionselement. Mit dem komplexen Logarithmus läßt sich  $\sqrt{z}$  längs jeder stetigen Kurve in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  analytisch fortsetzen und liefert Werte in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Daher läßt sich  $(f, D)$  längs jeder Kurve in  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  und insbesondere längs der oben definierten geschlossenen Kurve  $g \circ c$  analytisch fortsetzen. Sei  $(f_t, D_t)$  die analytische Fortsetzung von  $(f, D)$  längs  $g \circ c$  gemäß Lemma 235.

Nach Lemma 236 ist dann  $(f_t \circ g, \tilde{D}_t)$  für geeignete  $\tilde{D}_t$  die Fortsetzung des durch  $f \circ g$  gegebenen Funktionselementes um  $c(0) = w_1$ . Aber weil  $f$  das lokale Inverse von  $g$  bei  $w_1$  ist, ist  $f \circ g(z) = z$ , und wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung ist  $f_t \circ g(z) = z$ . Es folgt  $w_4 = f_1(g(w_4)) = f_1(\frac{1}{2}) \neq f(\frac{1}{2}) = w_1$ . Also führt die Fortsetzung von  $(f, D)$  längs  $g \circ c$  nicht zum Ausgangselement zurück und die Kurve ist nicht nullhomotop.

Wir schließen mit einer Skizze der Überlagerungsabbildung

$$g(w) = (w^2 - 1)^2,$$

die die Konstruktion des Beispiels deutlich macht. (Die  $w_k$  sind hier mit  $f_k$  bezeichnet.)



### 16.3 Die Modulfunktion $\lambda$

- Hier gebe ich eine Skizze zur Definition der Modulfunktion  $\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  und ihre mögliche Verwendung zur Konstruktion einer hyperbolischen Metrik auf  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ .
- Vergleichen Sie den Abschnitt 14.6. Ich teile wieder nur die Fakten ohne jeden Beweis mit und verweise auf *K. Lamotke: Riemannsche Flächen. Springer 2005*.

Zu jedem  $\tau \in \mathbb{H}$  gehört ein Gitter  $\Lambda_\tau = \{k + l\tau \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$ , dazu eine Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion  $\wp_\tau$ , und dazu *Halbwerte*

$$e_1(\tau) := \wp_\tau\left(\frac{1}{2}\right), \quad e_2(\tau) := \wp_\tau\left(\frac{1}{2}\tau\right), \quad e_3(\tau) := \wp_\tau\left(\frac{1}{2}(1 + \tau)\right).$$

Wie im Abschnitt 14.6 die Gitterinvarianten  $g_2, g_3$  zur Konstruktion der Modulfunktion  $J$ , benutzen wir jetzt diese Halbwerte zur Konstruktion der *Modulfunktion Lambda* durch

$$\lambda(\tau) := \frac{e_3(\tau) - e_2(\tau)}{e_1(\tau) - e_2(\tau)}.$$

In der Modulgruppe  $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$  gibt es eine Untergruppe (einen Normalteiler vom Index 6), die sogenannte *Hauptkongruenzgruppe*

$$\Gamma_2 := \left\{ A \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid A \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2} \right\}$$

Damit können wir die Eigenschaften von  $\lambda$  formulieren:

- $\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  ist holomorph, lokal biholomorph und surjektiv.
- $\lambda(\tau) = \lambda(\tau')$  genau dann, wenn es  $A \in \Gamma_2$  gibt mit

$$\tau' = A\tau$$

In der Sprache der Topologie ist  $\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  die unverzweigte universelle Überlagerung mit Decktransformationsgruppe  $\Gamma_2$ .

Der Rest des Arguments ist elementar: Identifiziert man  $\mathbb{H}$  vermöge einer Möbiustransformation mit  $\mathbb{D}$ , so liefert die Poincaré-Bergmann-Metrik von  $\mathbb{D}$  eine Eichfunktion  $\tilde{g}$  auf  $\mathbb{H}$  mit der Krümmung  $K_{\tilde{g}} = -1$ , die invariant unter  $SL(2, \mathbb{R})$  ist, vgl. Satz ?? und Korollar 90. Weil  $\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  lokal biholomorph und invariant unter  $\Gamma_2$  ist, liefert die lokale Definition  $g := \left((\lambda|_U)^{-1}\right)^* \tilde{g}$  eine global definierte Eichfunktion  $g$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  ebenfalls mit Krümmung  $K_g = -1$ .